目 录

第一章 非线性介质中的波 ……(1)
1.1 波的传播与波追赶 ……(1)
1.2 线性波 ……(2)
1.3 非线性波 ……(4)
1.4 耗散波、激波与色散波 ……(7)
1.5 波的自聚与非线性 Schrödinger 方程 ……(8)
1.6 自感透明现象与 sine-Gordon 方程 ……(9)
1.7 三波相互作用 ……(10)
1.8 非线性相互作用中的孤立波理论 ……(12)
1.8.1 关于孤立波的记载 ……(12)
1.8.2 逆散射方法 ……(13)
1.8.3 二分量孤立波方程 ……(16)
1.8.4 直接解孤立波方程法 ……(18)
1.9 非线性 Schrödinger 方程的逆散射解 ……(18)
1.10 非线性 Schrödinger 方程逆散射解的初值问题 ……(21)
1.11 周期的孤立波解的初期问题 ……(24)
第二章 光与非线性介质相互作用的经典与量子理论 ……(31)
2.1 非线性相互作用的经典理论 ……(31)
2.1.1 电磁波在非线性介质中的传播 ……(31)
2.1.2 极化率张量的对称性 ……(33)
2.2 光学中的波波相互作用 ……(36)
2.2.1 三波耦合 ……(36)
2.2.2 四波耦合 ……(40)
2.3 光与非线性介质相互作用的量子理论 ……(44)
2.4 弱场微扰法解 Schrödinger 方程 ……(45)
2.5 密度矩阵方程及其微扰解法 ……(49)
2.5.1 密度矩阵方程 ……(49)
2.5.2 用微扰法解密度矩阵方程 ……(51)
2.6 波场 $\psi(r,t)$ 的量子化 ……(53)
2.7 绝热定理与 Berry 位相 ……(56)
2.8 自离化共振态 ……(58)
2.8.1 自离化共振态 ……(58)
2.8.2 Fano 的自离化 (AI) 态理论 ……(59)
第三章 二能级系统的密度矩阵求解 ……(64)
3.1 二能级原子密度矩阵的矢量模型 ……(64)

3.2 Bloch 方程及其解 ……………………………………………… (66)
3.3 线性吸收与饱和吸收 ……………………………………………… (68)
3.4 光学章动与自由感生衰变 ……………………………………………… (70)
3.5 浸渐近似 ……………………………………………… (71)
3.6 光脉冲传播的面积定理 ……………………………………………… (72)
3.7 相干光脉冲的合并、分裂和面积演化 ……………………………………………… (78)
3.7.1 光与二能级原子系统作用方程 ……………………………………………… (78)
3.7.2 光脉冲传输计算的差分格式与计算参数的取定 ……………………………………………… (79)
3.7.3 计算结果与分析 ……………………………………………… (81)
3.7.4 频率失谐对相干光脉冲演化的影响 ……………………………………………… (82)
3.7.5 光脉冲在 BDN 染料中的合并与分裂 ……………………………………………… (83)
3.8 “准二能级”系统的 Berry 位相 ……………………………………………… (84)
第四章 原子的缀饰态 ……………………………………………… (86)
4.1 二能级原子 Schrödinger 方程的解 ……………………………………………… (86)
4.2 原子的缀饰态 ……………………………………………… (87)
4.3 Cohen–Tannoudji 的缀饰原子 ……………………………………………… (89)
4.4 原子部分缀饰态及其展开 ……………………………………………… (89)
4.4.1 单频泵浦场近共振激发的多能级系统 ……………………………………………… (90)
4.4.2 三次谐波极化率计算 ……………………………………………… (95)
4.5 集居数、介质增益与无反转激光 ……………………………………………… (97)
4.6 自离化共振态干涉 ……………………………………………… (100)
4.7 简并态的量子拍激光 ……………………………………………… (101)
第五章 激光振荡理论 ……………………………………………… (103)
5.1 激光振荡的半经典理论 ……………………………………………… (103)
5.1.1 没有激活离子 (或原子) 情形 ……………………………………………… (104)
5.1.2 线性极化 $P \propto E$ ……………………………………………… (105)
5.1.3 一级近似 ……………………………………………… (105)
5.1.4 气体激光的烧孔效应与 Lamb 凹陷 ……………………………………………… (106)
5.1.5 多模振荡 ……………………………………………… (109)
5.2 激光振荡的全量子理论 ……………………………………………… (110)
5.2.1 电磁场的量子化 ……………………………………………… (110)
5.2.2 辐射场与电子波场的相互作用 ……………………………………………… (111)
5.3 热库模型与激光输出的统计分布 ……………………………………………… (113)
5.3.1 热库模型 ……………………………………………… (113)
5.3.2 激光场与热库相互作用的 Langevin 方程 ……………………………………………… (114)
5.3.3 原子体系与热库相互作用的 Langevin 方程 ……………………………………………… (116)
5.3.4 辐射场的密度矩阵方程 ……………………………………………… (118)
5.3.5 激光输出的统计分布 ……………………………………………… (121)
5.4 激光振荡量子噪音的变率方程分析 ……………………………………………… (125)
5.4.1 阻尼及负阻尼振子的热库模型 ……………………………………………… (125)

5.4.2 包含量子噪音的激光变率方程 ......(126)
5.4.3 白泵浦激光的量子噪音 ......(129)
5.5 降低激光泵浦的量子噪音 ......(131)
5.5.1 规则泵浦抽运 ......(131)
5.5.2 一般泵浦抽运 ......(134)
第六章 辐射的相干统计性质 ......(138)
6.1 平衡辐射的统计热力学 ......(138)
6.2 光的相干性 ......(141)
6.2.1 相干条件 ......(141)
6.2.2 “光子自干涉”与“同态光子干涉” ......(143)
6.3 光探测 ......(144)
6.4 场的相关函数与场的相干性 ......(144)
6.5 相干态 ......(146)
6.5.1 相干态 ......(146)
6.5.2 阻尼相干态 ......(149)
6.5.3 相干态的叠加 ......(151)
6.6 用相干态的展开 ......(156)
6.6.1 相干态的 P 表示 ......(156)
6.6.2 W,Q 与 P 分布函数 ......(159)
6.7 光子的二阶相关函数、群聚与反群聚效应 ......(162)
6.7.1 光场分布的二阶相关测量 ......(162)
6.7.2 经典光场与非经典光场 ......(164)
6.7.3 原子共振荧光场的二阶相关函数分析 ......(168)
6.8 压缩态光场 ......(171)
6.8.1 光量子起伏给光学精密测量带来的限制 ......(171)
6.8.2 正交压缩态 ......(173)
6.8.3 振幅压缩态 ......(177)
6.8.4 压缩态的光子数分布 ......(179)
6.8.5 最小粒子数相位测不准态 ......(181)
6.9 非经典光场的探测 ......(183)
6.9.1 强度差的零拍探测技术 ......(183)
6.9.2 当探测效率 $\eta \neq 1$ 的零拍探测 ......(184)
6.9.3 压缩态光的全息探测 ......(185)
6.10 压缩态光的产生和放大 ......(188)
6.10.1 简并参量放大 (简并四波混频) 产生压缩态光的原理与实验结果 ......(188)
6.10.2 简并参量放大与简并四波混频满足的 Langevin 方程与 Fokker–Planck 方程的解 ......(191)
6.10.3 简并参量放大的 Fokker–Planck 方程的解 ......(192)
6.10.4 简并四波混频的 Fokker–Planck 方程的解 ......(196)
6.11 泵浦噪音的抑制和振幅压缩态的产生 ......(198)

6.11.1 泵浦噪音的亚 Poisson 分布与振幅压缩态 ……(198)
6.11.2 压低泵浦噪音的方案 ……(201)
第七章 原子的共振荧光与吸收 ……(205)
7.1 二能级原子与单色光相互作用的实验研究 ……(205)
7.1.1 二能级原子在强光作用下的共振荧光 ……(205)
7.1.2 在强场作用下的原子吸收线型 ……(207)
7.1.3 二能级原子吸收谱的功率增宽与饱和 ……(207)
7.2 二能级原子的共振荧光与吸收理论 ……(208)
7.2.1 二能级原子与辐射场相互作用方程及其解 ……(208)
7.2.2 二能级原子的共振荧光计算 ……(210)
7.2.3 共振吸收 ……(213)
7.2.4 横向弛豫与泵浦抽运对原子共振荧光的影响 ……(214)
7.3 共振荧光场的态函数与多光子跃迁共振荧光光谱 ……(216)
7.3.1 单光子跃迁模型 ……(217)
7.3.2 单光子共振荧光场的态函数 ……(219)
7.3.3 双光子跃迁模型 ……(220)
7.3.4 数值结果与讨论 ……(221)
7.4 二能级原子系统的瞬态共振荧光 ……(222)
7.4.1 含无规力的 Bloch 方程的解析解 ……(222)
7.4.2 二能级原子系统的瞬态共振荧光谱 ……(226)
7.5 呈指数衰变驱动场作用下二能级原子系统的瞬态共振荧光光谱 ……(228)
7.5.1 驱动场可变情况下 Langevin 方程的形式解 ……(229)
7.5.2 驱动场呈指数衰变情形的瞬态共振荧光 ……(230)
7.5.3 含阻尼和稳态项的三维衰变运动 ……(232)
7.5.4 计算结果与分析 ……(235)
7.6 考虑到自作用后二能级原子的共振荧光谱 ……(237)
7.6.1 考虑到自作用后二能级原子与辐射场系统的 Langevin 方程及其解 ……(237)
7.6.2 二能级原子系统的共振荧光谱 ……(242)
7.6.3 计算结果与讨论 ……(243)
7.7 原子在压缩态光场中的共振荧光 ……(244)
7.7.1 原子在压缩态光场中的密度矩阵方程 ……(244)
7.7.2 原子在压缩态光场中的共振荧光谱 ……(246)
7.8 含原子腔的 Q.E.D. ……(247)
7.8.1 自发辐射的增强与抑制 ……(247)
7.8.2 单模场与二能级原子相互作用的 J–C 模型 ……(252)
7.8.3 真空场的 Rabi 分裂 ……(255)
7.9 含二能级原子腔的透过率谱 ……(256)
7.9.1 共振腔中原子的极化率计算 ……(256)
7.9.2 含二能级原子腔的透过率谱 ……(258)
7.10 多原子体系的共振荧光 ……(260)

7.10.1 多原子体系的再耦合波函数 ......(260)
7.10.2 多原子体系的动力学方程 ......(260)
7.10.3 原子的受激辐射对原子间 (合作) 相互作用的影响 ......(262)
7.10.4 两原子的共振荧光谱 ......(264)
第八章 激光偏转原子束 ......(268)
8.1 激光偏转原子束 ......(268)
8.1.1 早期的激光偏转原子束方案 ......(268)
8.1.2 激光作用于原子上的力 ......(270)
8.1.3 原子在速度空间的扩散 ......(272)
8.2 激光冷却原子与光学粘胶 ......(278)
8.3 激光偏振梯度冷却原子 ......(281)
8.4 光学粘胶温度测量 ......(286)
8.5 电磁衰波场对原子的作用力与原子镜 ......(287)
8.6 原子镜面对原子量子态选择反射实验 ......(289)
8.7 二能级原子在激光衰波场中反射的准确解 ......(290)
8.7.1 二能级原子在激光衰波场中满足的 Schrödinger 方程及其解 ......(290)
8.7.2 二能级原子波函数的边值条件及反射率计算 ......(294)
8.7.3 数值计算与讨论 ......(295)
第九章 超短光脉冲的传播与锁定 ......(299)
9.1 光脉冲波包 ......(299)
9.2 光纤中孤子的形成 ......(301)
9.3 孤子的 Ramann 放大 ......(303)
9.4 暗孤子 ......(305)
9.5 调制不稳 ......(307)
9.6 强超短脉冲传输引起的超加宽 ......(310)
9.7 超短脉冲的模式锁定 ......(312)
9.8 染料被动锁模激光 ......(312)
9.9 准连续被动锁模激光 ......(316)
9.10 碰撞锁模 ......(319)
9.11 啾啾光脉冲的放大与压缩 ......(320)
9.12 快饱和吸收锁模激光 ......(321)
第十章 光学噪音、分岔和混沌 ......(325)
10.1 随机过程理论 ......(325)
10.1.1 历史的回顾 ......(325)
10.1.2 Markov 过程 ......(326)
10.1.3 Ito 积分与随机微分方程 ......(331)
10.2 决定性混沌 ......(334)
10.2.1 决定性混沌的表现及判定 ......(334)
10.2.2 一维二次迭代映象 ......(339)
10.2.3 二分岔理论的抛物线近似 ......(343)

10.2.4 阵发混沌 ....(347)
10.2.5 二维映象与奇异吸引子 ....(348)
10.2.6 由准周期向混沌过渡 (Ruelle-Takens-Newhouse 方案) ....(351)
10.2.7 奇异吸引子图象与分形边界 ....(353)
10.2.8 一维迭代的功率谱与外界噪音的影响 ....(354)
10.2.9 保守系统的无规运动 ....(355)
10.3 激光单模振荡的 Lorenz 模型与实验验证 ....(359)
10.3.1 激光单模振荡的 Lorenz 模型 ....(359)
10.3.2 Lorenz 模型的激光实验验证 ....(361)
10.3.3 模式分裂与非均匀加宽 ....(362)
10.3.4 失谐对激光振荡第二阈值的影响 ....(364)
10.4 光学双稳态中的混沌现象 ....(365)
10.4.1 吸收型光学双稳态 ....(365)
10.4.2 含色散吸收介质的环形腔系统 ....(368)
10.4.3 增益介质的分岔与混沌 ....(371)
10.5 含非线性介质 Fabry-Perot 腔的分岔与混沌 ....(372)
10.5.1 含非线性介质 Fabry-Perot 腔 ....(372)
10.5.2 当 $T_c\frac{d\phi}{dt}$ 不略去时的相位 ϕ 与透过强度 I 的微分差分方程解 ....(374)
10.6 NFP 腔 $B_3 \sim B_5$ 点邻近混沌性质分析 ....(375)
10.6.1 不具有倍周期分岔的抛物线近似 ....(375)
10.6.2 B_3 右邻的迭代输出 ....(376)
10.6.3 B_3 右邻的切分岔混沌性质 ....(377)
10.6.4 $B_4 \sim B_5$ 亚稳区， B_5 后的亚稳混沌区 ....(378)
10.7 光学传输横向效应 ....(379)
10.7.1 模式对称的自发破缺 ....(379)
10.7.2 光场中的相位奇异点 ....(382)
10.7.3 光学中的混沌遨游与时空混沌现象的实验观察 ....(386)
参考文献 ....(389)

第一章　非线性介质中的波

光学中的非线性相互作用，主要表现为波波相互作用或波粒相互作用．作为描述光学非线性相互作用的准备与基础，本章将一般性地讨论非线性介质中的波 [1]，包括波的传播、波追赶、线性波、非线性波、耗散波、激波与色散波、波的自聚与非线性 Schrödinger 方程、自感透明现象与 sine–Gordon 方程、三波相互作用、非线性相互作用中的孤立波理论．

1.1　波的传播与波追赶

波动现象的直观描述，即一特定波形 w 随时间 t 的推移沿空间 x 方向的传播，波形函数 w 为

$$w = w(x - vt) \tag{1.1.1}$$

波的传播方程为

$$\frac{dw}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial x}\right) w = 0 \tag{1.1.2}$$

式中，v 为传播速度．如果一个观察者以 v 的速度向前运动，则他观察到的波幅将是不变的．这就是 (1.1.1) 和 (1.1.2) 式的含义．引进路径参量 ξ:

$$\xi = x - vt, \qquad x = \xi + vt \tag{1.1.3}$$

则 ξ 确定了 w 上每一点的运动路径．参见图 1.1，ξ 即 $t = 0$ 时的 x 值．注意到将波的传播表述为 (1.1.1)~(1.1.3) 式是有条件的，即波的传播速度 v 是一与 x 和 t 无关的常数．如果不是这样，则路径参量应写为

$$\xi = \xi(x, t), \qquad v = v(\xi, t) \tag{1.1.4}$$

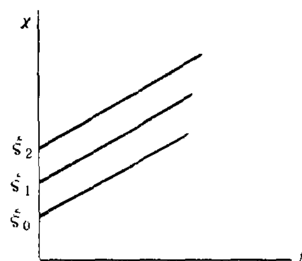


图 1.1　路径参量 $\xi(= x - vt)$

波及波的传播方程为

$$w = w(\xi) \tag{1.1.5}$$

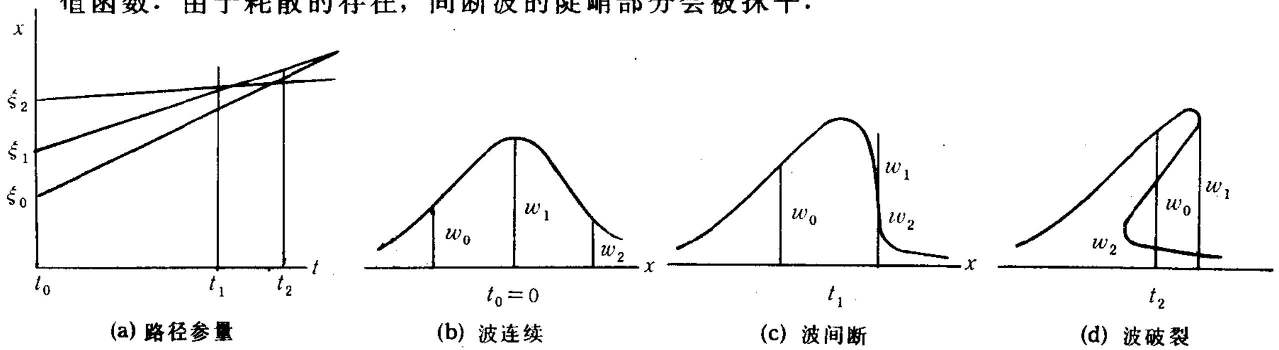
$$\frac{dw}{dt} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} + v\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)\frac{dw}{d\xi} = 0 \tag{1.1.6}$$

(1.1.5) 与 (1.1.6) 式表明波上某固定点的波幅是不随时间而变的，因 $\dfrac{dw}{d\xi} \neq 0$，这就要求

$$\frac{\partial}{\partial t}\xi + v\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0 \tag{1.1.7}$$

由 v 的函数形式 $v = v(\xi, t)$ 可见，不同 ξ 点的速度 v 可能是不一样的．图 1.1 所示的各条路径相互平行的情况已不复存在了．不平行就可能相交，如图 1.2 所示的路径，初值为 ξ_0, ξ_1, ξ_2 各点的速度是不一样的．这就导致 $t_0 = 0$ 的连续波在 t_1 时为间断波，在 t_2

时已为波破裂了．这是因为在波后面的点 ξ_0 运动得比前面的点 ξ_1,ξ_2 快而发生了波追赶现象．波破裂的情形很复杂，我们主要讨论前面两种情况，故实际上可假定 w 是 x 的单值函数．由于耗散的存在，间断波的陡峭部分会被抹平．



(a) 路径参量　(b) 波连续　(c) 波间断　(d) 波破裂

图 1.2

1.2　线　性　波

上面讨论的波是沿 x 方向传播的行波．一般来说，波可同时沿 $\pm x$ 方向传播，这时波函数 w 及传播方程 (1.1.1) 和 (1.1.2) 可推广为

$$w = g(x - v't) + h(x + v't) \tag{1.2.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v'\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + v'\frac{\partial}{\partial x}\right) w = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v'^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) w = 0 \tag{1.2.2}$$

这就是常见的线性波．路径方程 (1.1.3) 也称为特征线方程，在目前情形下可推广为

$$\xi = x - v't, \qquad \eta = x + v't \tag{1.2.3}$$

波动方程 (1.2.2) 为二阶的，但可化为两个一阶方程．事实上，令

$$u = \frac{\partial w}{\partial t}\ , \quad v = v'\frac{\partial w}{\partial x} \tag{1.2.4}$$

将 (1.2.4) 式代入 (1.2.2) 式，并将 $\dfrac{1}{v'}\dfrac{\partial}{\partial t}$ 记为 $\dfrac{\partial}{\partial t}$, 则得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)(v-u) &= \frac{\partial}{\partial \eta}(v-u) = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)(v+u) &= \frac{\partial}{\partial \xi}(v+u) = 0 \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

其通解可写为

$$\begin{aligned} v - u &= r(\xi) = v_0(\xi) - u_0(\xi) \\ v + u &= s(\eta) = v_0(\eta) + u_0(\eta) \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2}[r(\xi) - s(\eta)] = -\frac{1}{2}[v_0(\xi) - u_0(\xi) - v_0(\eta) - u_0(\eta)] \\ v &= +\frac{1}{2}[r(\xi) + s(\eta)] = +\frac{1}{2}[v_0(\xi) - u_0(\xi) + v_0(\eta) + u_0(\eta)] \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

(1.2.6) 式中 $r(\xi), s(\eta)$ 称为 Riemann 不变量，因在特征线 ξ, η 上，$r(\xi), s(\eta)$ 均不变．(1.2.7) 式的几何意义 (见图 1.3)，即 (x, t) 点的函数值 u, v 可通过特征线 ξ, η 与 x 轴的交点的初值 $v_0(\xi), u_0(\xi), v_0(\eta), u_0(\eta)$ 来表示．注意到 (1.2.5) 式是方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{1.2.8}$$

的一个特例，当将

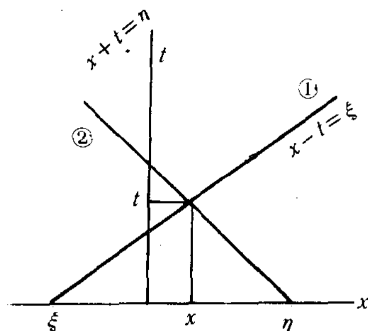


图 1.3　特征线

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1.2.9}$$

代入 (1.2.8) 式便得 (1.2.5) 式．设 A 的特征根为 λ，所对应的特征矢量为 R，即

$$AR = \lambda R \tag{1.2.10}$$

易证

$$\lambda = \pm 1, \quad R_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} \tag{1.2.11}$$

U 的解可表示为

$$U = \varphi R \tag{1.2.12}$$

将 (1.2.12) 式代入 (1.2.8) 式，并注意到 (1.2.10) 式，便得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \tag{1.2.13}$$

由此得 (1.2.9) 式二分量波 U 的通解为

$$U = \varphi_+(x-t)R_+ + \varphi_-(x+t)R_- \tag{1.2.14}$$

一般情形 U 具有 n 个分量，即

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \tag{1.2.15}$$

A 的特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 为实的，且相异；特征矢量 $R_1, \cdots, R_n$ 为独立的．这时方程 (1.2.8) 称为双曲线方程组，有

$$AR_i = \lambda_i R_i, \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.2.16}$$

U 的通解为

$$U = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x - \lambda_i t)R_i \tag{1.2.17}$$

很明显，任意函数 φ_i 由初值 $U(x,0)$ 唯一确定. 引进特征参量 $\xi_i = x - \lambda_i t$, 则由 (1.2.17) 式得

$$U = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\xi_i) R_i \tag{1.2.18}$$

参照 (1.2.7) 式的几何意义，(x,t) 点的函数值 $U(x,t)$ 由通过 (x,t) 点的特征线 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$ 与 x 轴的交点的初值 $U_0(\xi_1), \cdots, U_0(\xi_n)$ 来确定.

1.3 非线性波

对于非线性波，系数矩阵 A 不再是常数，相应的本征值 λ 也不再是常数. 对于一维气体的等熵运动，其连续与运动方程可通过密度 ρ 及速度 u 表示为

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

式中，$a \propto \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ 为声速，γ 为气体的绝热指数. 令

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} u & \rho \\ \dfrac{a^2}{\rho} & u \end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

则方程 (1.3.1) 可改写为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \tag{1.3.3}$$

A 的特征根 $\lambda_\pm$ 为

$$\lambda_\pm = u \pm a \tag{1.3.4}$$

对应的本征矢量 $L_\pm$ 为

$$L_\pm = (\frac{a}{\rho}, \ \pm 1), \quad L_\pm A = \lambda_\pm L_\pm \tag{1.3.5}$$

用 $L_\pm$ 左乘 (1.3.3) 式，并应用 (1.3.5) 式，便得

$$\begin{aligned} L_\pm\left(\frac{\partial}{\partial t} + \lambda_\pm \frac{\partial}{\partial x}\right) U &= \left(\frac{a}{\rho}, \ \pm 1\right)\left[\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a)\frac{\partial}{\partial x}\right]\begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a)\frac{\partial}{\partial x}\right]\left(\frac{2a}{\gamma - 1} \pm u\right) = 0 \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

(1.3.6) 式给出特征线 $\xi = \xi(x,t)$ 上的 Riemann 不变量 $r(\xi)$ 为

$$r(\xi) = \frac{2a}{\gamma - 1} + u \tag{1.3.7}$$

特征线 $\xi = \xi(x,t)$ 由 $\dfrac{dx}{dt} = u + a$ 积分得出. 同样沿特征线 $\eta = \eta(x,t)$ 上的 Riemann 不变量 $s(\eta)$ 为

$$s(\eta) = \frac{2a}{\gamma - 1} - u \tag{1.3.8}$$

特征线 $\eta=\eta(x,t)$ 由 $\dfrac{dx}{dt}=u-a$ 给出. 由 (1.3.7) 和 (1.3.8) 式易于解出 a,u, 用 Riemann 不变量 $r(\xi),s(\eta)$ 表示为

$$a=\frac{\gamma-1}{4}[r(\xi)+s(\eta)] \tag{1.3.9}$$

$$u=\frac{1}{2}[r(\xi)-s(\eta)] \tag{1.3.10}$$

如果两个 Riemann 不变量中一个为常数, 例如 $s(\eta)=s_0$, 这样的波称为简单波. (1.1.1) 式给出的沿 x 方向传播的行波 $w(x-vt)$ 即为简单波的一例. 对于 $s(\eta)=s_0$ 的简单波情形, 由 (1.3.9) 式看出, a,u 或 U 仅仅是 ξ 的函数, 与 η 无关. 利用这一点, 可讨论 (1.3.3) 式的一般问题, 即

$$U=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}U+A(U)\frac{\partial}{\partial x}U=\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}+A(U)\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{dU}{d\xi}=0 \tag{1.3.11}$$

另一方面, 在特征线 $\xi=\xi(x,t)$ 上

$$\frac{d\xi}{dt}=\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{dx}{dt}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\xi}{\partial t}+\lambda_\xi\frac{\partial\xi}{\partial x}=0 \tag{1.3.12}$$

比较 (1.3.11) 和 (1.3.12) 式, 便得知 U 的解应满足常微分方程

$$\frac{dU}{d\xi}\propto R_\xi, \qquad R_\xi=\begin{pmatrix} r_1(u_1,u_2) \\ r_2(u_1,u_2) \end{pmatrix} \tag{1.3.13}$$

式中, R_ξ 为对应于本征值 λ_ξ 的右乘本征矢量, 即

$$AR_\xi=\lambda_\xi R_\xi \tag{1.3.14}$$

这就证明了特征线的 (1.3.12) 式的解也是 (1.3.11) 式的解. 当然, 要求出 U, 还要解常微分方程 (1.3.13) 式, 即

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{d\xi}&=r_1(u_1,u_2)\\ \frac{du_2}{d\xi}&=r_2(u_1,u_2)\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

这可写为以 u_1 为自变量的常微分方程

$$\frac{du_2}{du_1}=\frac{r_2(u_1,u_2)}{r_1(u_1,u_2)} \tag{1.3.16}$$

由此解出 $u_2=u_2(u_1,C)$,C 为积分常数. 代入 (1.3.15) 式的第一式, 得出 u_1 以 ξ 为自变量的微分方程

$$\frac{du_1}{d\xi}=r_1[u_1,u_2(u_1,C)] \tag{1.3.17}$$

将这个简单波解记为 $U^{(\xi)}$, 因为它是对应于本征值 λ_ξ. 同样对于本征值 η, 也可得到简单波 $U^{(\eta)}$. 这种求解方法可推广到多分量 $U=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ 情形, 当然也是求简单波, 否则是

不适用的. 图 1.4 给出两分量波的时间空间分布图，初始 $t=0$ 时扰动限制在 $|x|\le x_0$ 的直线上，传播速度 $v=\pm1$, 于是有 $|x-t|=|\xi|>x_0, |x+t|=|\eta|>x_0$ 的扰动无法到达的①, ③, ⑤区；$|x-t|=|\xi|\le x_0$, $|x+t|=|\eta|>x_0$ 与 $|x-t|=|\xi|>x_0$, $|x+t|=|\eta|\le x_0$ 的行波区②，④；$|x-t|=|\xi|\le x_0, |x+t|=|\eta|\le x_0$ 的两分波区⑥. 简单波解仅适用于②与④区.

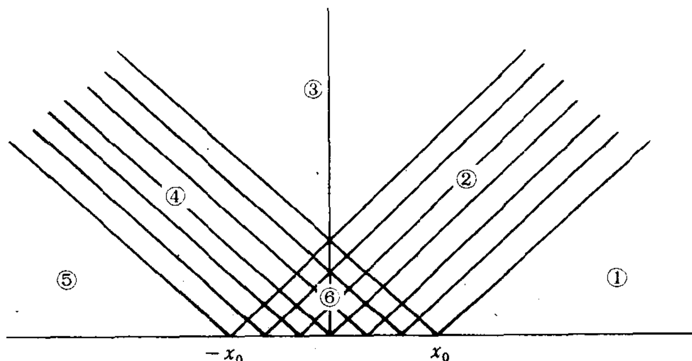


图 1.4 两分量波的区域划分

作为一个例子，我们用特征线方法求两分波区⑥方程 (1.3.9) 的解. 注意在特征线 $r(\xi)$ 上，$\dfrac{dx}{dt}=u+a$,$r(\xi)$ 为常数，但 $s(\eta)$ 是变的，故有

$$\frac{\partial x}{\partial s}=(u+a)\frac{\partial t}{\partial s}$$

即

$$x_s=(u+a)t_s \tag{1.3.18}$$

同样在特征线 $s(\eta)$ 上，$\dfrac{dx}{dt}=u-a$,$r(\xi)$ 是变的，即有

$$x_r=(u-a)t_r \tag{1.3.19}$$

由 (1.3.18) 和 (1.3.19) 式消去 x, 得

$$2at_{rs}+(u+a)_r t_s-(u-a)_s t_r=0 \tag{1.3.20}$$

由 (1.3.9) 式消去上式中的 u, a, 得

$$\begin{gathered} t_{rs}+\frac{\mu}{r+s}(t_r+t_s)=0 \\ \mu=\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \end{gathered} \tag{1.3.21}$$

一般称 (1.3.21) 式为 PED(Poisson–Euler–Darboux) 方程. 当将 $\gamma=(2N+1)/(2N-1), N=0,1,2,\cdots$ 代入 μ 的表示式，得 $\mu=N$, 这时 (1.3.21) 式有解析解. 当 $\mu=N=0$ 时，(1.3.21) 式的解为

$$t=f(r)+g(s) \tag{1.3.22}$$

当 $\mu=N=1$ 时，(1.3.21) 式的解为

$$t(r,s)=\frac{1}{r+s}[f(r)+g(s)] \tag{1.3.23}$$

易证 (1.3.23) 式满足 $\mu=N=1$ 的 PED 方程：在一般情况，$\mu=N$,PED 方程为

$$t_{rs}+\frac{N}{r+s}(t_r+t_s)=0 \tag{1.3.24}$$

令

$$t=\frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}}\left[\frac{f(r)}{(r+s)^N}\right] \tag{1.3.25}$$

代入 (1.3.24) 式，得 (1.3.24) 式的左端为

$$-N\frac{\partial^N}{\partial r^N}\frac{f(r)}{(r+s)^{N+1}}+\frac{N}{r+s}\left[\frac{\partial^N}{\partial r^N}\frac{f(r)}{(r+s)^N}-N\frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}}\frac{f(r)}{(r+s)^{N+1}}\right] \tag{1.3.26}$$

因

$$\frac{f(r)}{(r+s)^N}=\frac{f(r)}{(r+s)^{N+1}}(r+s)$$

所以

$$\frac{\partial^N}{\partial r^N}\left[\frac{f(r)}{(r+s)^N}\right]=(r+s)\frac{\partial^N}{\partial r^N}\left[\frac{f(r)}{(r+s)^{N+1}}\right]+N\frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}}\left[\frac{f(r)}{(r+s)^{N+1}}\right] \tag{1.3.27}$$

故 (1.3.26) 式为 0, 证明了由 (1.3.25) 式给出的 t 是 (1.3.24) 式的解. (1.3.24) 式的通解为

$$t(r,s)=k+\frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}}\left[\frac{f(r)}{(r+s)^N}\right]+\frac{\partial^{N-1}}{\partial r^{N-1}}\left[\frac{g(s)}{(r+s)^N}\right] \tag{1.3.28}$$

式中，k 为常数.

1.4 耗散波、激波与色散波

在一维非线性波中，一个很有代表性的含耗散项的耗散波方程为 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}-\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{1.4.1}$$

其前两项为非线性波，第三项为耗散项，μ 为耗散系数. 这个方程有一个形状不变的稳态解

$$u=v+(u_\infty-v)\tanh\left[-\frac{(u_\infty-v)(x-vt)}{2\mu}\right] \tag{1.4.2}$$

(1.4.2) 式所描写的是一以速度 v 运动的波. 设 $u_\infty-v<0$, 则当 $x-vt\to\infty$ 时，$u\to u_\infty<v$；当 $x-vt\to-\infty$ 时，$u\to v-(u_\infty-v)>v$；在 $x-vt=0$ 处，$u=v$. 有一个由高速 $2v-u_\infty$ 向低速 u_∞ 的过渡区，其宽度为 $\dfrac{2\mu}{u_\infty-v}$, 当耗散系数 μ 很小时，几乎是很陡的，其极限便是激波 (见图 1.5). 若将 Burgers 方程 (1.4.1) 的耗散项换成色散项，便得熟知的 KdV(Korteweg-de Vries) 方程

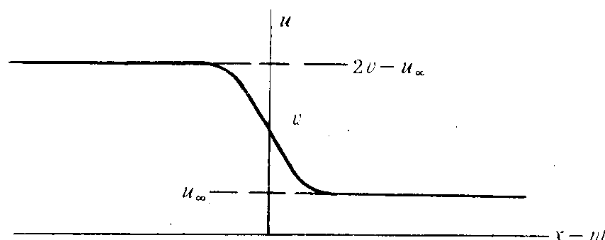


图 1.5 耗散波曲线

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{1.4.3}$$

将上式在常数速度 u_0 附近线性化，并求其色散关系，便得

$$\omega=u_0k-\mu k^3 \tag{1.4.4}$$

相速度 ω/k 为

$$\frac{\omega}{k}=u_0-\mu k^2 \tag{1.4.5}$$

这关系表明，对长波来说，色散 $-\mu k^2$ 是弱的，但对短波来说，色散项 $-\mu k^2$ 就显得很重要了．像 Burgers 方程一样， KdV 方程也存在一个以常速度向前运动的稳态解

$$u=u_\infty+\varepsilon\ \mathrm{sech}^2\left\{\frac{1}{(12\mu)^{1/2}}\left[\varepsilon^{1/2}(x-u_\infty t)-\frac{1}{3}\varepsilon^{3/2}t\right]\right\} \tag{1.4.6}$$

这就是熟知的 sech^2 孤立波．当 $x\to\pm\infty, u\to u_\infty$ 时，波峰向前运动的速度为 $u_\infty+\varepsilon/3$.

现从波的非线性与色散进一步讨论 KdV 方程 (1.4.3) 及定态解 (1.4.6) 式的物理意义．在 1.1 节我们介绍了波追赶，那里由于 v 是 x 的初值 ξ 的函数，即 $v=v(\xi)$, 又设波的初始形状为

$$w=u(\xi) \tag{1.4.7}$$

不同的初值位置 ξ 具有不同的幅度 $u(\xi)$, 故波的传播速度 v 依赖于初值 ξ. 从物理意义来说便是波的传播速度 v 依赖于波的幅度 $u(\xi)$. 最简单的情形，即波的相速 v 线性地依赖于 u, 有

$$v=v_0+\delta u \tag{1.4.8}$$

由 (1.1.2) 式得

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+(v_0+\delta u)\frac{\partial}{\partial x}u=0 \tag{1.4.9}$$

作变换 $v_0+\delta u\to u$, 上式变为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{1.4.10}$$

(1.4.10) 式即 KdV 方程的前两项，其中非线性项导致图 1.2 所示的间断与波裂．但由于波的相速 $v=\omega/k$ 的色散关系 (1.4.5) 式，存在色散项 $-\mu k^2$, 即波数 k 很大，相当于在波破裂之前，空间变化剧烈，相速度也随之减慢．这在方程 (1.4.10) 中增添了 $-\mu k^2\dfrac{\partial u}{\partial x}\Rightarrow\mu\dfrac{\partial^3}{\partial x^3}u$ 项，便得 KdV 方程．正是由于色散项的存在，使得波弥散了，抵消了非线性项 $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 的变陡，最后会到达一种由孤立波体现的波弥散与非线性变陡间的平衡，即 (1.4.6) 式．

1.5 波的自聚与非线性 Schrödinger 方程

波在均匀介质中的传播可用推广的三维线性或非线性波来描述．参照 (1.2.2) 式，便得三维线性波 E 满足方程

$$-\left(\frac{1}{v'}\frac{\partial}{\partial t}-\nabla\right)\left(\frac{1}{v'}\frac{\partial}{\partial t}+\nabla\right)E=\left(\nabla^2-\frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E=0 \tag{1.5.1}$$

式中，$\epsilon = c^2/v'^2 = n_0^2$, n_0 为折射率，是一常数. 这个模型对弱振幅波 w 的传播，应该与实际情况相符. 但对于强振幅的传播，就需要仔细研究. 通常的现象是，起始时是一理想的平面波，但经过传播后，表现为有一定程度自聚或发散的球面波. 究其原因，可归结为波在介质中传播速度与折射率 n 不再是与光强度无关的常数，而是除了依赖于介质性质的 n_0 外，还要附加一小量 $n_2E^2/2n_0$. 这一项称之为非线性折射率，因它依赖于 E^2，而 n_2 依赖于介质的性质. 这样，介质常数 ϵ 可表示为

$$\epsilon = \left(n_0 + \frac{n_2}{2n_0}|E|^2\right)^2 \simeq \epsilon_0 + n_2|E|^2 \tag{1.5.2}$$

将其代入 (1.5.1) 式，便得波在介质传播的非线性方程

$$\left[\nabla^2 - \left(\frac{\epsilon_0}{c^2} + \frac{n_2|E|^2}{c^2}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]E = 0 \tag{1.5.3}$$

一个很重要的情形，即 E 波可表示为沿 x 方向振幅缓慢变化的波

$$E = \varphi(x, y, z)e^{i(kx-\omega t)} \tag{1.5.4}$$

式中，波矢 k 与频率 ω 满足关系 $k^2 - n_0^2\dfrac{\omega^2}{c^2} = 0$. 因振幅 $\varphi(x, y, z)$ 沿着传播方向 x 是慢变的，以致有

$$\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right| << \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right| << 2\left|k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right|$$

将 (1.5.4) 式代入 (1.5.3) 式，得

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2k}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\varphi + \frac{k}{2}\frac{n_2}{n_0^2}|\varphi|^2\varphi = 0 \tag{1.5.5}$$

这就是二维非线性 Schrödinger 方程. 若 φ 仅依赖于 y, 则得一维非线性 Schrödinger 方程

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{1}{2k}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi + \frac{k}{2}\frac{n_2}{n_0^2}|\varphi|^2\varphi = 0 \tag{1.5.6}$$

$$\varphi = \varphi(x; y)$$

方程 (1.5.6) 也存在如下的稳态解：

$$\varphi = \varphi_0 \mathrm{sech}\left(\frac{y}{y_0}\right)e^{iKx} \tag{1.5.7}$$

将 (1.5.7) 式代入 (1.5.6) 式，得

$$K = \frac{1}{2ky_0^2}, \quad \frac{k}{2}\frac{n_2}{n_0^2}\varphi_0^2 = \frac{1}{ky_0^2} \tag{1.5.8}$$

1.6 自感透明现象与 sine-Gordon 方程

光在无损介质中传输，条件适合时会产生一种自感透明的稳态脉冲传输现象. 以二能级原子介质为例，当光脉冲前沿经过时，光被吸收，原子由基态跃迁到激发态，能量被存储起来. 等到光脉冲的后沿经过时，由于受激辐射，原子又由激发态跃迁到基态，

辐射出能量，增强了后沿，这样光脉冲能量就等效地由前沿移至后沿．如图 1.6 虚线所示，光脉冲波形未发生变化，好像经过透明介质一样．可以证明光在含二能级原子介质中的传输，其电场 ε 、极化强度 P 、反转粒子 Δ 满足如下的非线性传输方程 [2]:



图 1.6 光脉冲的自感透明示意图

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}=GP\\&\frac{\partial P}{\partial \tau}=\mathcal{E}\Delta, \qquad \tau=x-ct\\&\frac{\partial \Delta}{\partial \tau}=-\mathcal{E}P\end{aligned}\tag{1.6.1}$$

设初始条件为 $P=0,\Delta=1$, 可将 P,Δ 的解表示为

$$P=\sin(\xi)\quad,\Delta=\cos(\xi)\tag{1.6.2}$$

代入 (1.6.1) 式，得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x}=G\sin(\xi)\\&\frac{\partial \xi}{\partial \tau}=\mathcal{E}\\&\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial \tau}=G\sin(\xi)\end{aligned}\tag{1.6.3}$$

(1.6.3) 式的第三个方程，即为 sine-Gordon 方程．同样， sine-Gordon 方程也存在稳态传输脉冲解．替换变量，则方程 (1.6.3) 可化为

$$\begin{aligned}&\frac{d^2\xi}{d\zeta^2}=\frac{G}{u}\sin(\xi)=\frac{1}{1-u^2}\sin(\xi)\\&\zeta=x+u\tau=(1+u)x-cut\end{aligned}\tag{1.6.4}$$

其解为

$$\xi=4\tan^{-1}\{\exp[\pm(x+u\tau)/(1-u^2)^{1/2}]\}\tag{1.6.5}$$

括号中的“ + ”号对应于 $x\to-\infty,\xi\to 0$ 和 $x\to\infty,\xi\to 2\pi$, 意味着当 x 由 $-\infty\to+\infty,\xi$ 相当于摆的幅角沿顺时针方向转了一周；同样，括号中的“ − ”号意味着当 x 由 $-\infty\to+\infty$, 摆的幅角沿逆时针转了一周．将 (1.6.5) 式代入 (1.6.3) 式，得

$$\mathcal{E}=\pm\frac{u}{(1-u^2)^{1/2}}\ \mathrm{sech}\left[\frac{x+u\tau}{(1-u^2)^{1/2}}\right]\tag{1.6.6}$$

这就是自感透明介质的光脉冲孤立波解．

1.7 三波相互作用

波波耦合在非线性相互作用中是常见的，在非线性光学中也是一种常见的相互作用形式．三波耦合更是波波耦合中重要的，且有代表性的一种．设有频率为 $\omega_0,\omega_1,\omega_2$, 波矢为 $\vec{k}_0,\vec{k}_1,\vec{k}_2$ 的三个波，它们满足共振与相位匹配条件

$$\begin{aligned}&\omega_0=\omega_1+\omega_2\\&\vec{k}_0=\vec{k}_1+\vec{k}_2\end{aligned}\tag{1.7.1}$$

这些条件也是由三个波中的两个波拍频相互作用产生第三个波所必需遵从的能量、动量守恒关系. 三波相互作用方程，就是在线性波传播方程的基础上加上波的耦合项得到的. 例如

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_{g0}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_0&=\beta_0\varphi_1\varphi_2\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+v_{g1}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_1&=-\beta_1\varphi_0\varphi_2^*\\ \left(\frac{\partial}{\partial t}+v_{g2}\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_2&=-\beta_2\varphi_0\varphi_1^*\end{aligned}\tag{1.7.2}$$

式中， v_{gj} 为传播速率， $\beta_j>0$ 为耦合常数，一般来说它们是不一致的. 可以证明，形如 (1.7.2) 式的三波耦合方程也存在以 $\xi=x-\lambda t$ 为宗量的孤立波解. 令

$$\tilde{\beta}_j=\frac{\beta_j}{v_{g0}-\lambda},\ \tilde{\beta}=|\tilde{\beta}_0\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2|^{1/2}\tag{1.7.3}$$

并作变换

$$\frac{\varphi_j}{|\tilde{\beta}_j|^{1/2}}\to\varphi_j\tag{1.7.4}$$

则 (1.7.2) 式可化为

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_0}{d\xi}&=\mp\tilde{\beta}\varphi_1\varphi_2\\ \frac{d\varphi_1}{d\xi}&=\pm\tilde{\beta}\varphi_0\varphi_2^*\\ \frac{d\varphi_2}{d\xi}&=\pm\tilde{\beta}\varphi_0\varphi_1^*\end{aligned}\tag{1.7.5}$$

当 $\lambda>\max(v_{gi})$, 取 $(-,+,+)$ 号；当 $\lambda<\min(v_{gi})$, 取 $(+,-,-)$ 号. 设 $\varphi_1,\varphi_1,\varphi_2$ 为实数, $n_j=\varphi_j^2$, 积分 (1.7.5) 式，得

$$\begin{aligned}m_1&=n_0+n_1=\text{常数}\\ m_2&=n_0+n_2=\text{常数}\\ m_3&=n_1-n_2=\text{常数}\end{aligned}\tag{1.7.6}$$

又设

$$m_1\gg m_2\ ,\ \ n_0(\xi_0)=0\ ,\ \ m=(m_2/m_1)^{1/2}$$

将 (1.7.6) 式代入 (1.7.5) 式，得

$$\frac{dn_0}{d\xi}=\mp\beta\sqrt{n_0(m_1-n_0)(m_2-n_0)}\tag{1.7.7}$$

n_0 的解可用 Jacobi 椭圆函数来表示，通解为

$$n_0(\xi)=m_2\text{sn}^2[\mp\beta m_1^{1/2}(\xi-\xi_0),m]\tag{1.7.8}$$

又设 $m=1$, 则 $m_1=m_2=\bar{n}_0$, φ_j 的通解为

$$\begin{aligned}\varphi_0&=\alpha_0\tanh[\gamma(x-\lambda t)]\\ \varphi_1&=\alpha_1\text{sech}[\gamma(x-\lambda t)]\\ \varphi_2&=\alpha_2\text{sech}[\gamma(x-\lambda t)]\end{aligned}\tag{1.7.9}$$

$\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$ 满足关系

$$
\begin{aligned}
(v_{g0}-\lambda)\frac{\alpha_0^2}{\beta_0} = & \ (v_{g1}-\lambda)\frac{\alpha_1^2}{\beta_1} = (v_{g2}-\lambda)\frac{\alpha_2^2}{\beta_2} \\
= & \ \gamma^2\frac{(v_{g0}-\lambda)(v_{g1}-\lambda)(v_{g2}-\lambda)}{\beta_0\beta_1\beta_2} = \mp\bar{n}_0
\end{aligned} \tag{1.7.10}
$$

φ_i^2 与 ξ 的变化曲线如图 1.7 所示 [3]. 有意义的是，当 $|\xi|=|x-\lambda t|$ 稍大时， $\varphi_1(\xi),\varphi_2(\xi)$ 均趋于 0, 而泵浦波 $|\varphi_0|\to\alpha_0$, 对 φ_1,φ_2 未提供能量. 只有当 $|\xi|=|x-\lambda t|$ 趋于很小时，泵浦波 $|\varphi_0|$ 下降到 0, 能量被转换到 φ_1,φ_2 波，使之具有孤立波形.

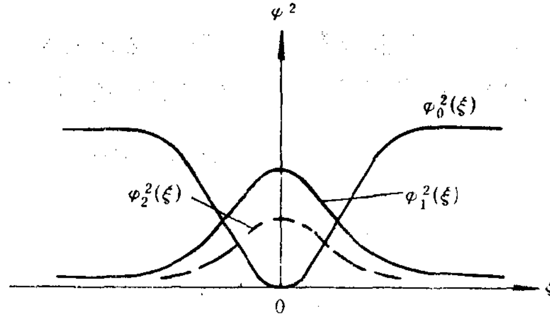


图 1.7 三波相互作用的能量转换曲线示意图 (参照 Nogaki 等 [3])

上面的解适用于 $\lambda>\max(v_{gi})$ 或 $\lambda<\min(v_{gi})$ 情形,其耦合项取 $(-,+,+)$ 或 $(+,-,-)$. 通过变换 $\varphi_i\to-\varphi_i$, 这后一种情况 $(+,-,-)$ 变为前一种情况 $(-,+,+)$, 故只需讨论前一种情况就可以了. “ − ” 号对应于泵浦波，其解为 tanh 型，当 $|\xi|\to\infty$ 时， $\varphi_0^2\to\alpha_0^2$ ； “ + ” 号对应于孤立波，是被泵浦波激发起来的，为 sech 型，当 $|\xi|\to\infty$ 时， $\varphi_{1,2}^2\to 0$. 如果 λ 不满足上述条件，例如 $v_{g2}>\lambda>(v_{g1},v_{g0})$, 则原来的耦合符号 $(-,+,+)$ 将乘以因子 $\mathrm{sgn}(\frac{1}{v_{g0}-\lambda},\frac{1}{v_{g1}-\lambda},\frac{1}{v_{g2}-\lambda})=(-,-,+)$ 而变为 $(+,-,+)$, 这时 φ_1 变为泵浦波; $\varphi_1\propto\tanh[\gamma(x-\lambda)]$, 而 φ_0,φ_2 变为孤立波， $\varphi_1,\varphi_2\propto\mathrm{sech}[\gamma(x-\lambda)]$. 其它情形类推.

1.8 非线性相互作用中的孤立波理论

1.8.1 关于孤立波的记载

1834 年， John Scott Russell[4,5] 以其亲身经历描述了孤立波现象：“ ⋯ 水浪呈现出一个滚圆而平滑、轮廓分明的孤立波峰，以巨大速度向前滚动，在行进中形状和速度没有明显的改变 ⋯ ”． 1895 年， Korteweg 与 de Vries 从数学上得出孤立波方程及其 sech^2 的解析解 [6]. 到 1955 年， Fermi-Pasta-Ulam 进行了一维 N 个分子链非简谐运动的数值模拟 [7], 原意在于研究“初始存在于最低模式振动，是否会由于分子间的非线性相互作用传递到其它模式，最后达到能量均分的统计平衡状态”这一问题 (FPU 问题). 但模拟结果完全出人意料. 初始存在于最低模式的振动能，总是在较少的几个模式间来回地传递着，最后又几乎完全回到最低模式，并没能观察到在各个模式间的均分或热化现象. 1965 年， Kruska 与 Zabusky 又重新研究了 FPU 问题 [8,4], 主要是将 FPU 的 N 个分子非简谐运动方程

$$
my_{i,tt}=k(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})[1+\alpha(y_{i+1}-y_{i-1})]
$$

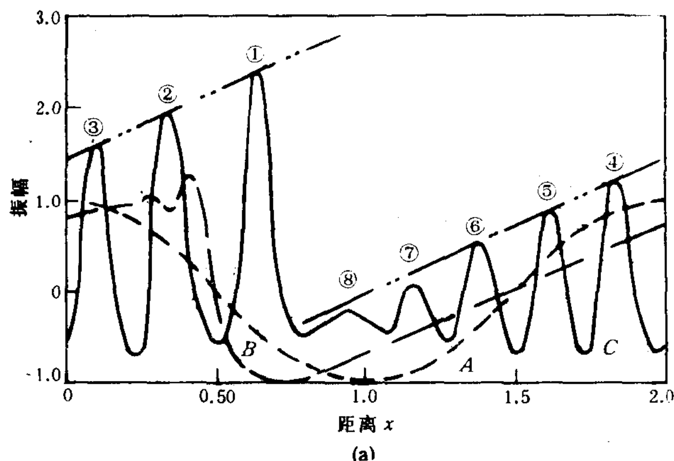
采用 Taylor 级数展开，使之连续化，最后得出

$$q_t + 6qq_\xi + \delta^2 q_{\xi\xi\xi} = 0 \qquad (1.8.1)$$

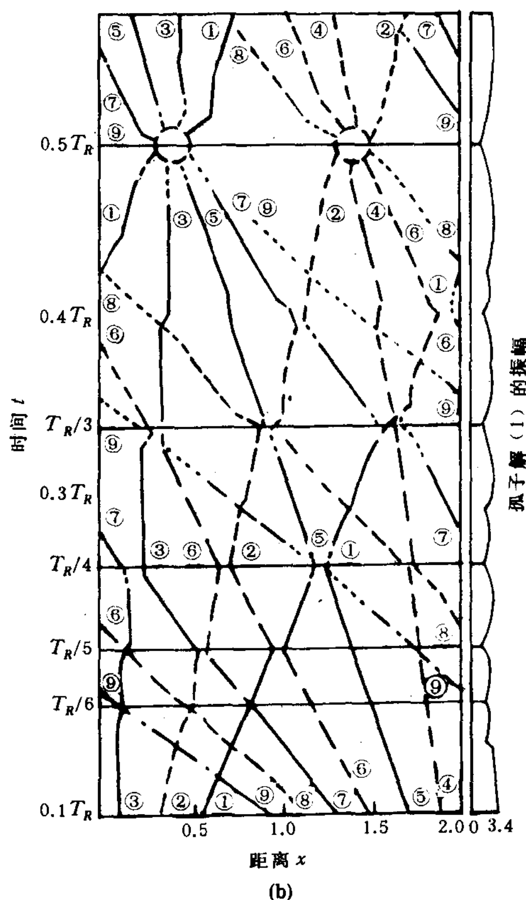
其解为

$$q = 2\eta^2 \mathrm{sech}^2[\eta(\xi - v\tau)] \qquad (1.8.2)$$

对应于 Russell 所观察到的孤立波.



(a)



(b)

图 1.8 (a) 孤立波随时间的演化曲线 (A: $t=0$; $B: t=1/\pi$; C: $t=3.6/\pi$); (b) 孤立波峰的运动轨迹 ($T_R = 30.4t_B$, $t_B = 1/\pi$) (参照 Zabusky 与 Kruskal [8])

ZK 还研究了如下 KdV 方程随时间的演化问题：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} - \mu\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \qquad (1.8.3)$$

式中，色散系数 $\mu = 0.022^2$, 解的初值为 $u(x,0) = \cos(\pi x)$. 又设边界为周期的，$L = 2$. 图 1.8 给出解的振幅分布随时间的演化以及孤立波峰的运动轨迹[8]. 因色散系数 μ 很小. 对应于初始分布的 $\max\left(\left|\mu\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right|\right)/\max\left(\left|u\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right) = 0.005$, 故初始时色散项可略去. 这样 (1.8.3) 式的隐式解 $u=\cos\pi(x-ut)$. 这个解对应的曲线，随时间的推移会变得愈来愈陡. 在 $x = 1/2$ 点，当 $t = t_B = 1/\pi$ 时，解会变得不连续. 但是当到达或超过这点时，色散项增大，再也不能被略去. 这就起到抹平变陡的作用 (见图 1.8(a) 曲线 B). 当 $t = 3.6t_B$ 时，有 8 个孤立波出现 (见图 1.8(b)). 每一孤立波均以各自的速度向前运动. 非常重要而有趣的现象是孤立波的碰撞，碰撞时速度改变，但碰撞后，仍以碰撞前的速度向前运动，且孤立波不破坏，具有粒子相碰的特点. 正因为如此，ZK 称之为孤子.

1.8.2 逆散射方法

KdV 方程与 Burgers 方程有某种相似. Burgers 方程可通过 Cole-Hopf 变换

$$u = -\frac{2\mu}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{1}{\psi} \qquad (1.8.4)$$

线性化为扩散方程

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\mu\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \tag{1.8.5}$$

人们猜想是否也存在类似的变换，使 KdV 方程线性化呢？虽然这些猜想并未实现，但是 1967 年 Gardner 等找到了 KdV 方程的解与线性的 Schrödinger 方程本征值问题间的关联 [9,10], 并导致用逆散射方法解孤立波方程的方法的提出．这是孤子理论的重要突破．

逆散射方法的要点是不去直接解 KdV 方程中的函数 u, 而是先解以 u 为势函数的 Schrödinger 方程

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u\right)\psi=\lambda\psi \tag{1.8.6}$$

的谱 λ(本征值).$u=u(x,t)$ 是 t 的函数，那么由 (1.8.6) 式方程确定的谱 λ 是否也是 t 的函数呢？这是很关键的．由 (1.8.6) 式得

$$u=\lambda+\frac{\psi_{xx}}{\psi} \tag{1.8.7}$$

应用 (1.8.7) 式对 t 进行偏微分

$$u_t\psi^2=\lambda_t\psi^2+(\psi_{xt}\psi-\psi_x\psi_t)_x \tag{1.8.8}$$

应用 (1.8.7) 式对 x 进行多次偏微分，并经计算可得

$$(-6uu_x+u_{xxx})\psi^2=\{[\psi_{xxx}-3(u+\lambda)\psi_x]_x\psi-[\psi_{xxx}-3(u+\lambda)\psi_x]\psi_x\}_x \tag{1.8.9}$$

(1.8.8) 式与 (1.8.9) 式相加，并设 u 满足 KdV 方程 $u_t-6uu_x+u_{xxx}=0$, 则得

$$\lambda_t\psi^2+[\psi R_x-\psi_x R]_x=0 \tag{1.8.10}$$

$$R=\psi_t+\psi_{xxx}-3(u+\lambda)\psi_x \tag{1.8.11}$$

考虑势垒 u 在 $|x|\to\infty$ 时，$u\to 0$, 故 Schrödinger 方程的谱有负能的束缚态 $\lambda=-K_n^2(n=1,2,\cdots,N)$ 及正能的连续态 $\lambda=k^2$ 解．对于负能束缚态，当 $|x|\to\infty,\psi$ 和 $\psi_x\to 0$, 故由 (1.8.10) 式，得

$$\lambda_t\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx=0 \tag{1.8.12}$$

由规一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty}\psi^2dx=1$, (1.8.12) 式成立就证明了 $\lambda_t=0$, 亦即谱 $\lambda=-K_n^2$ 是不随时间而变的．由势垒 $u(x,0)$ 确定的谱，也适用于势垒 $u(x,t)$. 将 $\lambda_t=0$ 代入 (1.8.10) 式，得

$$\psi R_x-\psi_x R=\text{常数} \tag{1.8.13}$$

R 的通解为

$$R=\psi_t+\psi_{xxx}-3(u+\lambda)\psi_x=C\psi+D\psi\int_0^x\frac{dx}{\psi^2} \tag{1.8.14}$$

考虑到 $|x|\to\infty$ 处，$\psi\to 0$, 第二项发散，故应取 $D=0$. 又将 (1.8.14) 式中的 u 用 (1.8.7) 式消去，便得

$$\left(\frac{\psi^2}{2}\right)_t+(\psi\psi_{xx}-3\lambda\psi^2-2\psi_x^2)_x=C\psi^2 \tag{1.8.15}$$

将上式对 x 由 $-\infty \to \infty$ 积分，并应用规一化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx = 1$, 得 $C = 0$. 于是随时间的演化方程为

$$\psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x = 0 \tag{1.8.16}$$

在 $|x| \to \infty$ 点， $u \to 0$, 应用 (1.8.6) 式，得

$$3(u + \lambda)\psi_x \simeq 3\lambda\psi_x \simeq -3\psi_{xxx}$$

代入 (1.8.16) 式，得

$$\psi_t + 4\psi_{xxx} \simeq 0$$

$$\psi_n = C_n(t)e^{-K_n x} = C_n(0)e^{4K_n^3 t - K_n x} \tag{1.8.17}$$

对于连续谱 $\lambda = k^2$, 为保证 $\lambda_t = 0$, 仍令 $\psi R_x - \psi_x R =$ 常数, $D = 0$, 故演化方程为

$$\psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x = C\psi \tag{1.8.18}$$

连续谱的边界条件取为

$$\begin{aligned} &\psi \to e^{-ikx} + r(k,t)e^{ikx} \quad , \qquad x \to \infty \\ &\psi \to a_T(k,t)e^{-ikx} \qquad\quad , \qquad x \to -\infty \end{aligned} \tag{1.8.19}$$

上式的物理意义为，在 $x = \infty$ 处入射的振幅为 1 的平面波，经过势垒 u 反射后的反射波又回到 $x = \infty$ 处，反射系数为 $r(k,t)$, 与入射波相反的方向传播. 透过势垒的部分透射波，到达 $x = -\infty$ 处，透射系数为 $a_T(k,t)$, 且 $r^2(k,t) + a_T^2(k,t) = 1$. 将 (1.8.19) 式代入 (1.8.18) 式，并注意到当 $x \to \pm\infty, u \to 0$, 便得

$$\frac{\partial}{\partial t}a_T + 4ik^3 a_T = Ca_T \quad , \quad 当 x \to -\infty$$

当 $x \to \infty$ 时，由于

$$4ik^3 e^{-ikx} + \left(\frac{\partial}{\partial t}r - 4ik^3 r\right)e^{ikx} = C(e^{-ikx} + re^{ikx})$$

得出

$$\frac{\partial}{\partial t}r - 4ik^3 r = Cr, \qquad 4ik^3 = C \tag{1.8.20}$$

故有

$$\begin{aligned} r(k,t) &= r(k,0)e^{8ik^3 t} \\ a_T(k,t) &= a_T(k,0) \end{aligned} \tag{1.8.21}$$

(1.8.17) 式和 (1.8.21) 式给出了散射数据 $S(0)$[指 $C_n(0), K_n, r(k,0), a_T(k,0)$] 随时间的演化规律 $S(t)$[指 $(C_n(t), r(k,t), a_T(k,t)$] , 在此基础上可构造出散射函数

$$B(x+y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(k,t)e^{ik(x+y)}dk + \sum_{n=1}^{N} C_n^2(t)e^{-K_n(x+y)} \tag{1.8.22}$$

并解 GLM 方程

$$K(x,y;t) + B(x+y;t) + \int_x^{\infty} B(y+z;t)K(z,y;t)dz = 0 \tag{1.8.23}$$

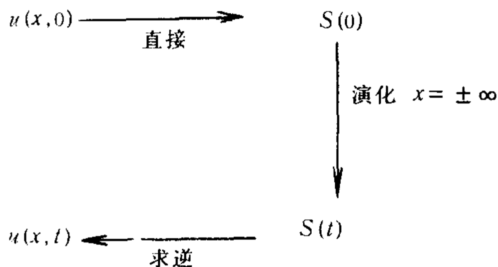


图 1.9 逆散射方法

以确定核函数 $K(x,y;t)$(参见本章附录 A). 可以证明，我们所要求的势函数 $u(x,t)$ 就是通过核函数确定的，即

$$u(x,t)=-2\frac{d}{dx}K(x,x;t) \tag{1.8.24}$$

这最后一步便是逆散射方法 (见图 1.9), 即由散射数据 $S(t)\rightarrow$ 势函数 $u(x,t)$.

对于单个孤子的情形， $N=1,r(k,0)=0$, 分立谱为 $\lambda=-K^2$ 与 $C(0)$, 可直接写出 GLM 方程

$$K(x,y;t)+C^2(0)e^{8K^3t-K(x+y)}+C^2(0)e^{8K^3t}\int_x^{\infty}e^{-K(y+z)}K(z,y;t)dz=0 \tag{1.8.25}$$

这个积分方程的核是退化的，可将 $K(x,y;t)$ 写为

$$K(x,y;t)=e^{-Ky}h(x,t) \tag{1.8.26}$$

代入 (1.8.25) 式，易于解出

$$K(x,y;t)=\frac{C^2(0)e^{8K^3t-K(x+y)}}{1+C^2(0)(2K)^{-1}e^{8K^3t-2Kx}} \tag{1.8.27}$$

$$\begin{gathered}u(x,t)=-2K^2\mathrm{sech}^2[K(x-4K^2t)-\delta]\\ \delta=2^{-1}\log\left[\frac{C^2(0)}{2K}\right]\end{gathered} \tag{1.8.28}$$

对于 N 个孤子情形，$\lambda_i=-K_i^2,i=1,2,\cdots,N,r(k,0)=0,C_i^2(0)=m_i$, GLM 方程为

$$K(x,y;t)+\sum m_ie^{8K_i^3t-K_i(x+y)}+\sum m_ie^{8K_i^3t}\int_x^{\infty}e^{-K_i(z+y)}K(z,y;t)=0 \tag{1.8.29}$$

$K(x,y;t)$ 仍可分离变量

$$K(x,y;t)=\sum e^{-K_iy}h_i(x,t) \tag{1.8.30}$$

代入 (1.8.29) 式，得

$$\left(1+\frac{m_i}{2K_i}e^{8K_i^3t-2K_ix}\right)h_i+\sum_{j\neq i}\frac{m_i}{K_i+K_j}e^{8K_i^3t-(K_i+K_j)x}h_j=-m_ie^{8K_i^3t-K_ix}$$

$$i=1,2,\cdots,N \tag{1.8.31}$$

很明显，(1.8.31) 式是关于 h_i 的联立方程组，求解并无任何困难. 这两个例子均只有分立谱，如果同时有连续谱 $r(k,0)\neq 0$, 求解就困难多了.

1.8.3 二分量孤立波方程

逆散射方法的应用，不仅限于 KdV 方程，其它如非线性 Schrödinger 方程， sine-Gordon 方程均可按此法求解. 不同的非线性方程，主要体现在不同的演化式 (1.8.17) 和

(1.8.21) 式上. 当然也不是所有的非线性方程均能用逆散射方法求解. 注意到 Schrödinger 方程为二阶的, 故谱方程及其演化方程一般地可用二分量一阶方程表示 [10~13] 为

$$\frac{\partial v}{\partial x} = Qv, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = Bv$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} -i\zeta & q \\ r & i\zeta \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -ia & -ib \\ -ic & +ia \end{pmatrix} \tag{1.8.32}$$

由 (1.8.32) 式, 得

$$\frac{\partial Qv}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(Bv) \tag{1.8.33}$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial x}\right)v = B\frac{\partial v}{\partial x} - Q\frac{\partial v}{\partial t} = (BQ - QB)v$$

即

$$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial x} = BQ - QB \tag{1.8.34}$$

将 B,Q 的定义式代入上式, 便得谱方阵 Q 与演化方阵 B 各矩阵元的如下关系:

$$\begin{aligned} a_x &= cq - br \\ b_x + 2i\zeta b &= iq_t - 2aq \\ c_x - 2i\zeta c &= ir_t + 2ar \end{aligned} \tag{1.8.35}$$

包括在 (1.8.35) 式中的非线性方程, 均能用逆散射方法求解. 下面列出熟知的各种可用逆散射方法求解的非线性方程.

(1) 取方程

$$\begin{aligned} a &= 4\zeta^3 + 2\zeta rq + irq_x - iqr_x \\ a_x &= (2\zeta r_x - ir_{xx} + 4i\zeta^2 r + 2ir^2 q)q - (-2\zeta q_x - iq_{xx} + 4i\zeta^2 q + 2irq^2)r \end{aligned} \tag{1.8.36}$$

由 (1.8.35) 式得出变形的 KdV 方程

$$\begin{aligned} q_t - 6rqq_x + q_{xxx} &= 0 \\ r_t - 6rqr_x + r_{xxx} &= 0 \end{aligned} \tag{1.8.37}$$

当 $r = -1$ 时, (1.8.37) 式过渡到 KdV 方程.

(2) 若取

$$a = -\frac{1}{4\zeta}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ \cosh\phi \end{pmatrix}, \quad r = -q = \frac{1}{2}\phi_x \tag{1.8.38}$$

则得

$$a_x = \frac{1}{4\zeta}\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \sinh\phi \end{pmatrix}\left(\frac{-\phi_x}{2}\right) - \frac{1}{4\zeta}\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \sinh\phi \end{pmatrix}\left(\frac{\phi_x}{2}\right)$$

$$\phi_{xt} = \begin{pmatrix} \sin\phi \\ \sinh\phi \end{pmatrix} \tag{1.8.39}$$

此即 sine(sinh)-Gordon 方程.

(3) 取定

$$a=\zeta^2+rq/2 \ , \ b=i\zeta q-q_x/2 \ , \ c=i\zeta r+r_x/2 \tag{1.8.40}$$

便得

$$\begin{aligned} iq_t+\frac{1}{2}q_{xx}-q^2r=0 \\ ir_t-\frac{1}{2}r_{xx}+q^2r=0 \end{aligned} \tag{1.8.41}$$

当 $r=\pm q^*$ 时，(1.8.41) 式便过渡到非线性 Schrödinger 方程.

1.8.4 直接解孤立波方程法

上面讨论的逆散射方法，是一种间接求解非线性方程的方法. 近年来对直接求解孤立波方程也有很多研究，Bäcklund 变换便是其中之一. 1883 年，几何学家 Bäcklund 得到了 sine-Gordon 方程的一个有趣的性质. 设 u' 是 sine–Gordon 方程的解

$$u'_{\xi\eta}=\sin u' \tag{1.8.42}$$

则满足方程

$$\begin{aligned} u_\xi=u'_\xi+2\beta\sin\frac{u'+u}{2} \\ u_\eta=-u'_\eta-\frac{2}{\beta}\sin\frac{u'+u}{2} \end{aligned} \tag{1.8.43}$$

的 u 也是 sine-Gordon 方程 (1.8.42) 的解. 事实上，(1.8.43) 式的第一式对 η 求偏导，应用第二式消去 $u'_{\xi\eta}$, $u'_\eta+u_\eta$, 易证 u 也是满足 sine-Gordon 方程的. 如果取定 u' 为一平凡解 $u'=0$, 则 (1.8.43) 式化为

$$u_\xi=2\beta\sin(u/2), \qquad u_\eta=\frac{2}{\beta}\sin(u/2) \tag{1.8.44}$$

从而可以直接求得 sine–Gordon 方程的孤立子解

$$u=4\tan^{-1}[\exp(\beta\xi+\beta^{-1}\eta+\alpha)] \tag{1.8.45}$$

式中，α 是一积分常数.

在一般情况下，(1.8.43) 式是不易解出来的. 但 Bianchi 在 Bäcklund 变换的基础上找到了一个在某些场合下可能有用的非线性迭加公式. 从 sine–Gordon 方程的解 u_0 出发，通过以 β_1 为参量的 Bäcklund 变换，得到解 u_1，通过以 β_2 为参量的 Bäcklund 变换，得到解 u_2, 则由 u_1, u_2 可得出新的解：

$$u_{12}=4\tan^{-1}\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{\beta_1-\beta_2}\tan\frac{u_1-u_2}{4}\right)+u_0 \tag{1.8.46}$$

证明 [14] 甚长，这里不给出. 值得指出的是，Bäcklund 变换与迭加公式，不仅 sine–Gordon 方程有，KdV 方程也有 [14].

1.9 非线性 Schrödinger 方程的逆散射解

用逆散射方法解非线性方程 (1.8.41), 采用二分量表达式 (1.8.32), 先求谱

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -ik & q \\ q^* & ik \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{1.9.1}$$

式中，q, q^* 为逆散射势. 当 $|x| \to \infty$, 散射势 $q \to 0$ 时，v 的解满足特定边界条件 [10~12]

$$\begin{aligned} \phi(x,k) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}, \qquad \text{当} x = -\infty \\ \psi(x,k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx}, \qquad \text{当} x = \infty \\ \bar{\psi}(x,k) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}, \qquad \text{当} x = \infty \end{aligned} \tag{1.9.2}$$

$\phi(x,k), \psi(x,k)$ 分别为 $x = -\infty, \infty$ 处振幅为 1 的平面波. $\bar{\psi}(x,k)$ 为 $\psi(x,k)$ 的共轭波. 满足 (1.9.1) 式并以 (1.9.2) 式为边界条件的解就可写为

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx} + \int_{-\infty}^{x} dy \begin{pmatrix} 0 & qe^{-ik(x-y)} \\ q^* e^{ik(x-y)} & 0 \end{pmatrix} \phi(y) \tag{1.9.3}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx} - \int_{x}^{\infty} dy \begin{pmatrix} 0 & qe^{-ik(x-y)} \\ q^* e^{ik(x-y)} & 0 \end{pmatrix} \psi(y) \tag{1.9.4}$$

参照 (1.8.19) 和 (1.9.2) 式，写出在 $x \to -\infty$ 处入射的平面波与反射波及透射波的关系

$$\begin{aligned} \phi &\to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx} + r(k,t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{ikx}, \qquad \text{当} x = -\infty \\ \phi &\to a(k,t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ikx}, \qquad \text{当} x = \infty \end{aligned} \tag{1.9.5}$$

注意到 (1.8.34) 式，当 B 加上对角矩阵 C 也是满足的，故 (1.8.32) 式随时间的演化关系一般地可写为

$$\frac{\partial v}{\partial t} = (B + C)v \quad , \quad C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

当 $x \to \pm\infty$ 时，$r, q \to 0$, 参照 (1.8.40) 式，得

$$B = \begin{pmatrix} -ia & \\ & ia \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -ik^2 & \\ & ik^2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \begin{pmatrix} -ik^2 + c & 0 \\ 0 & ik^2 + c \end{pmatrix} v \tag{1.9.6}$$

将 v 用 (1.9.5) 式的 ϕ 代入，得

$$\frac{\partial}{\partial t} r(k,t) = (ik^2 + c) r(k,t), \qquad (-ik^2 + c)e^{-ikx} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} a(k,t) = (-ik^2 + c) a(k,t)$$

故有

$$c = ik^2, \; r(k,t) = r(k,0) e^{i2k^2 t} \quad , \quad a(k,t) = a(k,0)$$

对于束缚态，参照 (1.8.17) 式，同样有

$$c_n(k,t)=c_n(k,0)e^{ik_n^2 t} \tag{1.9.7}$$

参照 (1.8.22) 式，便可构造出非线性 Schrödinger 方程的散射函数 (注：为方便起见，下式的 C_n 即 c_n^2)：

$$\begin{aligned}B(x+y,t)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k,t)e^{ik(x+y)}dk+\sum_{n=1}^{N}C_n e^{ik_n(x+y)}\\C_n(k,t)&=C_n(0)e^{i2k_n^2 t}\\r(k,t)&=r(k,0)e^{i2k^2 t}\end{aligned} \tag{1.9.8}$$

等式右端第一项为连续谱，第二项为分立谱. 又将 (1.9.4) 式写为

$$\psi(k,x)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}e^{ikx}+\int_x^{\infty}\begin{pmatrix}K_1(x,y)\\K_2(x,y)\end{pmatrix}e^{iky}dy \tag{1.9.9}$$

则可证明 $K_1(x,y),K_2(x,y)$ 满足如下的 GLM 方程 [1] 并可求出位势 q：

$$\begin{aligned}K_1(x,y)&=B^*(x+y,t)+\int_x^{\infty}B^*(y+z,t)K_2^*(x,z)dz\\K_2^*(x,y)&=-\int_x^{\infty}B(y+z,t)K_1(x,z)dz\end{aligned} \tag{1.9.10}$$

$$q=-2K_1(x,x) \tag{1.9.11}$$

满足方程 (1.9.9) 和 (1.9.10) 式的 $K_1(x,y),K_2(x,y)$ 为

$$\begin{aligned}K_1(x,y)&=\sum_{n=1}^{N}C_n^*\psi_{n2}^*(x)e^{-ik_n^*y}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r^*(k,t)\psi_2^*(k,x)e^{-iky}dk\\K_2(x,y)&=-\sum_{n=1}^{N}C_n^*\psi_{n1}^*(x)e^{-ik_n^*y}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r^*(k,t)\psi_1^*(k,x)e^{-iky}dk\end{aligned} \tag{1.9.12}$$

事实上，将 (1.9.8) 式代入 (1.9.10) 式，并注意到 (1.9.9) 式，便得

$$\begin{aligned}&-\int_x^{\infty}B(y+z;t)K_1(x,z)dz\\=&-\int_x^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k,t)e^{iky}e^{ikz}dk+\sum C_n e^{ik_n y}e^{ik_n z}\right\}K_1(x,z)dz\\=&-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dkr(k,t)e^{iky}\psi_1(k,x)-\sum C_n e^{ik_n y}\psi_{n1}(x)\\&=K_2^*(x,y)\end{aligned} \tag{1.9.13}$$

上式即 (1.9.10) 式的第二式. 同样可证 (1.9.10) 式的第一式也成立.

现证明 (1.9.11) 式，先由 (1.9.4) 式，得

$$\begin{aligned}\psi_1(k,x)&=-\int_x^{\infty}dyqe^{-ik(x-y)}\psi_2(k,y)\\&=-e^{-ikx}\int_x^{\infty}dyqe^{iky}\left(e^{iky}+\int_{-\infty}^{y}dy'e^{ik(y-y')}q^*\psi_1(k,y')\right)\\&=\frac{1}{2ik}e^{ikx}q+O(\frac{1}{k^2})\end{aligned} \tag{1.9.14}$$

另一方面，由 (1.9.9) 式，得

$$\psi_1(k,x) = -\frac{1}{ik}e^{ikx}K_1(x,x) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \tag{1.9.15}$$

比较 (1.9.14) 和 (1.9.15) 式，便得 (1.9.11) 式.

当散射数据给定后，散射函数 $B(x+y;t)$ 也就定了，待求的为 $K_1(x,y), K_2(x,y)$ 的展开系数 $\psi_{n1}^*(x), \psi_{n2}^*(x), \psi_1^*(k,x), \psi_2^*(k,x)$ 等. 将 (1.9.12) 式代入 (1.9.10) 式中，并比较 $e^{-ik_n y}, e^{-iky}$ 的系数，便得出 $\psi_{n1}^*(x), \psi_{n2}^*(x), \psi_1^*(k,x), \psi_2^*(k,x)$ 等的方程组. 当只存在分立谱时，方程就更为简单. 下面将 $\psi_{n1}^*(x), \psi_{n2}^*(x)$ 简写为 ψ_{n1}^*, ψ_{n2}^*. 又令 (1.9.8) 和 (1.9.12) 式中的 $r(k,t)=0$, 将得到的 $B(x+y,t), K_1(x,y), K_2(x,y)$ 等代入 (1.9.10) 式，比较 $e^{-ik_n y}$ 的系数就得

$$\begin{aligned} C_n^*\psi_{n2}^* &= C_n^* e^{-ik_n^* x} + C_n^* \int_x^\infty e^{-ik_n^* z} \sum_{n'=1}^N C_{n'}\psi_{n'1} e^{ik_{n'} z} dz \\ C_n\psi_{n1} &= C_n \int_x^\infty e^{ik_n z} \sum_{n'=1}^N C_{n'}^* \psi_{n'2}^* e^{-ik_{n'}^* z} dz \end{aligned} \tag{1.9.16}$$

即

$$\begin{aligned} \psi_{n2}^* &= e^{-ik_n^* x} + i\sum_{n'=1}^N C_{n'}\psi_{n'1} \frac{e^{-ik_n^* x}}{k_{n'}-k_n^*} e^{ik_{n'} x} \\ \psi_{n1} &= i\sum_{n'=1}^N C_{n'}^* \psi_{n'2}^* \frac{1}{k_n - k_{n'}^*} e^{-ik_{n'}^* x + ik_n x} \end{aligned} \tag{1.9.17}$$

作变换

$$\psi_{n2}^* e^{ik_n^* x} \to \psi_{n2}^* \quad , \quad \psi_{n1}^* e^{-ik_n^* x} \to \psi_{n1}^* \tag{1.9.18}$$

并令

$$\begin{aligned} \lambda_n^2 &= iC_n e^{-i2k_n x} = iC_n(0) e^{i(2k_n^2 t - 2k_n)x} \\ \lambda_n^{*2} &= iC_n^* e^{i2k_n^* x} = iC_n^*(0) e^{-i(2k_n^2 t - 2k_n)x} \end{aligned} \tag{1.9.19}$$

则 (1.9.16) 式化为

$$\begin{aligned} \psi_{n2}^* &= 1 + \sum_{n'=1}^N \frac{\lambda_{n'}^2}{k_{n'} - k_n^*}\psi_{n'1} \\ \psi_{n1} &= \sum_{n'=1}^N \frac{\lambda_{n'}^{*2}}{k_n - k_{n'}^*}\psi_{n'2}^* \end{aligned} \tag{1.9.20}$$

关于分立态系数 $C_n(0)$ 的决定，在下一节讨论.

由 (1.8.32) 式所表示的两分量的孤立波被推广到 n 分量即 n 阶孤立波理论，在文献 [13], [15] 中已经获得解决.

1.10 非线性 Schrödinger 方程逆散射解的初值问题

在逆散射解非线性方程时，我们需要知道散射数据 $r(k,t), C_n$, 以便确定散射函数 $B(x+y,t)$, 进一步解 GLM 方程. 但是如何得到这些散射数据呢？通过孤立波的初值来确定散射数据是重要途径之一. 这一节就非线性 Schrödinger 方程的初值，来求解这个问题 [16,17].

设势函数具有初值 $u(x,t=0)=A\operatorname{sech}x$, 代入 (1.8.32) 式的谱方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -i\zeta & iu \\ -iu^* & i\zeta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \tag{1.10.1}$$

由这个方程消去 v_2, 便得

$$\left(-u\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial x}-u^2-\zeta^2+i\zeta\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}\right)v_1=0 \tag{1.10.2}$$

代入 $u=A\operatorname{sech}x$, 变换变量 $s=(1-\tanh x)/2$. 根据这个变换, $x=\infty,-\infty$ 分别对应于 $s=0,1$, 而且

$$\frac{d}{dx}=-\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2x\frac{d}{ds}$$

$$\begin{aligned} -u\frac{d}{dx}\frac{1}{u}\frac{d}{dx}&=-\frac{1}{2}\operatorname{sech}^2x\tanh x\frac{d}{ds}-\frac{1}{4}\operatorname{sech}^4x\frac{d^2}{ds^2}\\ -\frac{1}{u}\frac{du}{dx}&=-\tanh x\\ \operatorname{sech}^2x&=4s(1-s)=\frac{u^2}{A^2}\end{aligned} \tag{1.10.3}$$

于是 (1.10.2) 式化为

$$\left[s(1-s)\frac{d^2}{ds^2}+(\frac{1}{2}-s)\frac{d}{ds}+A^2+\frac{\zeta^2+i\zeta(1-2s)}{4s(1-s)}\right]v_1=0 \tag{1.10.4}$$

现作进一步变换 $v_1=s^{\alpha}(1-s)^{\beta}w_1$, 上式化为超几何方程, 其解用超几何函数 $F(\alpha',\beta',\gamma';s)$ 表示为

$$\begin{aligned} v_1^{(1)}(s)&=s^{i\zeta/2}(1-s)^{-i\zeta/2}F(-A,A,i\zeta+1/2;s)\\ v_1^{(2)}(s)&=s^{1/2-i\zeta/2}(1-s)^{-i\zeta/2}F(1/2-i\zeta+A,1/2-i\zeta-A,3/2-i\zeta;s)\end{aligned} \tag{1.10.5}$$

将其中 ζ 换为 $-\zeta$, 便得出

$$\begin{aligned} v_2^{(1)}(s)&=s^{-i\zeta/2}(1-s)^{i\zeta/2}F(-A,A,-i\zeta+1/2;s)\\ v_2^{(2)}(s)&=s^{1/2+i\zeta/2}(1-s)^{i\zeta/2}F(1/2+i\zeta+A,1/2+i\zeta-A,3/2+i\zeta;s)\end{aligned} \tag{1.10.6}$$

在 (1.10.5) 和 (1.10.6) 式的基础上, 作满足边界条件 (1.9.2) 式的函数 $\psi(x,\xi)$ 及其共轭波 $\bar{\psi}(x,\xi)$

$$\psi(x,\xi)=\begin{pmatrix} A(\xi+i/2)^{-1}v_1^{(2)} \\ v_2^{(1)} \end{pmatrix},\quad \bar{\psi}(x,\xi)=\begin{pmatrix} v_2^{(1)*} \\ -A(\xi-i/2)^{-1}v_1^{(2)*} \end{pmatrix} \tag{1.10.7}$$

式中, $v_2^{(1)*},v_1^{(2)*}$ 分别为 $v_2^{(1)},v_1^{(2)}$ 的共轭复函数. $\psi,\bar{\psi}$ 为独立的, 在 $\psi,\bar{\psi}$ 的基础上, 作满足边界条件 (1.9.2) 式的 $\phi(x,\xi)$:

$$\phi(x,\xi)=a(\xi)\bar{\psi}+b(\xi)\psi \tag{1.10.8}$$

式中，$a(\xi),b(\xi)$ 分别为透射、反射参量，并满足

$$|a(\xi)|^2+|b(\xi)|^2=1 \tag{1.10.9}$$

而满足 (1.10.8) 和 (1.10.9) 式及边界条件 (1.9.2) 的 $a(\xi),b(\xi)$ 为

$$\begin{aligned} a(\xi)&=\frac{[\Gamma(-i\xi+1/2)]^2}{[\Gamma(-i\xi+A+1/2)\Gamma(-i\xi-A+1/2)]}\\ b(\xi)&=\frac{i\,[\Gamma(\xi+1/2)]^2}{[\Gamma(A)\Gamma(1-A)]}=i\frac{\sin(\pi A)}{\cosh(\pi\xi)} \end{aligned} \tag{1.10.10}$$

参照 (1.9.8) 式，$b(\xi)/a(\xi)$ 即我们定义的反射系数 $r(\xi)d\xi$(当 $a(\xi)\neq 0$)，或 $C_n=\lim\limits_{\Delta\xi\to 0}\dfrac{b(\xi_n+\Delta\xi)}{a(\xi_n+\Delta\xi)}\Delta\xi=\dfrac{b(\xi_n)}{a'(\xi_n)}$(当 $a(\xi_n)=0$). 前者为连续谱，后者为分立谱. 由 (1.10.10) 式，当 $A=N$(N 为正整数),$a(\xi)$ 的 N 个零点为

$$\xi_r=i(N-1/2),i(N-3/2),\cdots,i/2$$

又由于 $a(\xi)\to 1$(当 $\xi\to\infty$), 故极点数和零点数是一样的，且极点即零点 $\xi_r(r=1,2,\cdots N)$ 的共轭 ξ_r^*. 这样，$a(\xi)$ 可写为

$$a(\xi)=\prod_{r=1}^{N}\frac{(\xi-\xi_r)}{(\xi-\xi_r^*)} \tag{1.10.11}$$

另一方面，当 $A=N$(N 为正整数) 时，由 (1.10.10) 式可看出 $b(\xi)=0$. 这就意味着 A=N 时的连续谱为 0, 只存在分立谱. 当 $\xi=\xi_k(k=1,2,\cdots,N;\xi_k$ 为 $a(\xi)$ 的零点), 代入 $b(\xi)$ 的表示式，分子、分母取极限，即为

$$b(\xi_k)=(-1)^{k-1}i$$

$$a'(\xi_k)=\frac{1}{\xi_k-\xi_k^*}\prod_{r\neq k}\frac{\xi_k-\xi_r}{\xi_k-\xi_r^*}=\frac{1}{i(2N-2k+1)}\prod_{k\neq r}\frac{(r-k)}{(2N-k-r+1)}$$

$$\begin{aligned} \lambda_k^2 &= \frac{b(\xi_k)}{a'(\xi_k)}e^{i(2\xi_k x-2\xi_k^2 t)}\\ &= (-1)^{k-1}(2N-2k+1)\left[\prod_{r\neq k}\frac{k-r}{2N-k-r}\right]^{-1}e^{i(2\xi_k x-2\xi_k^2 t)} \end{aligned} \tag{1.10.12}$$

代入 (1.9.20) 式，求解 ψ_{n2}^*,ψ_{n1}. 代入 (1.9.12) 式，并应用关系 (1.9.11) 式，得出 $u=-2K_1(x,x)$. 应用这个方法计算了 $N=1\sim 5$ 的孤立波形与解析表达式 $u(x,t)$[17]. 图 1.10 给出 $N=1\sim 5$ 的孤立波波形，图中的参数 η 即 t.

N=1~3 的解析表达式如下：

$$\begin{aligned} &N=1:\\ &u(x,t)=e^{-i0.5t}\mathrm{sech}(x)\\ &N=2:\\ &u(x,t)=4e^{-i0.5t}[\mathrm{ch}(4x)+4\mathrm{ch}(2x)+3\cos(4t)]^{-1}[\mathrm{ch}(3x)+3e^{-i4t}\mathrm{ch}(x)] \end{aligned}$$

$N=3:$

$$
\begin{aligned}
u(x,t)= \ & 2e^{-i0.5t}[\mathrm{ch}(9x)+9\mathrm{ch}(7x)+64\mathrm{ch}(3x)+36\mathrm{ch}(x) \\
& +9\mathrm{ch}(x)\cos(8t)+20\mathrm{ch}(3x)\cos(12t)+36\mathrm{ch}(5x)\cos(4t)]^{-1} \\
& \times[3\mathrm{ch}(8x)+24e^{-i4t}\mathrm{ch}(6x)+54e^{-i4t}\mathrm{ch}(4x)+30e^{-i12t}\mathrm{ch}(4x) \\
& +12e^{-i12t}\mathrm{ch}(2x)+48\mathrm{ch}(12x)+60e^{-i4t}\cos(4t)+15\cos(8t)+30e^{-i8t}]
\end{aligned}
\tag{1.10.13}
$$

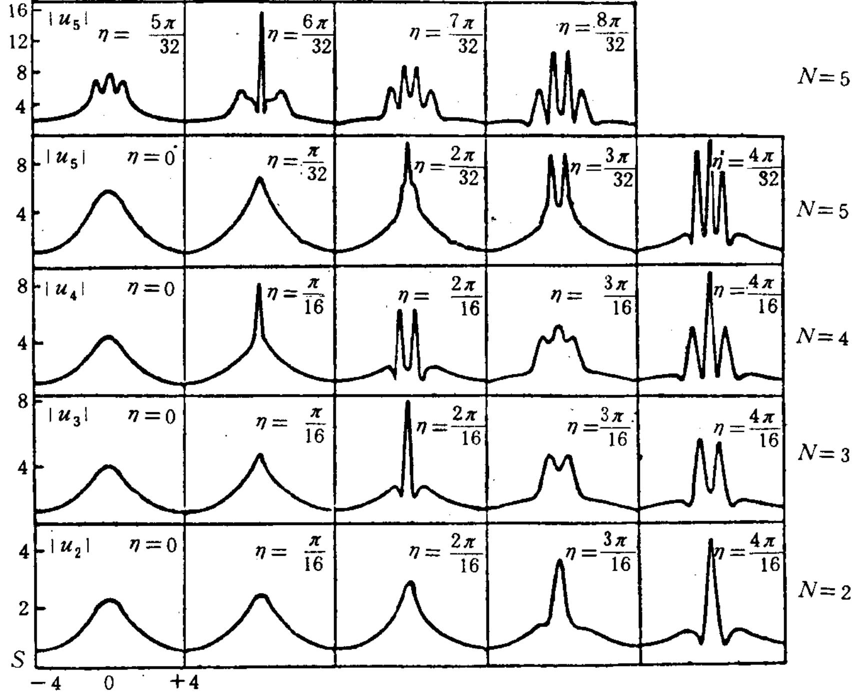


图 1.10　$N=1\sim5$ 的孤立波波形

(取自谭微思文献 [17])

图中每一波形横坐标 x 的变化范围为 $(-4,4)$, 纵坐标 $|u_i|(i=2,3,4,5)$. 参数 η 即时间 t,$0\leq\eta\leq\pi/4$. 由图看出，孤立波的传播过程是由起始端 $(\eta=0)$ 的 sech 波形逐渐分裂为一个类峰、两个尖峰 $\cdots$, 在 $\eta=\pi/4$ 时，为 $N-1$ 个尖峰. 然后又在 $\eta=\pi/4\sim\pi/2$, 经过相反顺序，合并为 sech 波，完成一个周期，然后再分裂，再合并.

1.11　周期的孤立波解的初期问题

上节求得的非线性 Schrödinger 解，其边值在 $|x|\to\infty$ 处给出. 如用来描述在一谐振腔内孤立波的产生与传播，只有当腔长 $L\gg$ 孤立波的宽度，且孤立波远离腔面的情形，上节结果才适用. 对有限腔长 L, 将上节的解推广到具有空间周期 L, 边值在腔面给出是完全必要的. 仍从标准的非线性 Schrödinger 方程出发，有

$$
iu_t=\frac{1}{2}u_{xx}+|u|^2u \tag{1.11.1}
$$

并设 $u=e^{-i\frac{A^2}{2}t}\rho(x)$, 代入上式，得

$$\rho_{xx} - A^2\rho + 2\rho^3 = 0 \tag{1.11.2}$$

用 $2\rho_x$ 乘上式并积分，便得

$$\rho_x^2 - A^2\rho^2 + \rho^4 - C = 0 \tag{1.11.3}$$

由此得

$$x = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{C + A^2\rho^2 - \rho^4}} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(b^2 - \rho^2)}} \tag{1.11.4}$$

式中

$$a^2 = \frac{A^2}{2} - \sqrt{C + (A^2/2)^2}, \qquad b^2 = \frac{A^2}{2} + \sqrt{C + (A^2/2)^2} \tag{1.11.5}$$

作变换 $\rho = b\tilde{\rho}$, $bx = \xi$, $a^2/b^2 \to a^2$, 则 (1.11.4) 式为

$$\xi = \int_1^{\tilde{\rho}} \frac{d\tilde{\rho}}{\sqrt{(1 - \tilde{\rho}^2)(\tilde{\rho}^2 - a^2)}} \tag{1.11.6}$$

在得出上式时取定 (1.11.4) 式的 $\rho_0 = b$. 当 $C \to 0, a \to 0$ 时，令 $\tilde{\rho} = \sin\phi$, 积分 (1.11.6) 式 [18] 为

$$\xi = \int_{\pi/2}^{\phi} \frac{d\phi}{\sin\phi} = \ln\left(\tan\frac{\phi}{2}\right) \tag{1.11.7}$$

由 (1.11.7) 式，得

$$\tan(\phi/2) = e^{\xi}$$

$$\tilde{\rho} = \sin\phi = \frac{2e^{\xi}}{1 + e^{2\xi}} = \text{sech}\xi \tag{1.11.8}$$

即
$$\rho = b\text{sech}(bx)$$

(1.11.18) 式即通常的周期为 ∞ 的孤立波解. 一般的 $C \neq 0$, 其解 (1.11.6) 可表示为 Jacobi 椭圆函数 [19]. 取 $a^2 = 1 - 1/k^2$, 并将 (1.11.6) 式写为

$$\frac{\xi}{k} = \int_1^{\tilde{\rho}} \frac{d\tilde{\rho}}{\sqrt{(1 - \tilde{\rho}^2)(k^2\tilde{\rho}^2 - k^2 + 1)}} \tag{1.11.9}$$

则 $\tilde{\rho} = \text{cn}(\xi/k), \rho = b\text{cn}(bx/k)$, 为简单起见，将 bx 记为 x, 则 $\rho = b\text{cn}(x/k)$. 当 $a \to 0, k \to 1$ 时，有

$$\text{sn}\, x \to \tanh x \quad , \quad \text{cn}\, x \to \text{sech}\, x \quad , \quad \text{dn}\, x \to \text{sech}\, x \tag{1.11.10}$$

令

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= ue^{-i2\int\zeta dx}, \qquad & \tilde{u}^* &= ue^{i2\int\zeta dx} \\ \tilde{v}_1 &= v_1 e^{-i\int\zeta dx}, \qquad & \tilde{v}_2 &= v_2 e^{i\int\zeta dx} \end{aligned} \tag{1.11.11}$$

则 (1.10.1) 式可化简为

$$i\frac{\partial}{\partial x}\tilde{v}_1 + \tilde{u}\tilde{v}_2 = 0, \ i\frac{\partial}{\partial x}\tilde{v}_2 + \tilde{u}^*\tilde{v}_1 = 0 \tag{1.11.12}$$

于是有

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{v}_1 + i\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}\tilde{v}_2) = 0 \tag{1.11.13}$$

式中

$$
\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{u}\tilde{v}_2) &= \tilde{u}(-\tilde{u}^*\tilde{v}_1)+i\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\left(\frac{-1}{\tilde{u}}i\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial x}\right) \\
&= -u^2\tilde{v}_1+\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}-i2\zeta\right)\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{1.11.14}
$$

代入 (1.11.13) 式，得

$$
-u\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{u}\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial x}-u^2\tilde{v}_1-i2\zeta\frac{\partial\tilde{v}_1}{\partial x}=0 \tag{1.11.15}
$$

现取

$$
u(x,0)=A\ \mathrm{cn}(x/k)\quad,\quad s=\frac{1}{2}(1-k\ \mathrm{sn}(x/k)) \tag{1.11.16}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx} &= -\frac{1}{2}\mathrm{cn}\left(\frac{x}{k}\right)\mathrm{dn}\left(\frac{x}{k}\right)\frac{d}{ds} \\
u\frac{d}{dx}\frac{1}{u}\frac{d}{dx} &= \frac{1}{4}\mathrm{cn}^2\left(\frac{x}{k}\right)\mathrm{dn}^2\left(\frac{x}{k}\right)\frac{d^2}{ds^2}+\frac{k}{2}\mathrm{sn}\left(\frac{x}{k}\right)\mathrm{cn}^2\left(\frac{x}{k}\right)\frac{d}{ds}
\end{aligned}
\tag{1.11.17}
$$

将 (1.11.17) 式代入 (1.11.15) 式，便得

$$
\left[s(1-s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\left(\frac{1}{2}-s\right)\frac{d}{ds}-i\zeta\frac{\mathrm{dn}(x/k)}{\mathrm{cn}(x/k)}\frac{d}{ds}+A^2\right]\tilde{v}_1=0 \tag{1.11.18}
$$

由 (1.11.18) 式明显看出，当 (1.10.1) 式中的 ζ 取为 $\bar{\zeta}\dfrac{\mathrm{cn}(x/k)}{\mathrm{dn}(x/k)}$(其中 $\bar{\zeta}$ 为常数),(1.11.18) 式便具有非周期孤立波满足的超几何方程同样的形式：

$$
\left[s(1-s)\frac{\partial^2}{\partial s^2}+\left(\frac{1}{2}-i\bar{\zeta}-s\right)\frac{d}{ds}+A^2\right]\tilde{v}_1=0 \tag{1.11.19}
$$

与超几何方程

$$
\left\{s(1-s)\frac{d^2}{ds^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)s]\frac{d}{ds}-\alpha\beta\right\}F(\alpha,\beta,\gamma;s)=0 \tag{1.11.20}
$$

比较，得

$$
\alpha=-A\ ,\ \beta=A\ ,\ \gamma=1/2-i\bar{\zeta} \tag{1.11.21}
$$

$$
\tilde{v}_1^{(1)}=F(-A,A,1/2+i\bar{\zeta};s) \tag{1.11.22}
$$

$$
\tilde{v}_1^{(2)}=s^{1/2+i\bar{\zeta}}F(A+1/2+i\bar{\zeta},A+1/2+i\bar{\zeta},3/2+i\bar{\zeta};s) \tag{1.11.23}
$$

将 ζ 取为 $\bar{\zeta}\dfrac{\mathrm{cn}}{\mathrm{dn}}$, 这表明在周期孤立波情形，其边值不再用平面波 ($\zeta=$ 常数) 来描述，而应改为准平面波 $\zeta=\bar{\zeta}\mathrm{cn}/\mathrm{dn}$, 波矢 ζ 不是常数，而是空间坐标 x 的椭圆函数. 参照文献 [20], 得

$$
\begin{aligned}
\exp\left(i\int\zeta dx\right) &= \exp\left(i\bar{\zeta}\int\frac{\mathrm{cn}(x/k)}{\mathrm{dn}(x/k)}dx\right)=\exp\left(i\bar{\zeta}k\int\frac{\mathrm{cn}(x/k)}{\mathrm{dn}(x/k)}dx/k\right) \\
&= \exp\left[i\bar{\zeta}k\ln\left(\frac{1+k\mathrm{sn}(x/k)}{1-k\mathrm{sn}(x/k)}\right)\right]=\left(\frac{1+k\mathrm{sn}(x/k)}{1-k\mathrm{sn}(x/k)}\right)^{i\bar{\zeta}/k}
\end{aligned}
\tag{1.11.24}
$$

当 $a\to 0$, 即 $k\to 1$ 时，$\mathrm{sn}(x/k)\to\tanh(x/k)$. 上式过渡到 $e^{i\bar{\zeta}x}$, 即“准平面波”过渡到“平面波”，而 $s=\dfrac{1}{2}[1-k\mathrm{sn}(x/k)]\to s=\dfrac{1}{2}(1-\tanh x)$, 此即 (1.10.3) 式的 $\mathrm{sech}^2x=4s(1-s)$.

上面我们求解了非线性 Schrödinger 方程周期解的初值问题，用同样的方法也可求解 KdV 方程周期解的初值问题. 首先是非周期解，参照 (1.8.32) 和 (1.8.37) 式将 KdV 方程的谱方程用分量

$$i\frac{\partial v_1}{\partial x}-iqv_2=\zeta v_1,\ i\frac{\partial v_2}{\partial x}-iv_1=-\zeta v_2 \tag{1.11.25}$$

来表示，即

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\zeta\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\zeta\right)v_2=qv_2 \tag{1.11.26}$$

令 $v_2=\tilde{v}_2e^{i\int\zeta dx}$, 则上式可写为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2i\zeta\frac{\partial}{\partial x}-q\right)\tilde{v}_2=0 \tag{1.11.27}$$

令初值 $q(x,0)$ 及 s 为

$$q(x,0)=A^2\mathrm{sech}^2x\quad,\quad s=\frac{1}{2}(1-\tanh x) \tag{1.11.28}$$

则

$$\frac{\partial}{\partial x}=-\frac{1}{2}\mathrm{sech}^2x\frac{d}{ds} \tag{1.11.29}$$

代入 $\tilde{v}_2$ 满足的方程，得

$$\{s(1-s)\frac{d^2}{ds^2}+(1-2s-i\zeta)\frac{d}{ds}-A^2\}\tilde{v}_2=0 \tag{1.11.30}$$

解出 $\tilde{v}_2$ 为

$$\begin{aligned}v_2^{(1)}&=F(1/2+\sqrt{1/4-A^2},1/2-\sqrt{1/4-A^2},1-i\zeta;s)\\ v_2^{(2)}&=F(1/2-\sqrt{1/4-A^2}+i\zeta,1/2+\sqrt{1/4-A^2},1+i\zeta;s)\end{aligned} \tag{1.11.31}$$

现讨论边值取在 x 为有限的周期的孤立波解. 参照 (1.11.18) 和 (1.11.28) 式，取定初值与 s 为

$$q(x,0)=A^2\mathrm{cn}^2(\frac{x}{k})\qquad s=\frac{1}{2}[1-k\mathrm{sn}(\frac{x}{k})] \tag{1.11.32}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=-\frac{1}{2}\mathrm{cn}(\frac{x}{k})\mathrm{dn}(\frac{x}{k})\frac{d}{ds}\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}&=\frac{1}{4}\mathrm{cn}^2(\frac{x}{k})\mathrm{dn}^2(\frac{x}{k})\frac{d^2}{ds^2}+\frac{1}{2k}[2k^2\mathrm{cn}^2(\frac{x}{k})-k^2+1]\mathrm{sn}(\frac{x}{k})\frac{d}{ds}\end{aligned} \tag{1.11.33}$$

代入 (1.11.32) 式，得

$$\{s(1-s)\frac{d^2}{ds^2}+(1-2s)\frac{d}{ds}+\left(\frac{(k^2-1)\mathrm{sn}(x/k)}{2\mathrm{cn}^2(x/k)}-i\zeta\frac{\mathrm{dn}(x/k)}{\mathrm{cn}(x/k)}\right)\frac{d}{ds}-A^2\}\tilde{v}_2=0 \tag{1.11.34}$$

令

$$\zeta=\bar{\zeta}\frac{\mathrm{cn}(x/k)}{\mathrm{dn}(x/k)}-i\frac{k^2-1}{2}\frac{\mathrm{sn}(x/k)}{\mathrm{cn}(x/k)\mathrm{dn}(x/k)} \tag{1.11.35}$$



便得

$$\left[s(1-s)\frac{d^2}{ds^2}+(1-2s-i\bar{\zeta})\frac{d}{ds}-A^2\right]\tilde{v}_2=0 \tag{1.11.36}$$

(1.11.36) 式与 (1.11.30) 式同，其解即 (1.11.31) 式. 但 s 是通过 (1.11.32) 式来定义的，而且是由下式：

$$\begin{aligned}\exp\left(i\int\zeta dx\right) &= \exp\left\{i\bar{\zeta}\int\frac{\text{cn}(x/k)}{\text{dn}(x/k)}dx-\frac{k^2-1}{2}\int\frac{\text{sn}(x/k)}{\text{cn}(x/k)\text{dn}(x/k)}dx\right\}\\ &= \exp\left\{i\bar{\zeta}\frac{1}{2}\ln\frac{1+k\text{sn}(x/k)}{1-k\text{sn}(x/k)}+\frac{1}{2}\ln\frac{\text{dn}(x/k)}{\text{cn}(x/k)}\right\}\\ &= \left(\frac{\text{dn}(x/k)}{\text{cn}(x/k)}\right)^{1/2}\left(\frac{1+k\text{sn}(x/k)}{1-k\text{sn}(x/k)}\right)^{i\bar{\zeta}/2}\end{aligned} \tag{1.11.37}$$

表示的"准平面波". 当 $a\to 0, k\to 1$ 时， $\exp\left(i\int\zeta dx\right)\to\left(\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x}\right)^{i\zeta/2}=e^{i\zeta x}$. 为了看清楚，当 $k\to 1$ 时， $\text{cn}\,x,\text{sn}\,x\to\text{sech}\,x$. 现 $\text{cn}\,x,\text{dn}\,x,\text{sech}\,x$ 的级数展开如下：

$$\begin{aligned}\text{cn}\,x &= 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1+4k^2}{4!}x^4-\frac{1+44k^2+16k^4}{6!}x^6+\cdots\\ \text{dn}\,x &= 1-\frac{k^2}{2!}x^2+\frac{k^2(4+k^2)}{4!}x^4-\frac{k^2(16+44k^2+k^4)}{6!}x^6+\cdots\\ \text{sech}\,x &= 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{24}x^4-\frac{61}{720}x^6+\cdots\end{aligned} \tag{1.11.38}$$

最后关于周期的孤立波解还要补充一点，即关于谱不变及散射数据的演化是利用了 $|x|\to\infty, u\to 0$ 这个条件的. 若将谐振腔的腔面选择为 $\text{cn}(x/k)$ 的驻波波节，即 $\text{cn}(x/k)\,|_{x=L_1,L_2}=0$, 则由 (1.11.20) 和 (1.11.32) 式，条件 $u\to 0$ (或 $q\to 0$) 仍然成立，故谱不变及演化在周期孤立波解情形也成立. 图 1.11 为 sn$x$, cn$x$, dn$x$ 随 x 的变化曲线.

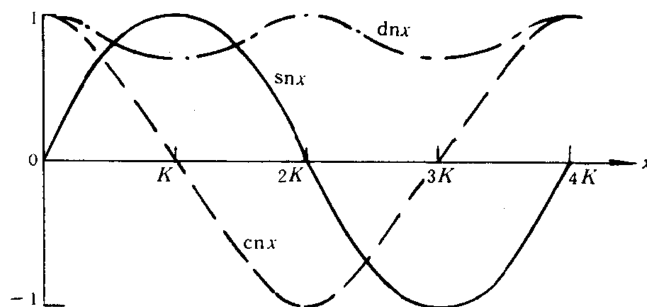


图 1.11 椭圆函数 sn$x$, cn$x$, dn$x$ 曲线 ($m=1/2$)

(参照文献 [18])

附录 A GLM 方程的证明

可以证明，由下式定义的两个独立解：

$$\begin{aligned}\psi^+(x,k) &= e^{ikx}-\int_x^\infty\frac{\sin k(x-s)}{k}u(s)\psi^+(s,k)ds\\ \psi^-(x,k) &= e^{-ikx}-\int_x^\infty\frac{\sin k(x-s)}{k}u(s)\psi^-(s,k)ds\end{aligned} \tag{A1}$$

满足 Schrödinger 方程

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+u\psi=\lambda\psi,\qquad \lambda=k^2 \tag{A2}$$

而且当 $x\to\infty$ 时

$$\begin{pmatrix}\psi^+(x,k)\\ \psi^-(x,k)\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}e^{ikx}\\ e^{-ikx}\end{pmatrix} \tag{A3}$$

式中，$e^{\pm ikx}$ 为 $u\to 0$ 时的平面波解，$\psi^{\pm}(x,k)$ 为 $u\neq 0$ 时的解，也称之为 Jost 解. 一个很明显的问题是，能否将 $\psi^{\pm}$ 与 $e^{\pm ikx}$ 用某种积分变换关联起来. 下面讨论 ψ^+(对 ψ^- 的讨论类似).

设

$$\psi^+(x,k)=e^{ikx}+\int_x^{\infty}K(x,s)e^{iks}ds \tag{A4}$$

或

$$\bar{\psi}^+(x,k)=\psi^+(x,k)e^{-ikx}=1+\int_x^{\infty}K(x,s)e^{ik(s-x)}ds \tag{A5}$$

令 $s-x=2y,\quad s\geq x,\quad y\geq 0$, 则

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^+(x,k)&=1+\int_0^{\infty}2K(x,x+2y)e^{i2ky}dy\\ &=1+\int_0^{\infty}D(x,y)e^{i2ky}dy\end{aligned} \tag{A6}$$

$$D(x,y)=2K(x,x+2y)$$

另一方面，由 (A1) 式得

$$\bar{\psi}^-(x,k)=1-\int_x^{\infty}\frac{1-e^{-i2k(x-s)}}{2ik}u(s)\bar{\psi}^+(s,k)ds \tag{A7}$$

将 (A6) 式代入 (A7) 式，得

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}B(x,y)e^{i2ky}dy=&\int_x^{\infty}\frac{e^{i2k(s-x)}-1}{2ik}u(s)ds\\ &+\int_x^{\infty}\frac{e^{i2k(s-x)}-1}{2ik}u(s)ds\int_0^{\infty}D(s,z)e^{i2kz}dz\\ =&\ J_1+J_2\end{aligned} \tag{A8}$$

注意到 $\dfrac{e^{i2k(s-x)}-1}{2ik}=\displaystyle\int_0^{s-x}e^{i2ky}dy$, 并变换积分次序

$$J_1=\int_x^{\infty}ds\int_0^{s-x}dye^{i2ky}u(s)=\int_0^{\infty}e^{i2ky}dy\int_{x+y}^{\infty}u(s)ds \tag{A9}$$

$$\begin{aligned}J_2&=\int_0^{\infty}dz\int_x^{\infty}ds\int_z^{s-x+z}e^{i2ky}u(s)D(s,z)dy\\ &=\int_0^{\infty}dz\int_z^{\infty}dy\int_{y+x-z}^{\infty}dsu(s)\bar{D}(s,z)e^{i2ky}\\ &=\int_0^{\infty}e^{i2ky}dy\int_0^{y}dz\int_{x+y-z}^{\infty}dsu(s)D(s,z)\end{aligned} \tag{A10}$$

由 Fourier 变换的唯一性，得

$$D(x,y)=\int_{x+y}^{\infty}u(s)ds+\int_{0}^{y}dz\int_{x+y-z}^{\infty}u(s)D(s,z)ds \tag{A11}$$

即

$$D(x,0)=\int_{x}^{\infty}u(s)ds$$

$$u(x)=-\frac{d}{dx}D(x,0)=-2\frac{d}{dx}K(x,x) \tag{A12}$$

现在的问题是应怎样取定 (A4) 和 (A5) 式中的 $K(x,y)$, 才能得出 GLM 方程. 事实上，按公式

$$K(x,y)=-\sum_{n=1}^{N}C_n^2\psi_n^+(x)e^{-K_ny}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k)\psi^+(x,k)e^{iky}dk \tag{A13}$$

取定 $K(x,y)$ 时，便能得出 GLM 方程. 由 $B(x+y,t)$ 的定义式 (1.8.22) 及 (A13),(A14) 式，得

$$\begin{aligned}
&\int_{x}^{\infty}B(y+z,0)K(x,z)dz\\
=\;&\sum C_n^2e^{-K_ny}\int_{x}^{\infty}K(x,z)e^{-K_nz}dz+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k)dke^{iky}\int_{x}^{\infty}K(x,z)e^{ikz}dz\\
=\;&\sum C_n^2e^{-K_ny}[\psi_n^+(x)-e^{-K_nx}]+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k)e^{iky}[\psi^+(x,k)-e^{ikx}]dk\\
=\;&-K(x,y)-B(x+y,0),\qquad y>x
\end{aligned} \tag{A14}$$

(A14) 即 GLM 方程，注意在得出 (A14) 式中已用了 (A4) 式

$$\int_{x}^{\infty}K(x,z)e^{-K_nz}dz=\psi_n^+(x)-e^{-K_nx}$$
$$\int_{x}^{\infty}K(x,z)e^{ikz}dz=\psi^+(x,k)-e^{ikx}$$

及 (A13) 式

$$\sum_{n=1}^{N}C_n^2e^{-K_ny}\psi_n^+(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}r(k)e^{iky}\psi^+(x,k)dk=-K(x,y)$$

故是自洽的.

第二章 光与非线性介质相互作用的经典与量子理论

光波在非线性介质中的传播、通过非线性介质的波波相互作用及非线性介质极化率的计算，均属非线性光学研究的重要内容 [1~3]. 本章，首先讨论在给定非线性极化率情况下的波波耦合问题，着重讨论三波耦合及四波耦合，其中涉及到了很多我们所关心的非线性光学现象，理论基础是 Maxwell 方程，属经典理论；然后讨论非线性介质的极化率计算，理论基础是 Maxwell 方程与 Schrödinger 方程，属半经典理论；接着简要讨论粒子表象、场的量子化规则、 Berry 位相及自离化态等，为以后作理论准备.

2.1 非线性相互作用的经典理论

2.1.1 电磁波在非线性介质中的传播

电磁波传播所满足的 Maxwell 方程为

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{D}=4\pi\rho\\
&\nabla\cdot\vec{B}=0\\
&\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&\nabla\times\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\vec{J}
\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

式中， ρ 为自由电荷密度， $\vec{J}$ 为自由电流密度， $\vec{E}$ 为电场强度， $\vec{H}$ 为磁场强度， $\vec{B}$ 为磁感应强度， $\vec{D}$ 为电位移. Maxwell 方程组是描述电磁波在介质，包括非线性介质中传播和相互作用的基础. 在非线性光学介质中通常遇到的情形是自由电荷密度 ρ, 自由电流密度 $\vec{J}$ 均为 0, 而且介质是非磁性的， $\vec{B}=\vec{H}$. 电位移 $\vec{D}$ 可通过电场强度 $\vec{E}$ 与极化矢量 $\vec{P}$ 表示出来，故有

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{D}=\nabla\cdot\vec{H}=0\\
&\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\
&\nabla\times\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}
\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

$$\vec{D}=\vec{E}+4\pi\vec{P}\tag{2.1.3}$$

非线性光学介质的性质，主要从 (2.1.3) 式中的极化矢量 $\vec{P}$ 体现出来. 如果略去 $\vec{P}$, 亦即略去感生极化对电磁波传播的影响，便得真空中的传播方程

$$\begin{aligned}
&\nabla\times\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\\
&\nabla\times\vec{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}\tag{2.1.4}$$

或者用二分量表示 $\vec{u}=\begin{pmatrix}\vec{E}\\ \vec{H}\end{pmatrix}$, 则 (2.1.4) 式可写为

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla\times \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = 0 \tag{2.1.5}$$

这可看作是前面讨论过的二分量线性波的传播方程 (1.2.8) 式和 (1.2.9) 式的二分量矢量波的自然推广. 由此易于得出 $\vec{u}$ 的二阶波动方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \nabla\times\nabla\times \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} \tag{2.1.6}$$

如果考虑到极化矢量 $\vec{P}$ 的影响，则 (2.1.5) 和 (2.1.6) 式应写为

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla\times \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} \vec{P} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.7}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \nabla\times\nabla\times \begin{pmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{pmatrix} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix} \vec{P} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1.8}$$

从波动方程 (2.1.8) 来看，$\vec{P}$ 并不影响 $\vec{H}$ 分量的传播 (这与我们假定介质为非磁性的有关), 仅影响 $\vec{E}$ 分量的传播，故只需考虑 $\vec{E}$ 分量的含非线性耦合项 $\vec{P}$ 的传播方程即可得

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{P} \tag{2.1.9}$$

现将极化强度 $\vec{P}$ 写成线性部分 $\vec{P}^{(1)}(\propto \vec{E})$ 与非线性部分 $\vec{P}^{NL}$ 之和，并令

$$\vec{E} + 4\pi\vec{P}^{(1)} = \breve{\epsilon}\cdot\vec{E} \tag{2.1.10}$$

式中，$\breve{\epsilon}$ 为并矢. 如果媒质为各向同性的，则 $\breve{\epsilon}$ 可写为标量 ϵ,(2.1.10) 式可用下式代替：

$$\vec{E} + 4\pi\vec{P}^{(1)} = \epsilon\vec{E} \tag{2.1.11}$$

于是 (2.1.9) 式可写为

$$\nabla\times\nabla\times\vec{E} + \frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{P}^{NL} \tag{2.1.12}$$

式子右边为波动方程的驱动项，亦即介质对场响应的非线性部分，而线性部分已包括在左边电介质系数 ϵ 中了，$\epsilon=n^2, n = n' + in''$. 而 $n', \alpha = 2n''\omega/c$ 分别为波在介质中传播的折射率与吸收系数. 一般来说，电介函数 ϵ 是场 $E(\vec{r},t)$ 的振动频率的函数. 故 (2.1.11),(2.1.12) 式中的 ϵ 应理解为作用于振动 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 的算子 $\epsilon(i\frac{\partial}{\partial t})$, 若 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 可表示为主振动 $e^{-i\omega t}$ 与慢变振幅 $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r},t)$ 之积，即 $\vec{E}(r,t) = \vec{\mathcal{E}}(r,t)e^{-i\omega t}$, 则有 $\epsilon(i\frac{\partial}{\partial t})\vec{E}(\vec{r},t) \simeq \epsilon(\omega)\vec{E}(\vec{r},t)$. 由于 $\nabla\times\nabla\times\vec{E} = \nabla(\nabla\cdot\vec{E}) - \nabla^2\vec{E}$, 对于各向同性介质，$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{\epsilon}\nabla\cdot\vec{D} = 0$, 在一般情形，前一项 $\nabla(\nabla\cdot\vec{E})$ 的贡献是很小的，可以略去. 于是 (2.1.12) 式可写为

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{P}^{NL} \tag{2.1.13}$$

为便于表现波波相互作用，将波动方程 (2.1.13) 按波数 k_n 、频率 ω_n 作慢变振幅展开：

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \sum\nolimits_n' \vec{E}_n e^{-i\omega_n t} + c.c \\
&= \sum\nolimits_n' \vec{A}_n(\vec{r},t) e^{-i(\omega_n t - \vec{k}_n\cdot\vec{r})} + c.c
\end{aligned}
\tag{2.1.14}
$$

上式中 $\sum'$ 上的一撇表示只对正频求和；没有一撇表示对正、负频求和．而

$$
\vec{P}^{NL} = \sum_n \vec{P}_n(\vec{r},t) e^{-i\omega_n t} \tag{2.1.15}
$$

$$
-k_n^2 + \frac{\epsilon(\omega_n)}{c^2}\omega_n^2 = 0 \tag{2.1.16}
$$

注意因子 $\exp[-i(\omega_n t - \vec{k}_n\cdot\vec{r})]$ 虽代表平面波，但 $\vec{A}_n(\vec{r},t)$ 为 $(\vec{r},t)$ 的慢变函数，$\vec{P}_n(\vec{r},t)$ 为 t 的慢变函数，故 $\vec{E},\vec{P}$ 展开的每一项均可偏离于平面波．将 (2.1.14) 和 (2.1.15) 式代入 (2.1.13) 式，并注意到色散关系 (2.1.16) 式及慢变近似 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}A_n \simeq 0$, $\nabla^2 A_n \simeq 0$, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{P}_n \simeq 0$, $\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}_n \simeq 0$ 等，得

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}_n + v_n \frac{\vec{k}_n}{k_n}\cdot\nabla\vec{A}_n\right) e^{-i\vec{k_n}\cdot\vec{r}} = \frac{i2\pi\omega_n}{\epsilon(\omega_n)}\vec{P}_n(\omega_n) \\
v_n = \frac{c}{\sqrt{\epsilon(\omega_n)}}
\end{gathered}
\tag{2.1.17}
$$

非线性极化 $\vec{P}^{NL}$ 的展开可写为

$$
\vec{P}_n = \vec{P}_n^{(2)} + \vec{P}_n^{(3)} + \cdots \tag{2.1.18}
$$

$\vec{P}_n^{(2)},\vec{P}_n^{(3)},\cdots$ 分别为二波，三波，$\cdots$ 展开项，其分量 ($\vec{E}_n,\vec{P}_n^{(2)},\vec{P}_n^{(3)},\cdots$ 均依赖于 $\vec{r}$, 下面为书写方便，不写出与 $\vec{r}$ 的依赖关系) 为

$$
\begin{aligned}
P_{ni}^{(2)}(\omega_n = \omega_p + \omega_q) &= \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p + \omega_q, \omega_p, \omega_q) E_j(\omega_p) E_k(\omega_q) \\
P_{ni}^{(3)}(\omega_n = \omega_p + \omega_q + \omega_r) &= \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_p + \omega_q + \omega_r) E_j(\omega_p) E_k(\omega_q) E_l(\omega_r)
\end{aligned}
\tag{2.1.19}
$$

注意 (2.1.17) 式中 A_i 也可以是其共轭项 A_i^*, 相应地 $(\omega_i,\vec{k}_i)$ 用 $(-\omega_i,-\vec{k}_i)$ 来代替，A_j，A_k 也是这样．(2.1.19) 式中的极化率张量 $\chi_{ijk}^{(2)}$，$\chi_{ijkl}^{(3)}$ 是唯象引进的，如何在量子力学微扰论的基础上计算这些张量，下一章要讨论．

2.1.2 极化率张量的对称性

这节我们主要讨论二阶极化张量，向三阶或更高阶极化张量推广是容易的．二阶极化张量与场的各分量间的关系为

$$
P_i^{(2)}(\omega_p + \omega_q) = \sum_{jk} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p + \omega_q, \omega_p, \omega_q) E_j(\omega_p) E_k(\omega_q) \tag{2.1.20}
$$

二阶极化张量是描述三波相互作用的，包括和频、倍频、差频及参量放大等过程．当三个波的频率 ω_1，ω_2，ω_3 给定后，通过 ω_1, ω_2，ω_3 的重排，有 $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1,\omega_2,\omega_3)$, $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_1,\omega_3,\omega_2)$, $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_2,\omega_1,\omega_3)$, $\cdots$ 等六个分量，又通过 i,j,k 的重排列，有 $3^3 = 27$ 个分量，还有 $\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_1,-\omega_2,-\omega_3),\cdots$ 等，又增加一倍，故共有 $6\times 3^3\times 2 = 324$ 个分量，但并非所有的这些分量都是独立的．考虑到极化强度 P_i 及场强 E_j 均为实函数，要求

$$
\begin{aligned}
P_i(-\omega_p-\omega_q)&=P_i^*(\omega_p+\omega_q)\\
E_j(-\omega_p)=E_j^*(\omega_p)\quad,&\quad E_k(-\omega_q)=E_k^*(\omega_q)
\end{aligned}
\tag{2.1.21}
$$

由 (2.1.20) 和 (2.1.21) 式易于看出

$$
\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p+\omega_q,\omega_p,\omega_q)=\chi_{ijk}^{(2)*}(-\omega_p-\omega_q,-\omega_p,-\omega_q) \tag{2.1.22}
$$

再注意到将 (2.1.20) 式中的 $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p+\omega_q,\omega_p,\omega_q)E_j(\omega_p)E_k(\omega_q)$ 可写成 $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p+\omega_q,\omega_p,\omega_q)$ $E_k(\omega_q)$ $E_j(\omega_p)$ 形式，对 $P^{(2)}(\omega_p+\omega_q)$ 的贡献应是一样的，应有

$$
\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p+\omega_q,\omega_p,\omega_q)=\chi_{ikj}^{(2)}(\omega_q+\omega_p,\omega_q,\omega_p) \tag{2.1.23}
$$

而且对无损介质来说，极化率张量 $\chi_{ijk}^{(2)}$ 应是实数，各种频率重排后，相应的指标 (i,j,k) 也随之重排，极化张量的值不变，即

$$
\begin{aligned}
\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3=\omega_1+\omega_2)&=\chi_{jki}^{(2)}(-\omega_1=\omega_2-\omega_3)\\
\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3=\omega_1+\omega_2)&=\chi_{jki}^{(2)}(\omega_1=-\omega_2+\omega_3)\\
\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3=\omega_1+\omega_2)&=\chi_{kij}^{(2)}(\omega_2=\omega_3-\omega_1)
\end{aligned}
\tag{2.1.24}
$$

更进一步有

$$
\begin{aligned}
&\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3=\omega_1+\omega_2)=\chi_{jki}^{(2)}(\omega_3=\omega_1+\omega_2)=\chi_{kij}^{(2)}(\omega_3=\omega_1+\omega_2)\\
&=\chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3=\omega_1+\omega_2)=\chi_{jik}^{(2)}(\omega_3=\omega_1+\omega_2)=\chi_{kji}^{(2)}(\omega_3=\omega_1+\omega_2)
\end{aligned}
\tag{2.1.25}
$$

(2.1.25) 式一般称为 Kleiman 猜想，只有当 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 远小于非线性介质的共振频率时才成立. 这时极化率张量基本与频率无关.

如 Kleiman 猜想成立，即在二阶极化率与频率 ω 无关的情形下，实用中还常用张量缩写记号

$$
d_{il}=d_{ijk}=\frac{1}{2}\chi_{ijk}^{2} \tag{2.1.26}
$$

l 与 jk 间的对应关系为

jk:	11	22	33	23, 32	31, 13	12, 21
l:	1	2	3	4	5	6

d_{il} 有 18 个分量，但并非全是独立的. 通过重排还有关系

$$
\begin{aligned}
d_{12}=d_{122}=d_{212}=d_{26}\\
d_{14}=d_{123}=d_{213}=d_{25}
\end{aligned}
\tag{2.1.27}
$$

同样可证

$$
\begin{aligned}
d_{16}=d_{21}\quad,\quad d_{31}=d_{15}\quad,\quad d_{32}=d_{24}\\
d_{34}=d_{23}\quad,\quad d_{35}=d_{13}\quad,\quad d_{36}=d_{14}
\end{aligned}
\tag{2.1.28}
$$

故在 18 个分量中只有 10 个是独立的.

倍频与和频的极化率张量可表示为

$$\begin{pmatrix} P_x(2\omega) \\ P_y(2\omega) \\ P_z(2\omega) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{16} \\ d_{21} & \cdots & d_{26} \\ d_{31} & \cdots & d_{36} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x(\omega)^2 \\ E_y(\omega)^2 \\ E_z(\omega)^2 \\ 2E_y(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_z(\omega) \\ 2E_x(\omega)E_y(\omega) \end{pmatrix} \tag{2.1.29}$$

$$\begin{pmatrix} P_x(\omega_3) \\ P_y(\omega_3) \\ P_z(\omega_3) \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{16} \\ d_{21} & \cdots & d_{26} \\ d_{31} & \cdots & d_{36} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_x(\omega_1)E_x(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_z(\omega_1)E_z(\omega_2) \\ E_y(\omega_1)E_z(\omega_2) + E_z(\omega_1)E_y(\omega_2) \\ E_z(\omega_1)E_x(\omega_2) + E_x(\omega_1)E_z(\omega_2) \\ E_x(\omega_1)E_y(\omega_2) + E_y(\omega_1)E_x(\omega_2) \end{pmatrix} \tag{2.1.30}$$

比较 (2.1.29) 式与 (2.1.30) 式便看出和频比倍频多了因子 2, 这是由于交换 ω_p,ω_q 引起的.

非线性极化张量所反映的非线性介质的空间对称性，实际上已包含在 $\chi_{ijk}^{(2)}$ 对空间分量 i,j,k 的依赖中了. 例如我们考虑一晶体，它关于 x,y 方向为对称的，亦即沿 z 方向转 90°, 晶体将自身重合. 对于这样的晶体，光场沿 x 方向偏振或 y 方向偏振的响应用极化分量 $\chi_{zxx}^{(2)}$ 与 $\chi_{zyy}^{(2)}$ 来表示是一样的. 总之，晶体的各种空间对称性均反映到极化张量 $\chi_{ijk}^{(2)}$ 中来. 特别是空间反演对称，即具有反演中心的中心对称晶体，可证二阶张量为 0($\chi^{(2)}=0$). 以二次谐波的产生为例，当作用于晶体的场强 $E(t)=\varepsilon\cos\omega t$, 产生的非线性极化为

$$P(t) = \chi^{(2)}E^2(t) \tag{2.1.31}$$

现在改变 $E(t)$ 的符号, 使之为 $-E(t)$. 按反演中心特征, 感生的极化 $P(t)$ 也改变为 $-P(t)$, 于是有

$$-P(t) = \chi^{(2)}[-E(t)]^2 \tag{2.1.32}$$

比较 (2.1.31) 式与 (2.1.32) 式，必然有 $P(t)=0$, 亦即 $\chi^{(2)}=0$.

对于非对称晶体， Miller 还给出经验公式 [4]

$$\frac{\chi^{(2)}(\omega_1+\omega_2,\omega_1,\omega_2)}{\chi(\omega_1+\omega_2)\chi(\omega_1)\chi(\omega_2)} = \frac{ma}{N^2e^3} \quad , \quad a = \frac{\omega_0^2}{d} \tag{2.1.33}$$

式中， ω_0 , d 分别为晶体的共振频率与晶格常数，而

$$\chi = -\frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-2i\omega\gamma} \simeq -\frac{Ne^2}{m}\frac{1}{\omega_0^2} \tag{2.1.34}$$

将 (2.1.34) 式代入 (2.1.33) 式，并令 $N=1/d^3$, 得

$$\chi^{(2)} = -\frac{Ne^3}{m^2}\frac{a}{\omega_0^6} = -\frac{Ne^3}{m^2}\frac{1}{\omega_0^4}\frac{1}{d} = -\frac{e^3}{m^2\omega_0^4d^4} \tag{2.1.35}$$

用典型参量 $\omega_0 = 1\times10^{16}$ rad/s,$d=3$Å, $e=4.8\times10^{-10}$ esu,$m=9.1\times10^{-28}$ g 代入，最后得 $|\chi^{(2)}|\simeq 3\times10^{-8}$ esu, 与实际测定数值的量级相近. 用同样方法可估算出三阶极化率为

$$\chi^{(3)} \simeq \frac{Nbe^4}{m^3\omega_0^8} = \frac{e^4}{m^3\omega_0^6 d^5} \simeq 3\times 10^{-15}\ \text{esu} \tag{2.1.36}$$

2.2 光学中的波波相互作用

2.2.1 三波耦合

对于三波相互作用，如果满足共振条件及相位匹配条件，则应用 (2.1.17) 式和 (2.1.19) 式，易于导出三波相互作用方程 (1.7.2). 事实上，令 $n=0,1,2$, 则得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_0\frac{\vec{k}_0}{k_0}\cdot\nabla\right)A_0 &= i\frac{4\pi\omega_0}{\epsilon(\omega_0)}\chi^{(2)}(\omega_0,\omega_1,\omega_2)A_1A_2\mathcal{K}\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_1\frac{\vec{k}_1}{k_1}\cdot\nabla\right)A_1 &= i\frac{4\pi\omega_1}{\epsilon(\omega_1)}\chi^{(2)}(\omega_1,\omega_0,-\omega_2)A_0A_2^*\\
\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_2\frac{\vec{k}_2}{k_2}\cdot\nabla\right)A_2 &= i\frac{4\pi\omega_2}{\epsilon(\omega_2)}\chi^{(2)}(\omega_2,\omega_0,-\omega_1)A_0A_1^*
\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

当 $\omega_1\neq\omega_2$ 时，$\mathcal{K}=1$；当 $\omega_1=\omega_2$ 时，$\mathcal{K}=1/2$, 理由在推导 (2.1.29) 式和 (2.1.30) 式时已提到过了.

设 $\frac{\vec{k}_0}{k_0}=\frac{\vec{k}_1}{k_1}=\frac{\vec{k}_2}{k_2}$, 即三波沿同一方向传播，则可令 $\frac{\vec{k}_0}{k_0}\cdot\nabla=\frac{\vec{k}_1}{k_1}\cdot\nabla=\frac{\vec{k}_2}{k_2}\cdot\nabla=\frac{\partial}{\partial x}$, 又令 $\beta_0=\frac{4\pi\omega_0}{\epsilon(\omega_0)}\chi^{(2)}(\omega_0,\omega_1,\omega_2)$, $\beta_1=\frac{4\pi\omega_1}{\epsilon(\omega_1)}\chi^{(2)}(\omega_1,\omega_0,-\omega_2)$, $\beta_2=\frac{4\pi\omega_2}{\epsilon(\omega_2)}\chi^{(2)}(\omega_2,\omega_0,-\omega_1)$, 作变换 $iA_0,iA_1,iA_2\to\phi_0,\phi_1,\phi_2$, 于是 (2.2.1) 式便过渡到 (1.7.2) 式 [5].

如 $A_0\sim A_2$ 不明显地依赖于时间 t, 且 $\frac{\vec{k}_i}{k_i}\cdot\nabla=\frac{d}{dx}$,$i=0\sim 2$, 当相位不完全匹配，并引进参数 $\tilde{\beta}_0$,$\tilde{\beta}_1$,$\tilde{\beta}_2$, 则三波耦合方程可由 (2.2.1) 式写为

$$\begin{aligned}
\frac{dA_0}{dx} &= i\tilde{\beta}_0A_1A_2e^{-i\Delta kx}, & \tilde{\beta}_0 &= \frac{4\pi\omega_0}{\epsilon(\omega_0)v_0}\chi^{(2)}(\omega_0,\omega_1,\omega_2)\mathcal{K}\\
\frac{dA_1}{dx} &= i\tilde{\beta}_1A_0{A_2}^*e^{i\Delta kx}, & \tilde{\beta}_1 &= \frac{4\pi\omega_1}{\epsilon(\omega_1)v_1}\chi^{(2)}(\omega_1,\omega_0,-\omega_2)\\
\frac{dA_2}{dx} &= i\tilde{\beta}_2A_0A_1e^{-i\Delta kx}, & \tilde{\beta}_2 &= \frac{4\pi\omega_2}{\epsilon(\omega_2)v_2}\chi^{(2)}(\omega_2,\omega_0,-\omega_1)
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

式中，$\Delta k=k_0-k_1-k_2$. 因子 $e^{-i\Delta kx}$,$e^{i\Delta kx}$ 是考虑到相位不完全匹配而引进的. 形如 (2.2.2) 式的三波耦合方程，包括了非线性光学和频 ($\omega_0=\omega_1+\omega_2$)、倍频 ($\omega_0=\omega_1+\omega_1$)、差频 ($\omega_0=\omega_1-\omega_2$). 作变换

$$\frac{A_ie^{-i\Delta kx}}{\tilde{\beta}_i^{1/2}}\Rightarrow C_i,\qquad i=0,1,2 \tag{2.2.3}$$

并令

$$\zeta=x\sqrt{\tilde{\beta}_0\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2}\ ,\ \Delta s=\frac{\Delta k}{\sqrt{\tilde{\beta}_0\tilde{\beta}_1\tilde{\beta}_2}} \tag{2.2.4}$$

则 (2.2.2) 式可化为

$$\left(\frac{d}{d\zeta}+i\Delta s\right)C_0=iC_1C_2$$
$$\left(\frac{d}{d\zeta}+i\Delta s\right)C_1=iC_0C_2^* \tag{2.2.5}$$
$$\left(\frac{d}{d\zeta}+i\Delta s\right)C_2=iC_0C_1^*$$

令 $C_i=|C_i|e^{-i\theta_i},\theta=\theta_0-\theta_1-\theta_2$, 则 (2.2.5) 式的实部与虚部为

$$\frac{d|C_0|}{d\zeta}=|C_1||C_2|\sin\theta$$
$$\frac{d|C_1|}{d\zeta}=-|C_0||C_2|\sin\theta$$
$$\frac{d|C_2|}{d\zeta}=-|C_0||C_1|\sin\theta \tag{2.2.6}$$
$$\frac{d\theta}{d\zeta}=\Delta s+\left(\frac{|C_1||C_2|}{|C_0|}-\frac{|C_0||C_2|}{|C_1|}-\frac{|C_0||C_1|}{|C_2|}\right)\cos\theta$$

积分 (2.2.6) 式，得

$$|C_0|^2+|C_1|^2=n_0+n_1=m_1$$
$$|C_0|^2+|C_2|^2=n_0+n_2=m_2$$
$$|C_1|^2-|C_2|^2=n_1-n_2=m_3 \tag{2.2.7}$$
$$|C_0||C_1||C_2|\cos\theta-\frac{1}{2}|C_0|^2\Delta s=m_0$$

将 (2.2.7) 式代入 (2.2.6) 式的第一式，得

$$\frac{dn_0}{d\zeta}=2\sqrt{n_0(m_1-n_0)(m_2-n_0)-(m_0+\frac{1}{2}n_0\Delta s)^2} \tag{2.2.8}$$

(2.2.8) 式的积分，即 Weierstrass 积分，可通过椭圆函数来表示. 设 n_a,n_b,n_c 为方程

$$n_0(m_1-n_0)(m_1-n_0)-(m_0+\frac{1}{2}n_0\Delta s)^2=0$$

的三个根，且 $n_a\geq n_b\geq n_c\geq 0$, 则 $n_0(\zeta)$ 可表示为

$$n_0(\zeta)=n_c+(n_b-n_c)\left\{\mathrm{sn}^2\left[(n_a-n_c)^{1/2}(\zeta-\zeta_0)m\right]\right\}^{-1}$$
$$m=\left(\frac{n_b-n_c}{n_a-n_c}\right)^{1/2}\quad,\quad n_0(\zeta_0)=n_c \tag{2.2.9}$$

1. 二次谐波

将 (2.2.9) 式应用到二次谐波情形 [6], 如图 2.1(a) 所示，频率为 ω_1 的基波进入非线性晶体，经过波波相互作用，就会产生频率二倍于基波的二次谐波. 应用上面公式处理这问题，便是 $|C_1|=|C_2|=u_1$ 为基波振幅， $|C_0|=u_2$ 为二次谐波振幅. (2.2.6) 式化为

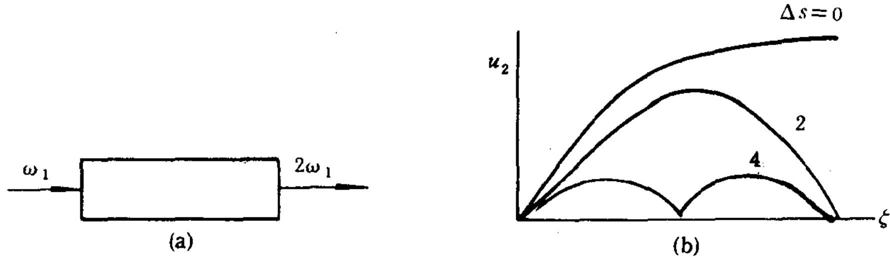


图 2.1 二次谐波的产生

$$
\begin{aligned}
\frac{du_2}{d\zeta} &= u_1^2\sin\theta \\
\frac{du_1}{d\zeta} &= -u_1u_2\sin\theta \\
\frac{d\theta}{d\zeta} &= \Delta s+\left(\frac{u_1^2}{u_2}-2u_2\right)\cos\theta
\end{aligned}
\tag{2.2.10}
$$

设初始时二次谐波 $|C_0|=u_2=0$, 由 (2.2.7) 式，故有

$$
|C_0|^2+|C_1|^2=u_2^2+u_1^2=m_1 \quad , \quad m_0=0 \tag{2.2.11}
$$

代入 (2.2.8) 式，得

$$
\frac{dn_0}{d\zeta}=2\sqrt{n_0(m_1-n_0)^2-(\frac{1}{2}n_0\Delta s)^2} \tag{2.2.12}
$$

经规一化

$$
n_0/m_1\to n_0 \quad , \quad \Delta s/m_1^{1/2}\to\Delta s \quad , \quad m_1^{1/2}\zeta\to\zeta \tag{2.2.13}
$$

(2.2.12) 式可写为

$$
\frac{dn_0}{d\zeta}=2\sqrt{n_0(1-n_0)^2-(\frac{1}{2}n_0\Delta s)^2} \tag{2.2.14}
$$

图 2.1(b) 给出 $u_2=n_0^{1/2}$ 随 ζ 的变化曲线，只有在相位完全匹配 $(\Delta s=0)$ 的情况下，u_2 随 ζ 单调增长，并达于饱和；当位相不匹配，$\Delta s\neq 0,u_2$ 随 ζ 周期变化，其最大幅度随 Δs 的增大而递减.

在完全相位匹配的情形 $(\Delta s=0),n_0$ 的 Jacobi 椭圆函数解将退化到可用初等函数来表示. 因 $u_2=n_0^{1/2}$, 方程 (2.2.14) 可写为

$$
\begin{aligned}
\frac{du_2}{d\zeta} &= 1-u_2^2 \\
u_2 &= \tanh(\zeta+\zeta_0) \\
n_0 &= \tanh^2(\zeta+\zeta_0)
\end{aligned}
\tag{2.2.15}
$$

注意到上述结果是在采用规一化 (2.2.13) 式后得到的，在未规一化前

$$
\begin{aligned}
m_1 = \quad & u_1^2+u_2^2=\frac{A_1^2}{\frac{4\pi\omega_1}{n_1c}\chi^{(2)}}+\frac{A_2^2}{\frac{4\pi\omega_2}{n_2c}\chi^{(2)}/2} \\
= \quad & \frac{1}{2d}\left(\frac{I_1}{2\omega_1}+\frac{I_2}{\omega_2}\right)=\frac{I}{2d\omega_2}
\end{aligned}
\tag{2.2.16}
$$

式中，$d=\frac{1}{2}\chi^{(2)}$ 为二阶非线性系数；$I_1=\frac{n_1c}{2\pi}A_1^2$, $I_2=\frac{n_2c}{2\pi}A_2^2$ 分别为基波与谐波的光强. (2.2.11) 式表明总光强 I 是一常量. 规一化后的 u_1,u_2 满足

$$u_1^2 + u_2^2 = 1 \quad , \quad u_1 = \sqrt{1-u_2^2} = \operatorname{sech}\zeta \tag{2.2.17}$$

$$\zeta = x\sqrt{\beta_0}\beta_1 m^{1/2} = x/l$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{\frac{4\pi\omega_2}{n_2 c}d\frac{8\pi\omega_1}{n_1 c}d}}\frac{1}{\sqrt{\frac{I}{2d\omega_2}}}$$

$$= \frac{(n_1^2 n_2 c^3)^{1/2}}{\sqrt{2\pi I}8\pi\omega_1 d} = \frac{(n_1 n_2)^{1/2}c}{8\pi\omega_1 d|A_1(0)|} \tag{2.2.18}$$

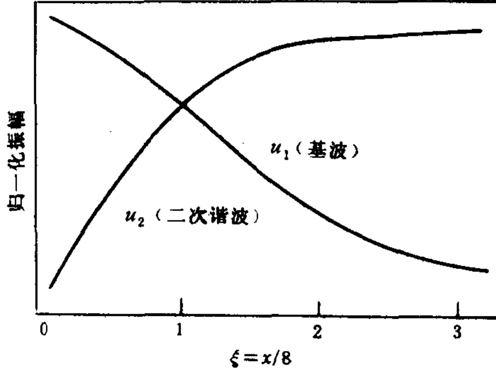


图 2.2 u_1,u_2 随 ζ 的变化曲线

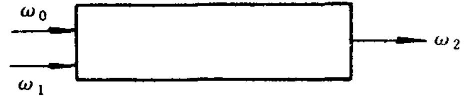


图 2.3 参量波相互作用示意图

又设基波光斑半径为 w_0, 焦深为 b , 入射激光功率为 P , 并将非线性介质厚度 L 取为 b, 即

$$I_1 = \frac{n_1 c}{2\pi}A_1^2 = \frac{P}{\pi w_0^2}$$

$$b = \frac{2\pi w_0^2 n_1}{\lambda_1} = L$$

由此消去 w_0, 得

$$A_1 = \left(\frac{4\pi P}{c\lambda_1 L}\right)^{1/2} \tag{2.2.19}$$

将 (2.2.19) 式代入 (2.2.18) 式，得 $\zeta = L/l$ 为

$$\zeta = \left(\frac{1024\pi^5 d^2 LP}{n_1 n_2 c\lambda_1^3}\right)^{1/2} \tag{2.2.20}$$

典型的参量取值为 $d = 1\times10^{-8}\times 8\text{esu}, L = 1\ \text{cm}, P = 1\text{W} = 1\times10^7\ \text{erg/s}, \lambda_1 = 0.5\times10^{-4}\ \text{cm}, n=2$, 则按 (2.2.20) 式算得 $\zeta = 0.14$, 由基波至谐波的转换效率为

$$\eta = \frac{u_2^2(\zeta)}{u_1^2(0)} = 0.02 \tag{2.2.21}$$

η 的计算应用了 (2.2.15) 式和 (2.2.17) 式.

2. 参量过程

以弱的信号光 ω_1, 强的泵浦光 ω_0 送入非线性介质，通过波波相互作用的差频效应，我们可以获得参量波 $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$(见图 2.3). 考虑到泵浦光很强，可以略去相互作用而

导致的泵浦光的减弱. 故 (2.2.2) 式中的 A_0 可看成是常数，而 A_1,A_2 的耦合方程可写成

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dx} &= \frac{i8\pi\omega_1 d}{n_1 c}A_0A_2^*e^{i\Delta kx} = i\kappa_1 A_2^*e^{i\Delta kx}\\ \frac{dA_2}{dx} &= \frac{i8\pi\omega_2 d}{n_2 c}A_0A_1^*e^{i\Delta kx} = i\kappa_2 A_1^*e^{i\Delta kx}\\ \Delta k &= \vec{k}_0 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2\end{aligned} \tag{2.2.22}$$

解是

$$A_1 = \tilde{A}_1 e^{i\Delta kx/2} \quad , \quad A_2 = \tilde{A}_2 e^{i\Delta kx}$$

代入 (2.2.22) 式，并消去 $\tilde{A}_1$(或 $\tilde{A}_2$), 可得

$$\frac{d^2\tilde{A}_i}{dx^2} + \frac{\Delta k}{2}^2 \tilde{A}_i^2 = \kappa_1\kappa_2\tilde{A}_i \quad , \quad i = 1,2$$

即

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1(x) &= A_1(0)\left(\cosh gx - \frac{i\Delta k}{2g}\sinh gx\right) + \frac{\kappa_1}{g}A_2^*(0)\sinh gx\\ \tilde{A}_2(x) &= A_2(0)\left(\cosh gx - \frac{i\Delta k}{2g}\sinh gx\right) + \frac{\kappa_2}{g}A_1^*(0)\sinh gx\\ g &= \sqrt{\kappa_1\kappa_2 - (\Delta k/2)^2}\end{aligned} \tag{2.2.23}$$

式中， g 为增益系数，位相完全匹配时 $\Delta k = 0$, g 最大. 位相不匹配时， g 随 Δk 的增大而下降.

2.2.2 四波耦合

在光学非线性波相互作用中，除了上述三波耦合外，四波耦合也是很重要的，因为它包括了三波和频、三次谐波、四波混频、简并四波混频、光束自聚效应、相位自调制等等. 前两者为三波和频 $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, \vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3$ ；后四者为三波差频 $\omega_0 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3, \vec{k}_0 = \vec{k}_1 - \vec{k}_2 + \vec{k}_3$. 参照三波耦合方程 (2.2.5)~(2.2.9) 式，可得四波耦合方程

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\zeta} + i\Delta s\right)C_0 &= iC_1C_2C_3\\ \left(\frac{d}{d\zeta} + i\Delta s\right)C_1 &= iC_0C_2^*C_3^*\\ \left(\frac{d}{d\zeta} + i\Delta s\right)C_2 &= \pm iC_0C_1^*C_3^*\\ \left(\frac{d}{d\zeta} + i\Delta s\right)C_3 &= iC_0C_1^*C_2^*\end{aligned} \tag{2.2.24}$$

式中， $\Delta s = k_0 - k_1 \mp k_2 - k_3$ 分别对应于三波和频 $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ 与三波差频 $\omega_0 = \omega_1 - \omega_2 + \omega_3$. 又设 $C_i = |C_i|e^{-i\theta_i}$, 其中 $i = 0, 1, 2, 3$, $\theta = \theta_0 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3$, 便得

$$
\begin{aligned}
\frac{d|C_0|}{d\zeta} &= |C_1C_2C_3|\sin\theta \\
\frac{d|C_1|}{d\zeta} &= -|C_0C_2C_3|\sin\theta \\
\frac{d|C_2|}{d\zeta} &= \mp|C_0C_1C_3|\sin\theta \\
\frac{d|C_3|}{d\zeta} &= -|C_0C_1C_2|\sin\theta
\end{aligned}
\tag{2.2.25}
$$

$$
\frac{d\theta}{d\zeta} = 2\Delta s + \left(\frac{|C_1C_2C_3|}{|C_0|} - \frac{|C_0C_2C_3|}{|C_1|} \mp \frac{|C_0C_1C_3|}{|C_2|} - \frac{|C_0C_1C_2|}{|C_3|}\right)\cos\theta
$$

积分 (2.2.25) 式，得

$$
\begin{aligned}
|C_0|^2 + |C_1|^2 = m_1 \quad &, \quad |C_0|^2 - |C_3|^2 = m_4 \\
|C_0|^2 + |C_3|^2 = m_3 \quad &, \quad |C_0|^2 \pm |C_2|^2 = m_2 \\
|C_0C_1C_2C_3|\cos\theta - &|C_0|^2\Delta s = m_0
\end{aligned}
\tag{2.2.26}
$$

代入 (2.2.25) 式的第一式，得

$$
\frac{dn_0}{d\zeta} = 2\sqrt{\pm n_0(m_1 - n_0)(m_2 - n_0)(m_3 - n_0) - (m_0 + n_0\Delta s)^2} \tag{2.2.27}
$$

这可通过线性分式变换公式化为 Weiertrass 椭圆积分，用 Jacobi 函数表示 [7,8].

1. 简并四波混频

对于一些特殊情况，(2.2.24) 式的积分也可用初等函数来表示．例如 $C_2 = C_0$, $C_3^* = C_1$, $\Delta s = 0, \theta = \theta_0 - \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 = 2(\theta_0 - \theta_1)$. 图 2.4 所示的简并四波混频就是这种情形． C_0, C_1 为泵浦波，$\vec{k}_0 = \vec{k}_1, \omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega_3$. 由于泵浦波 $|C_0|, |C_1|$ $\gg$ 信号波及其复共轭波 $|C_2|, |C_3|$, 故在考虑 C_0, C_1 的波波相互作用时，可略去信号波及其复共轭波，主要考虑 C_0, C_1 自身的四波相互作用就可以了．这就相当于在 (2.2.25) 式中取 $C_2 = C_0, C_3^* = C_1$. 又由于 $\Delta s = 0$, 故有

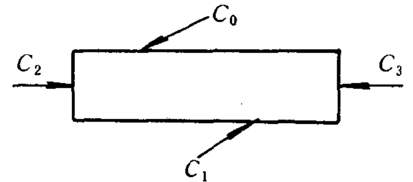


图 2.4　简并四波混频示意图

$$
\frac{d\theta}{d\zeta} = \left(\frac{|C_1C_0C_1^*|}{|C_0|} - \frac{|C_0C_0C_1^*|}{|C_1|} + \frac{|C_0C_1C_1^*|}{|C_0|} - \frac{|C_0C_1C_0|}{|C_1^*|}\right)\cos\theta = 2(|C_1|^2 - |C_0|^2)\cos\theta \tag{2.2.28}
$$

如 θ 随 ζ 的增加而变化，就会影响到位相匹配，故完全相位匹配应有 $\dfrac{d\theta}{d\zeta} = 0$. 由 (2.2.28) 式得出 $|C_1|^2 = |C_0|^2$, 即两个光泵强度相等是完全相位匹配的必要条件．当满足此条件时，有 $\dfrac{d\theta}{d\zeta} = 0$. 如果 θ 的初值也是 0, 则有 $\theta \equiv 0$. 由 (2.2.25) 式得 $\dfrac{d|C_0|}{d\zeta} = \dfrac{d|C_1|}{d\zeta} = 0$, 故泵浦波的振幅是不变的，将这一结果应用到 (2.2.24) 式，便得 C_2, C_3 信号波方程

$$
\frac{dC_2}{d\zeta} = -iC_0^2C_3^*, \quad \frac{dC_3}{d\zeta} = iC_0^2C_2^* \tag{2.2.29}
$$

令 $n_0 = |C_0|^2$,C_2,C_3 的通解可写为

$$
\begin{aligned}
C_3 &= B\sin n_0\zeta + C\cos n_0\zeta \\
C_2^* &= -\frac{i}{n_0}\frac{d}{d\zeta}C_3 = -iB\cos\zeta + iC\sin n_0\zeta
\end{aligned}
\tag{2.2.30}
$$

式中， B,C 的取值由边界条件确定.

2. 波的自聚

将 (2.2.25) 式应用于分析波的自聚现象，相当于方程中 $C_1 = C_3 = C_0$, $C_2 = C_0^*$. 这样就得出一对互为共轭的方程

$$
\begin{aligned}
\frac{dC_0}{d\zeta} &= i|C_0|^2 C_0 \\
\frac{dC_0^*}{d\zeta} &= -i|C_0|^2 C_0^*
\end{aligned}
\tag{2.2.31}
$$

在 (2.2.31) 式中再加进被略去的横向项 $-i/\alpha\nabla_\perp^2 C_0$, 便得到非线性 Schrödinger 方程

$$
\left(\nabla_\perp^2 + i\alpha\frac{d}{d\zeta} + \alpha|C_0|^2\right)C_0 = 0 \tag{2.2.32}
$$

式中， α 为一常数.

3. 三次谐波

在 (2.2.25) 式中，令 $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3$,$\omega_0 = 3\omega_1$,$C_0 = \phi_0$,$C_1 = C_2 = C_3 = \phi_1$, 于是得

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{d}{d\zeta} + i\Delta s\right)\phi_0 &= i\phi_1^3 \\
\left(\frac{d}{d\zeta} + i\Delta s\right)\phi_1 &= i\phi_0\phi_1^{*2}
\end{aligned}
\tag{2.2.33}
$$

$n_0(=\phi_0^2)$ 满足 (2.2.27) 式，即

$$
\frac{dn_0}{d\zeta} = 2\sqrt{n_0(m_1 - n_0)^3 - (m_0 + n_0\Delta s)^2} \tag{2.2.34}
$$

这表明，其通解可通过 Jacobi 椭圆函数准确求得. 只在 ϕ_1 很强，产生三次谐波中造成的泵浦波 ϕ_1 的吃空可略去不计，且可将 ϕ_1 看成常数的情况下，才有简单的解析解. 考虑到 ϕ_0 的初值为 0, 积分 (2.2.33) 式的第一个方程，得

$$
\phi_0 = -i\phi_1^3\frac{e^{-i\Delta s\zeta} - 1}{i\Delta s} \tag{2.2.35}
$$

如人所料的是，当相位完全匹配，即 $\Delta s \to 0$, 由 (2.2.35) 式给出的三次谐波的振幅 $|\phi_0|$ 达到极大，并正比于作用距离 ζ, 但这种情况仅发生在平面波. 如果是高斯光束， $|\phi_0|$ 的极大值就不一定是位相完全匹配 [9]. 此时，(2.2.33) 式应加上被略去的 $\nabla^2 \simeq \nabla_\perp^2 = (\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2})$, 即

$$
\left[\nabla_\perp^2 + 2i\alpha\left(\frac{d}{d\zeta} + i\Delta s\right)\right]\phi_0 = -2\alpha\phi_1^3 \tag{2.2.36}
$$

采用圆柱坐标 ($\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2},\zeta$), 将 $\phi_1(\rho,\zeta),\phi_0(\rho,\zeta)$ 表示为试解函数

$$
\begin{aligned}
\phi_1(\rho,\zeta) &= A_1\frac{\exp[-\rho^2/w_0^2(1+i2\zeta/b)]}{(1+i2\zeta/b)} \\
\phi_0(\rho,\zeta) &= \frac{A_0(\zeta)}{1+i2\zeta/b}\exp[-3\rho^3/w_0^2(1+i2\zeta/b)-i\Delta s\zeta]
\end{aligned}
\tag{2.2.37}
$$

式中， $b=\alpha w_0^2,\alpha=\dfrac{2\pi}{\lambda},w_0$ 为光束焦斑. 将 (2.2.37) 式代入 (2.2.36) 式，便得

$$
\frac{dA_0(\zeta)}{d\zeta}=i\frac{A_1^3e^{i\Delta s\zeta}}{(1+i2\zeta/b)^2} \tag{2.2.38}
$$

$$
A_0(\zeta)=iA_1^3\int_{-\zeta_0}^{\zeta}\frac{e^{i\Delta s\zeta'}}{(1+i2\zeta'/b)^2}d\zeta'=iA_1^3\begin{cases}0, & \Delta s\le 0\\ \dfrac{b}{2}2\pi(\dfrac{b\Delta s}{2})e^{-b\Delta s/2}, & \Delta s>0\end{cases} \tag{2.2.39}
$$

上式表明 Δs 的最佳值应为

$$
\Delta s=2/b \tag{2.2.40}
$$

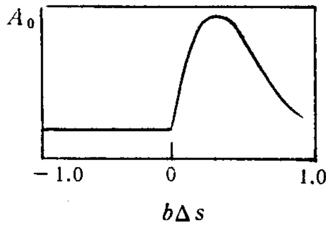


图 2.5 A_0 随 Δ_s 的变化曲线

(参照 Boyd[1])

这是多次谐波中一个带有普遍性的现象 (见图 2.5), 即对聚焦光束来说，位相完全匹配 $\Delta k=0$, 耦合效率反而为 0. 只有当 Δk 取为适当正值才会使耦合效率提高. 因为在会聚光产生多次谐波过程中，也存在相似于 (2.2.39) 式的积分

$$
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\Delta kz'}}{(1+2iz'/b)^{q-1}}dz'=\begin{cases}0, & \Delta k\le 0\\ \dfrac{b}{2}\dfrac{2\pi}{(q-2)!}\left(\dfrac{b\Delta k}{2}\right)^{q-2}e^{-b\Delta k/2}, & \Delta k>0\end{cases}
$$

从物理上来理解这一现象，还得追溯到线性光学光束会聚处的位相变化特性 [10], 即除轴向光线外，其它光线在通过焦点时，要发生 π 角相移. 对于非线性光学来说， q 次谐波的极化率 $P=\chi^{(q)}A_1^q$, 当入射光束 A_1 通过焦点发生 π 的位相变化时，极化率 P 就要发生 $q\pi$ 的位相变化，而 q 次谐波 A_q 只是发生 π 的变化，这样非线性极化率 P 就不能有效地将基波能量耦合到 q 次谐波上，除非 $\Delta k>0$. 图 2.6 中 (a) 为 $\Delta k>0$; 在焦点处，三个基波有些偏折如图 2.6 中 (b), 恰好满足 $\Delta k=0$; 但像图 2.6 中 (c) $\Delta k<0$ 这种情况，是无论如何也不能实现相位匹配的.

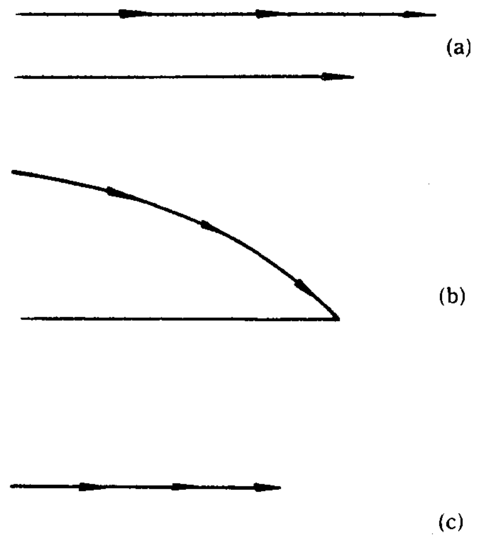


图 2.6 多次谐波的相位匹配示意图

上面讨论了三波、四波耦合方程及其应用，最后说明由 (2.2.7) 和 (2.2.26) 式所反映的 Manley-Rowe 关系的物理意义 [11]. 注意到 $\tilde{\beta}_i\propto\omega_i$, 若定义

$$\left|\frac{A_i}{\bar{\beta}^{1/2}}\right| = \left(\frac{I_i}{\omega_i}\right)^{1/2} \tag{2.2.41}$$

则有

$$|C_i|^2 = \frac{I_i}{\omega_i} \tag{2.2.42}$$

关系 (2.2.7) 式可写为

$$\frac{I_0}{\omega_0} + \frac{I_1}{\omega_1} = m_1,\ \frac{I_0}{\omega_0} + \frac{I_2}{\omega_2} = m_2,\ \frac{I_0}{\omega_0} - \frac{I_3}{\omega_3} = m_3 \tag{2.2.43}$$

这即通常所说的 Manley-Rowe 关系. I_i/ω_i 恰好给出了对应于该光强的光量子数 n_i (除一个常数因子 $\hbar$ 外).I_0/ω_0,I_1/ω_1,I_2/ω_2 分别对应于泵浦光、信号光及参量光的光量子数. (2.2.43) 式是给出光量子数间的守恒关系. 第一式表明产生一个 $\hbar\omega_1$ 光子也必然消耗一个 $\hbar\omega_0$ 光子；第二式也表明 $\hbar\omega_2$ 与 $\hbar\omega_0$ 的产生与消耗是同时的；第三式则表明 $\hbar\omega_1$,$\hbar\omega_2$ 是同时产生的.

2.3 光与非线性介质相互作用的量子理论

前一节研究表明辐射场与非线性介质的相互作用主要通过 Maxwell 方程中所包含的非线性极化体现出来. 当极化 P 用电场 E 展开时, 其展开系数, 即极化率, 表现了光与介质相互作用的多样性与复杂性. 显然这辐射场与原子的相互作用是建立在量子理论的基础上的.

在辐射场的作用下, 原子的波函数 $\psi(\vec{r},t)$ 所满足的 Schrödinger 方程为 [12]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = (H_0 + H')\psi \tag{2.3.1}$$

式中, H_0 为原子的哈密顿量, H' 为原子与辐射场相互作用的哈密顿量

$$H' = -\frac{(-e)}{mc}\vec{A}\cdot\vec{P} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2 \tag{2.3.2}$$

上式中的第二项比第一项小得多, 可略去 [12]. 但在光与原子的弹性散射中, 第二项是有作用的 (在下面的讨论也只计及第一项, 略去第二项). 式中 $-e$ 为电子的电荷, $\vec{P}$ 为原子的动量算符, $\vec{A}$ 为场的矢势. 在光波段范围内, 波长远大于原子波函数不为 0 的线度, 故在原子波函数线度内, $\vec{A}$ 可看成常数, 可以从含原子波函数的积分中提出来. 例如, 在计算 n 态至 m 态的跃迁矩阵元时, 有

$$\begin{aligned} <n|H'|m> &\simeq \frac{-(-e)}{mc}\vec{A}\cdot <n|\vec{P}|m> \\ &= -(-e)\frac{\vec{E}}{i\omega}i\omega_{nm}\cdot <n|\vec{r}|m> \\ &\simeq -\vec{E}\cdot <n|\vec{\mu}|m> \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

式中, $\vec{\mu} = -e\vec{r}$ 为原子的偶极距, $-\vec{\mu}\cdot\vec{E}$ 为偶极相互作用能, ω,ω_{nm} 分别为辐射频率与原子跃迁频率. 在近共振的情况下, $\omega \simeq \omega_{nm}$, 于是由 (2.3.3) 式, $H' = -\vec{\mu}\cdot\vec{E}$, 称之为偶极近似. (2.3.1) ~ (2.3.3) 式为含相互作用的 Schrödinger 方程, 与 (2.1.1) ~ (2.1.3)

式经典场的 Maxwell 方程合在一起为光与非线性介质相互作用半经典理论基础.

2.4 弱场微扰法解 Schrödinger 方程

Schrödinger 方程 (2.3.1) 式，一般很难准确求解，经常采用微扰方法求解. 首先，当 $H'=0$ 时， Schrödinger 方程为

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H_0\psi \tag{2.4.1}$$

设 (2.4.1) 式的解为可表示为一系列正交规一的定态解

$$\psi_n = e^{-iE_nt/\hbar}u_n(\vec{r}) \quad , \quad n=1,2,\cdots \tag{2.4.2}$$

将其代入 (2.4.1) 式，得

$$H_0u_n = E_nu_n \tag{2.4.3}$$

当 $H'\neq 0$ 时，方程 (2.3.1) 式的解 ψ 用定态解 ψ_n 展开，得

$$\psi(\vec{r},t) = \sum_n a_n(t)e^{-iE_nt/\hbar}u_n(\vec{r}) \tag{2.4.4}$$

将 (2.4.4) 式代入 (2.3.1) 式，便得

$$\frac{da_k}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\sum_n < k|H'|n > a_ne^{i\omega_{kn}t} \tag{2.4.5}$$

或

$$\frac{dC_k}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\sum_n < k|H|n > C_n \quad , \quad C_n = a_n(t)e^{-iE_nt/\hbar} \quad , \quad H = H_0 + H' \tag{2.4.6}$$

这组方程准确地等价于 Schrödinger 方程 (2.3.1), 求解 $\psi(\vec{r},t)$ 变为求解 $a_n(t)$ 或 $C_n(t)$. 为此，可将 $a_k(t)$ 按 $a_k^{(s)}(a_k^{(s)}\propto (H')^s)$ 展开为

$$a_k = a_k^{(0)} + a_k^{(1)} + \cdots + a_k^{(s)} + \cdots \tag{2.4.7}$$

在弱场作用下， H' 很小，这个展开是收敛的，故可将 (2.4.7) 式代入 (2.4.5) 式，并比较等式两端 H' 的同次幂，便得

$$\begin{aligned} &\frac{da_k^{(0)}}{dt} = 0 \\ &\frac{da_k^{(s)}}{dt} = (i\hbar)^{-1}\sum_n < k|H'|n > a_n^{(s-1)}e^{i\omega_{kn}t}, \qquad s=1,2,\cdots \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

当常数 $a_k^{(0)}$ 给定，方程 (2.4.8) 式给出 $a_k^{(s)}$ 的递推方程，此即弱场的微扰解. 但当 E 很强时， H' 增大，展开式 (2.4.7) 式已不收敛，微扰法不适用.

现设

$$H' = -\vec{\mu}\cdot\vec{E} = -\vec{\mu}\cdot\sum_p\vec{E}(\omega_p)e^{-i\omega_pt} \tag{2.4.9}$$

则

$$H'_{kn} = < k|H'|n > = -\vec{\mu}_{kn} \cdot \sum_p \vec{E}(\omega_p) e^{i\omega_p t} \tag{2.4.10}$$

积分 (2.4.8) 式，得

$$\begin{aligned} a_k^{(s)} &= (i\hbar)^{-1} \int_{-\infty}^{t} dt' \sum_n H'_{kn} a_n^{(s-1)} e^{i\omega_{kn} t'} \\ &= i/\hbar \int_{-\infty}^{t} dt' \sum_n \vec{\mu}_{kn} \cdot \sum_p \vec{E}(\omega_p) e^{i(\omega_{kn}-\omega_p)t'} a_n^{(s-1)}(t') \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

取初值 $a_n^{(0)} = \delta_{ng}$ 代入 (2.4.11) 式，得

$$a_m^{(1)}(t) = \frac{1}{\hbar} \sum_p \frac{\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_p)}{\omega_{mg} - \omega_p} e^{i(\omega_{mg}-\omega_p)t} \tag{2.4.12}$$

将 $a_m^{(1)}$ 代入 (2.4.11) 式，得

$$a_n^{(2)}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \sum_{p,q} \sum_m \frac{[\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}(\omega_q)][\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_p)]}{(\omega_{ng} - \omega_p - \omega_q)(\omega_{mg} - \omega_p)} e^{i(\omega_{ng}-\omega_p-\omega_q)t} \tag{2.4.13}$$

将 $a_n^{(2)}$ 代入 (2.4.11) 式，得

$$a_k^{(3)} = \frac{1}{\hbar^3} \sum_{pqr} \sum_{nm} \frac{[\vec{\mu}_{kn} \cdot \vec{E}(\omega_r)][\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}(\omega_q)][\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_p)]}{(\omega_{kg} - \omega_p - \omega_q - \omega_r)(\omega_{ng} - \omega_p - \omega_q)(\omega_{mg} - \omega_p)} e^{i(\omega_{kg}-\omega_p-\omega_q-\omega_r)} \tag{2.4.14}$$

在此基础上可计算出 1~3 级微扰波函数及 1~3 阶极化与极化率为

$$\begin{aligned} |\psi^{(1)}> &= \sum_m a_m^{(1)}(t) u_m(\vec{r}), \qquad < \psi^{(1)}| = \sum a_m^{(1)*}(t) u_m^*(\vec{r}) \\ |\psi^{(2)}> &= \sum_m a_m^{(2)}(t) u_m(\vec{r}), \qquad < \psi^{(2)}| = \sum a_m^{(2)*}(t) u_m^*(\vec{r}) \\ |\psi^{(3)}> &= \sum_m a_m^{(3)}(t) u_m(\vec{r}), \qquad < \psi^{(3)}| = \sum a_m^{(3)*}(t) u_m^*(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.4.15}$$

一阶偶极矩为 (零级偶极矩为 0, 因为原子波函数具有反射对称性)

$$\begin{aligned} < \vec{p}^{\,(1)} > &= < \psi^{(0)}|\vec{\mu}|\psi^{(1)} > + < \psi^{(1)}|\vec{\mu}|\psi^{(0)} > \\ &= \frac{1}{\hbar} \sum_p \sum_m \left(\frac{\vec{\mu}_{gm}[\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_p)]}{\omega_{mg} - \omega_p} e^{-i\omega_p t} + \frac{[\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_p)]^* \vec{\mu}_{mg}}{\omega_{mg}^* - \omega_p} e^{i\omega_p t} \right) \end{aligned} \tag{2.4.16}$$

式中已将 ω_{mg} 看作一般复数，实部即 $m \sim g$ 能级的跃迁频率，虚部是唯象引进的，表示该能级跃迁辐射的线宽. 另外，(2.4.16) 式的求和号 $\sum_p$ 包括正频 ω_p 与负频 $-\omega_p$, 故在第二项中用 $-\omega_p$ 代替 ω_p, 将不会改变和式的值，并使表式更简洁，再注意到 $\vec{E}^*(-\omega_p) = \vec{E}(\omega_p)$ 以及 $\vec{\mu}_{mg}^* = \vec{\mu}_{gm}$, 且

$$< \vec{p}^{\,(1)} > = \frac{1}{\hbar} \sum_p \sum_m \left(\frac{\vec{\mu}_{gm}[\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_p)]}{\omega_{mg} - \omega_p} + \frac{[\vec{\mu}_{gm} \cdot \vec{E}(\omega_p)]\vec{\mu}_{mg}}{\omega_{mg}^* + \omega_p} \right) e^{-i\omega_p t} \tag{2.4.17}$$

由此得一阶极化

$$\vec{P}^{(1)} = N < \vec{p}^{\,(1)} > = \sum_p \vec{P}^{(1)}(\omega_p) e^{-i\omega_p t} \tag{2.4.18}$$

将 $\vec{P}^{(1)}(\omega_p)$ 的分量 $P_i^{(1)}(\omega_p)$ 展开：

$$P_i^{(1)}(\omega_p) = \sum_j \chi_{ij}^{(1)}(\omega_p) E_j(\omega_p) \tag{2.4.19}$$

式中，$\chi_{ij}^{(1)}$ 即线性极化率. 将 (2.4.17) 式代入 (2.4.18) 式，并注意到 (2.4.19) 式，便得线性极化率

$$\chi_{ij}^{(1)}(\omega_p) = \frac{N}{\hbar} \sum_m \left(\frac{\mu_{gm}^i \mu_{mg}^j}{\omega_{mg} - \omega_p} + \frac{\mu_{gm}^j \mu_{mg}^i}{\omega_{mg}^* + \omega_p} \right) \tag{2.4.20}$$

前一项为共振项，后一项为非共振项. 主要贡献来自于共振项，非线性效应的共振增强即来源于此. 因为当泵浦频率 ω_p 调谐到很接近于 ω_{mg} 时，这一项的贡献将会增加得很大，从而也会增大相应的展开项 $a_n^{(s)}$，而使 (2.4.7) 式不再收敛，以致微扰展开不再适用. 我们称场的频率 ω_p 很接近于跃迁频率 ω_{mg} 为共振相互作用.

求二阶及三阶偶极矩及极化、极化率的方法与上面相似，现将主要结果写在下面：

$$\begin{aligned}
< \vec{p}^{\,(2)} > &= < \psi^{(0)} | \vec{\mu} | \psi^{(2)} > + < \psi^{(1)} | \vec{\mu} | \psi^{(1)} > + < \psi^{(0)} | \vec{\mu} | \psi^{(2)} > \\
&= \frac{1}{\hbar^2} \sum_{pq} \sum_{mn} \left(\frac{\vec{\mu}_{gn} [\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}(\omega_q)] [\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_p)]}{(\omega_{ng} - \omega_p - \omega_q)(\omega_{mg} - \omega_p)} \right. \\
&\quad + \frac{[\vec{\mu}_{gn} \cdot \vec{E}(\omega_q)] \vec{\mu}_{nm} [\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_p)]}{(\omega_{ng}^* + \omega_q)(\omega_{mg} - \omega_p)} \\
&\quad \left. + \frac{[\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_q)] [\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}(\omega_p)] \vec{\mu}_{mg}}{(\omega_{ng}^* + \omega_q)(\omega_{mg}^* + \omega_p + \omega_q)} \right) e^{-i(\omega_p + \omega_q)t}
\end{aligned} \tag{2.4.21}$$

$$\begin{aligned}
< \vec{p}^{\,(3)} > &= \frac{1}{\hbar^3} \sum_{pqr} \sum_{mn\nu} \left(\frac{\vec{\mu}_{g\nu} [\vec{\mu}_{\nu n} \cdot \vec{E}(\omega_r)] [\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}(\omega_q)] [\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_p)]}{(\omega_{ng} - \omega_q - \omega_p - \omega_r)(\omega_{ng} - \omega_q - \omega_p)(\omega_{mg} - \omega_p)} \right. \\
&\quad + \frac{[\vec{\mu}_{g\nu} \cdot \vec{E}(\omega_r)] \vec{\mu}_{\nu n} [\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}(\omega_p)] [\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_p)]}{(\omega_{\nu g}^* + \omega_r)(\omega_{ng} - \omega_p - \omega_q)(\omega_{mg} - \omega_p)} \\
&\quad + \frac{[\vec{\mu}_{g\nu} \cdot \vec{E}(\omega_r)] [\vec{\mu}_{\nu m} \cdot \vec{E}(\omega_q)] \vec{\mu}_{nm} [\vec{\mu}_{mg} \cdot \vec{E}(\omega_p)]}{(\omega_{\nu g}^* + \omega_r)(\omega_{ng}^* + \omega_r + \omega_q)(\omega_{mg} - \omega_p)} \\
&\quad \left. + \frac{[\vec{\mu}_{g\nu} \cdot \vec{E}(\omega_r)] [\vec{\mu}_{\nu m} \cdot \vec{E}(\omega_p)] [\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}(\omega_p)] \vec{\mu}_{mg}}{(\omega_{\nu g}^* + \omega_r)(\omega_{ng}^* + \omega_r + \omega_q)(\omega_{mg}^* + \omega_r + \omega_q + \omega_p)} \right) e^{-i(\omega_p + \omega_q + \omega_r)}
\end{aligned} \tag{2.4.22}$$

由此得出二阶、三阶极化率

$$\vec{P}^{\,(2)} = N < \vec{p}^{(2)} > = \sum_r \vec{P}^{(2)}(\omega_r) e^{-i\omega_r t} \tag{2.4.23}$$

$$P_i^{(2)}(\omega_p+\omega_q,\omega_q,\omega_p)=\sum_{jk}\sum_{pq}\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p+\omega_q,\omega_q,\omega_p)E_j(\omega_q)E_k(\omega_p) \tag{2.4.24}$$

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p+\omega_q,\omega_q,\omega_p)=\frac{N}{\hbar^2}P\sum_{mn}\left(\frac{\mu_{gn}^i\mu_{nm}^j\mu_{mg}^k}{(\omega_{ng}-\omega_p-\omega_q)(\omega_{mg}-\omega_p)}\right.$$
$$\left.+\frac{\mu_{gn}^j\mu_{nm}^i\mu_{mg}^k}{(\omega_{ng}^*+\omega_q)(\omega_{mg}-\omega_p)}+\frac{\mu_{gn}^j\mu_{nm}^k\mu_{mg}^i}{(\omega_{ng}^*+\omega_q)(\omega_{mg}^*+\omega_q+\omega_p)}\right) \tag{2.4.25}$$

式中， P 指 $(j,k;q,p)$ 间的排列，例如

$$P\frac{\mu_{gn}^i\mu_{nm}^j\mu_{mg}^k}{(\omega_{ng}-\omega_p-\omega_q)(\omega_{mg}-\omega_p)}$$
$$=\frac{\mu_{gn}^i\mu_{nm}^j\mu_{mg}^k}{(\omega_{ng}-\omega_p-\omega_q)(\omega_{mg}-\omega_p)}+\frac{\mu_{gn}^i\mu_{nm}^k\mu_{mg}^j}{(\omega_{mg}-\omega_p-\omega_q)(\omega_{mg}-\omega_q)} \tag{2.4.26}$$

故二阶极化率 $\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_p+\omega_q,\omega_q,\omega_p)$ 实际上包括了 6 项. 又因为

$$\vec{P}^{(3)}=N<\vec{p}^{(3)}>=\sum\vec{P}^{(3)}(\omega_r)e^{-i\omega_r t}$$

$$P_k^{(3)}(\omega_p+\omega_q+\omega_r)=\sum_{hij}\sum_{pqr}\chi_{kjih}^{(3)}(\omega_p+\omega_q+\omega_r,\omega_r,\omega_q,\omega_p)E_j(\omega_r)E_i(\omega_q)E_h(\omega_p) \tag{2.4.27}$$

$$\begin{aligned}\chi_{kjih}^{(3)}(\omega_p+\omega_q+\omega_r) \quad = \quad & \frac{N}{\hbar^3}P\sum_{mn\nu}\frac{\mu_{g\nu}^k\mu_{\nu n}^j\mu_{nm}^i\mu_{mg}^h}{(\omega_{\nu g}-\omega_r-\omega_q-\omega_p)(\omega_{ng}-\omega_q-\omega_p)(\omega_{mg}-\omega_p)}\\
&+\frac{\mu_{g\nu}^j\mu_{\nu n}^k\mu_{nm}^i\mu_{mg}^h}{(\omega_{\nu g}^*+\omega_r)(\omega_{ng}-\omega_q-\omega_p)(\omega_{mg}-\omega_p)}\\
&+\frac{\mu_{g\nu}^j\mu_{\nu n}^i\mu_{nm}^k\mu_{mg}^h}{(\omega_{\nu g}^*+\omega_r)(\omega_{ng}^*+\omega_r+\omega_q)(\omega_{mg}-\omega_p)}\\
&+\frac{\mu_{g\nu}^j\mu_{\nu n}^i\mu_{nm}^h\mu_{mg}^k}{(\omega_{\nu g}^*+\omega_r)(\omega_{ng}^*+\omega_r+\omega_q)(\omega_{mg}^*+\omega_r+\omega_q+\omega_p)}\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

式中， P 为 $(j,i,h;r,q,p)$ 间排列，故三阶极化率实际上包括 24 项.

由三阶极化与极化率的一般公式 (2.4.28), 可求得 $\omega_r=\omega_q=\omega_p=\omega$, 即三次谐波的极化率

$$\vec{P}^{(3)}=\vec{P}^{(3)}(3\omega)e^{-i3\omega t}+c.c$$
$$\vec{E}=\vec{E}(\omega)e^{-i\omega t}+c.c$$
$$P^{(3)}(3\omega)=\chi^{(3)}(3\omega)E^3$$

$$\begin{aligned}\chi^{(3)}(3\omega) \quad = \quad & \frac{N}{\hbar^3}\sum_{mn\nu}\mu_{g\nu}\mu_{\nu n}\mu_{nm}\mu_{mg}\left[\frac{1}{(\omega_{\nu g}-3\omega)(\omega_{ng}-2\omega)(\omega_{mg}-\omega)}\right.\\
&+\frac{1}{(\omega_{\nu g}^*+\omega)(\omega_{ng}-2\omega)(\omega_{mg}-\omega)}+\frac{1}{(\omega_{\nu g}^*+\omega)(\omega_{ng}^*+2\omega)(\omega_{mg}-\omega)}\\
&\left.+\frac{1}{(\omega_{\nu g}^*+\omega)(\omega_{ng}^*+2\omega)(\omega_{mg}^*+3\omega)}\right]\end{aligned} \tag{2.4.29}$$

2.5 密度矩阵方程及其微扰解法

2.5.1 密度矩阵方程

Schrödinger 方程所描述的是不包含弛豫时间的守恒系统，故基于求解 Schrödinger 方程波函数法不能处理由于碰撞引起的谱线加宽等问题. 也正因为没有考虑谱线加宽，所以当光场频率与原子跃迁频率为共振时，分母趋于 0，微扰波函数系数趋于发散. 为了克服这类困难，量子力学密度矩阵方法便相应发展起来. 与 Schrödinger 方程的不同之处在于密度矩阵方程中已唯象地引进了表征弛豫参数，如寿命 T_1 及谱线宽度 $1/T_2$ 等.

方程 (2.4.6) 给出波函数 $\psi(\vec{r},t)$ 按原子波函数 $u_n(\vec{r})e^{-iE_nt/\hbar}$ 的展开式. 设原子处于 $\psi_s(\vec{r},t)$ 状态，则按量子力学基本假定，物理量 A 的期待值 $<A>$ 可表示为

$$<A>=\int \psi_s^*(\vec{r},t)A\psi_s(\vec{r},t)d\vec{r} \tag{2.5.1}$$

按 (2.4.6) 式，将 $\psi_s(\vec{r},t)$ 展开为

$$\psi_s(\vec{r},t)=\sum_n C_n^s(t)\vec{u}_n(\vec{r}) \tag{2.5.2}$$

将 (2.5.2) 式代入 (2.5.1) 式，得

$$\begin{aligned}<A>&=\sum_{mn} C_m^{s*}C_n^sA_{mn}\\ A_{mn}&=\int u_m^*Au_nd\vec{r}\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

$\psi_s(\vec{r},t)$ 满足 Schrödinger 方程 (2.3.1)，称之为纯态 [12]. (2.5.1) 式是按纯 $\psi_s(\vec{r},t)$ 计算期待值，纯态是量子力学中确定的状态. 在很多情况下，我们并不确切地知道原子处于哪一纯态中，只是概率地知道原子处于 $\psi_s(\vec{r},t)$ 的概率为 $p(s)$，还可能处于其它纯态 $\psi_{s'}(\vec{r},t)$，概率为 $p(s')$. 故还需将 (2.5.3) 式对各种状态按几率 $p(s)$ 求平均，并用 $\overline{<A>}$ 表示求平均后的 $<A>$ 值

$$\overline{<A>}=\sum_s p(s)\sum_{mn} C_m^{s*}C_n^sA_{mn}=\sum_{nm}\rho_{nm}A_{mn} \tag{2.5.4}$$

$$\begin{aligned}\rho_{nm}&=\sum_s p(s)C_m^{s*}C_n^s\\ \sum_s p(s)&=1\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

按概率分布的各个状态称之为混态，相对于纯态来说，混态是不确定的，是按照通常统计意义的几率 $p(s)$ 分布的各个态 $\psi_s(\vec{r},t)$ 的混合，只有当某一特定的“s”态的分布几率 $p(s)\to 1$ 时，才趋于纯态. (2.5.4) 式就是对混态几率 $p(s)$ 的平均. 由 (2.5.5) 式定义的矩阵元 ρ_{nm} 即量子力学密度矩阵元，当某一 $p(s)\to 1$ 时，则

$$\rho_{nm}\to C_n^{s*}C_m^s \tag{2.5.6}$$

现讨论 ρ_{nm} 的物理意义. 其中对角矩阵元

$$\rho_{nn}=\sum_s p(s)C_n^{s*}C_n^s=\sum_s p(s)|C_n^s|^2 \tag{2.5.7}$$

为处于 n 态的几率；非对角矩阵元

$$\rho_{nm} = \sum_s p(s) C_n^{s*} C_m^s = \sum_s p(s) |C_n^{s*} C_m^s| e^{i(\Phi_m^s - \Phi_n^s)}, \quad n \neq m \tag{2.5.8}$$

则表示状态 n 与状态 m 间的关联. 这种关联将在原子辐射的谱线宽度中体现出来，它不仅与振幅 $|C_n^{s*} C_m^s|$ 有关，还与初始相位差 $\Phi_n^s - \Phi_m^s$ 有关，后者是很重要的. 例如在热平衡情况下，由于原子间的频繁碰撞，初位相 Φ_m^s, Φ_n^s 完全无规，相位差 $\Delta\Phi = \Phi_m^s - \Phi_n^s$ 在 $(0, 2\pi)$ 内均匀分布，故有

$$\rho_{nm} \propto \int_0^{2\pi} e^{i\Delta\Phi} \frac{d\Delta\Phi}{2\pi} = 0$$

这就是非相干情形. 另一方面，在没有碰撞的相干的情形，$\Delta\Phi = \Phi_m^s - \Phi_n^s$ 取一特定的数值，而不是在 $(0, 2\pi)$ 内均匀分布. $e^{i\Delta\Phi}$ 可从 (2.5.8) 和式求和号中提出来，而不影响 ρ_{nm} 的绝对值.

现将 (2.5.4) 式的两重求和写成矩阵求迹的形式：

$$\overline{<A>} = \sum_{nm} \rho_{nm} A_{mn} = \sum_n (\rho A)_{nn} = \mathrm{tr}(\rho A) \tag{2.5.9}$$

故物理量 A 的期待值 $<A>$ 对混态求平均 $\overline{<A>}$, 即密度矩阵 ρ 与算子 A 的积 ρA 的对角元之和，即求迹. 密度矩阵 ρ 的矩阵元 ρ_{nm} 由 (2.5.5) 式定义，现在求 ρ_{nm} 对时间的导数，并假定 $p(s)$ 不随时间变化. $\dfrac{dC_n^s}{dt}, \dfrac{dC_m^{s*}}{dt}$ 按 (2.4.6) 式消去，便得

$$\begin{aligned}
\dot{\rho}_{nm} &= \sum_s p(s) \left(C_m^{s*} \frac{dC_n^s}{dt} + \frac{dC_m^{s*}}{dt} C_n^s \right) \\
&= \frac{1}{i\hbar} \sum_s p(s) \left(\sum_\nu C_m^{s*} H_{n\nu} C_\nu^s - \sum_s H_{\nu m} C_\nu^{s*} C_n^s \right) \\
&= \frac{-i}{\hbar} \sum_\nu (H_{n\nu} \rho_{\nu m} - \rho_{n\nu} H_{\nu m}) \\
&= \frac{-i}{\hbar} (H\rho - \rho H)_{nm} = \frac{-i}{\hbar} [H\ ,\ \rho]_{nm}
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

(2.5.10) 式为密度矩阵随时间的演化方程,. 与 Schrödinger 方程 (2.3.1) 等价. H 为包括 H_0 与相互作用 H' 在内的哈密顿量，是完全确定的.

一些不确定的因素，如原子间的碰撞的影响，在 (2.3.1),(2.5.10) 式中均没有包括进去，因为碰撞的结果将使得原子系统改变其在 n, m 状态的几率与初位相，亦即改变了原子在 $\psi^s(\vec{r}, t)$ 态的分布几率，于是有 $\dfrac{dp(s)}{dt} \neq 0$. 这与我们在导出 (2.5.10) 式时假定 $p(s)$ 不随时间变化是相悖的. 故 $\dfrac{dp(s)}{dt} = 0$ 与 (2.3.1) 和 (2.5.10) 式，均不包含不确定的因素，不确定的因素导致 $\dfrac{dp(s)}{dt} \neq 0$. 但是直接计算有困难. 我们可在 ρ_{nm} 的演化方程中，唯象地引进一些表现弛豫过程的参量 γ_{nm}, 来体现这些不确定的因素的影响 [1], 即

$$\dot{\rho}_{nm} = -i/\hbar [H, \rho]_{nm} - \gamma_{nm} (\rho_{nm} - \bar{\rho}_{nm}) \tag{2.5.11}$$

式中的第二项为弛豫项，γ_{nm} 为弛豫系数，$\bar{\rho}_{nm}$ 为稳态值. 考虑到在热平衡情况下各状态的初位相是无规则的，故非对角矩阵元 ρ_{nm} 的稳态值 $\bar{\rho}_{nm}$ 应为 0, 故可将 (2.5.11) 式写为

$$\dot{\rho}_{nm} = -i/\hbar[H,\rho]_{nm} - \gamma_{nm}\rho_{nm}, \qquad n \neq m \tag{2.5.12}$$

$$\dot{\rho}_{nn} = -i/\hbar[H,\rho]_{nn} - \gamma_{nn}(\rho_{nn} - \bar{\rho}_{nn}) \tag{2.5.13}$$

可以证明对角矩阵元的弛豫 γ_{nn}, γ_{mm} 与非对角矩阵元的弛豫系数 γ_{nm} 之间存在关系

$$\gamma_{nm} = \frac{1}{2}(\gamma_{nn} + \gamma_{mm}) + \gamma_{nm}^c \tag{2.5.14}$$

式中，γ_{nm}^c 表示原子碰撞对位相的影响. 对角矩阵元弛豫 γ_{nn} 即为原子处于 n 态的寿命的倒数. 设初始时原子处于 n 态的几率为 $|C_n(0)|^2$, 则经过时间 t 的弛豫后

$$|C_n(t)|^2 = |C_n(0)|^2 e^{-\gamma_{nn}t}$$

故有 $$C_n(t) = C_n(0)e^{-\gamma_{nn}t/2 - i\Phi_n - i\omega_n t}$$

同样 $$C_m(t) = C_m(0)e^{-\gamma_{mm}t/2 - i\Phi_m - i\omega_m t} \tag{2.5.15}$$

$$\begin{aligned}\rho_{nm}(t) &= \sum_s p(s)C_m^{s*}(t)C_n^s(t) \\ &= \sum_s P(s)C_m^{*s}(0)C_n^s(0)\exp[-(\gamma_{nn}+\gamma_{mm})t/2 - i\omega_{nm}t]\overline{\exp[i(\Phi_m - \Phi_n)]}\end{aligned} \tag{2.5.16}$$

式中，$\overline{\exp[i(\Phi_m - \Phi_n)]}$ 为碰撞而引起的失相

$$\overline{e^{i(\Phi_m - \Phi_n)}} = \overline{e^{-i\Delta\Phi}} \simeq \overline{1 - i\Delta\Phi - (\Delta\Phi)^2/2} = 1 - \gamma_{nm}^c t \simeq e^{-\gamma_{nm}^c t} \tag{2.5.17}$$

将 (2.5.17) 式代入 (2.5.16) 式，得

$$\begin{gathered}\rho_{nm}(t) = \sum_s P(s)C_m^{*s}(0)C_n^s(0)e^{-\gamma_{nm}t - i\omega_{nm}t} = \rho_{nm}(0)e^{-\gamma_{nm}t - i\omega_{nm}t} \\ \gamma_{nm} = \frac{1}{2}(\gamma_{nn} + \gamma_{mm}) + \gamma_{nm}^c\end{gathered} \tag{2.5.18}$$

应用 (2.5.18) 式可求得原子的偶极矩 $\vec{\mu}$ 的期待值为

$$\overline{<\vec{\mu}>} = \vec{\mu}_{mn}\rho_{nm}(t) + \vec{\mu}_{nm}\rho_{mn}(t) = \vec{\mu}_{mn}\rho_{nm}(0)e^{-\gamma_{nm}t - i\omega_{nm}t} + c.c \tag{2.5.19}$$

故在外场为 0 的情况下，原子的偶极矩自发辐射的线宽为 γ_{nm}.

2.5.2 用微扰法解密度矩阵方程

按前面方程 (2.4.5) 式导出迭代方程 (2.4.8) 式的方法，我们不难由密度矩阵方程 (2.5.11) 出发导出相应的迭代方程. 注意到 $H = H_0 + H'$, 且

$$[H_0, \rho]_{nm} = (H_0\rho - \rho H_0)_{nm} = (E_n - E_m)\rho_{nm} \tag{2.5.20}$$

于是 (2.5.11) 式可写为

$$\frac{d\rho_{nm}}{dt} = (-i\omega_{nm} - \gamma_{nm})\rho_{nm} - \frac{i}{\hbar}[H', \rho]_{nm} + \gamma_{nm}\bar{\rho}_{nm} \tag{2.5.21}$$

将 ρ_{nm} 按下式展开：

$$\rho_{nm} = \rho_{nm}^{(0)} + \rho_{nm}^{(1)} + \cdots + \rho_{nm}^{(s)} + \cdots$$
$$\rho_{nm}^{(s)} \propto (H')^s \tag{2.5.22}$$

将 (2.5.22) 式代入 (2.5.20) 式，并比较 H' 的同次幂，便得

$$\dot{\rho}_{nm}^{(0)} = -i\omega_{nm}\rho_{nm}^{(0)} - \gamma_{nm}^{(0)}(\rho_{nm}^{(0)} - \bar{\rho}_{nm}) \tag{2.5.23}$$

$$\dot{\rho}_{nm}^{(s)} = -i(\omega_{nm}^{(0)} + \gamma_{nm})\rho_{nm}^{(s)} - i/\hbar[H', \rho^{(s-1)}]_{nm}, \quad s = 1, 2, \cdots \tag{2.5.24}$$

由 (2.5.23) 式易看出 $\rho_{nm}^{(0)}$ 的解为

$$\rho_{nn}^{(0)} = \bar{\rho}_{nn}$$
$$\rho_{nm}^{(0)} = \bar{\rho}_{nm} = 0, \qquad n \neq m \tag{2.5.25}$$

由 (2.5.24) 式，得

$$\rho_{nm}^{(s)} = \int_{-\infty}^{t} \frac{-i}{\hbar}[H', \rho^{(s-1)}]_{nm} e^{-(i\omega_{nm}+\gamma_{nm})(t-t')} dt' \tag{2.5.26}$$

注意到

$$[H', \rho^{(0)}]_{nm} = -\sum_{\nu}(\vec{\mu}_{n\nu}\rho_{\nu m}^{(0)} - \rho_{n\nu}^{(0)}\vec{\mu}_{\nu m}) \cdot \vec{E} = -(\bar{\rho}_{mm} - \bar{\rho}_{nn})\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E} \tag{2.5.27}$$

$$\vec{E} = \sum_{p} \vec{E}(\omega_p) e^{-i\omega_p t} \tag{2.5.28}$$

将 (2.5.27) 式代入 (2.5.26) 式，得

$$\begin{aligned} \rho_{nm}^{(1)}(t) &= i\frac{\bar{\rho}_{mm} - \bar{\rho}_{nn}}{\hbar} \sum_{p} \vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}(\omega_p) e^{-i(\omega_{nm} - i\gamma_{nm})t} \int_{-\infty}^{t} e^{(i(\omega_{nm}-\omega_P)+\gamma_{nm})t'} dt' \\ &= \frac{\bar{\rho}_{mm} - \bar{\rho}_{nn}}{\hbar} \sum_{p} \frac{\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}(\omega_p) e^{-i\omega_p t}}{\omega_{nm} - \omega_p - i\gamma_{nm}} \end{aligned} \tag{2.5.29}$$

利用 $\rho_{nm}^{(1)}(t)$ 可计算感生偶极矩的期待值

$$\begin{aligned} \overline{<\vec{\mu}>} &= \mathrm{tr}[\rho_{nm}^{(1)}(t)\vec{\mu}] = \sum_{nm} \rho_{nm}^{(1)} \vec{\mu}_{mn} \\ &= \sum_{nm} \frac{\bar{\rho}_{mm} - \bar{\rho}_{nn}}{\hbar} \sum_{p} \frac{\vec{\mu}_{mn}[\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}(\omega_p)] e^{-i\omega_p t}}{\omega_{nm} - \omega_p - i\gamma_{nm}} \end{aligned} \tag{2.5.30}$$

将 $\overline{<\vec{\mu}>}$ 写成 $\sum_{p} <\vec{\mu}(\omega_p)> e^{-i\omega_p t}$ 形式，便得

$$<\vec{\mu}(\omega_p)> = \sum_{nm} \frac{\bar{\rho}_{mm} - \bar{\rho}_{nn}}{\hbar} \frac{\vec{\mu}_{mn}(\vec{\mu}_{nm} \cdot \vec{E}(\omega_p))}{\omega_{nm} - \omega_p - i\gamma_{nm}} \tag{2.5.31}$$

由此可求得线性极化 $\vec{P}^{(1)}(\omega_p)$ 及极化率 $\chi_{ij}^{(1)}(\omega_p)$ 分别为

$$\vec{P}^{(1)}(\omega_p) = N <\vec{\mu}(\omega_p)> = \vec{\chi}^{(1)}(\omega_p) \cdot \vec{E}(\omega_p) \tag{2.5.32}$$

$$\chi^{(1)}(\omega_p) = \frac{N}{\hbar}\sum_{nm}(\bar{\rho}_{mm} - \bar{\rho}_{nn})\frac{\vec{\mu}_{mn}\vec{\mu}_{nm}}{\omega_{nm} - \omega_p - i\gamma_{nm}} \tag{2.5.33}$$

或

$$\begin{aligned}\chi_{ij}^{(1)}(\omega_p) &= \frac{N}{\hbar}\sum_{nm}(\bar{\rho}_{mm} - \bar{\rho}_{nn})\frac{\mu_{mn}^i\mu_{nm}^j}{\omega_{nm} - \omega_p - i\gamma_{nm}} \\ &= \frac{N}{\hbar}\sum_{nm}\bar{\rho}_{mm}\left(\frac{\mu_{mn}^i\mu_{nm}^j}{\omega_{nm} - \omega_p - i\gamma_{nm}} + \frac{\mu_{mn}^i\mu_{nm}^j}{\omega_{nm} + \omega_p + i\gamma_{nm}}\right)\end{aligned} \tag{2.5.34}$$

这结果与波函数微扰法得到的结果 (2.4.20) 式比较，主要是增加了弛豫 γ_{nm} 及布居数 $\bar{\rho}_{mm}$ 的影响．若初始时原子处于基态，则有

$$\bar{\rho}_{gg} = 1, \quad \bar{\rho}_{mm} = 0, \qquad m \neq g \tag{2.5.35}$$

$$\chi_{ij}^{(1)} = \frac{N}{\hbar}\sum_{n}\left(\frac{\mu_{gn}^i\mu_{ng}^j}{\omega_{ng} - \omega_p - i\gamma_{ng}} + \frac{\mu_{gn}^i\mu_{ng}^j}{\omega_{ng} + \omega_p + i\gamma_{ng}}\right) \tag{2.5.36}$$

对于二能级原子，上式对 n 的求和号可去掉，并略去反共振的第二项，便得二能级的极化率公式

$$\chi_{ij}^{(1)}(\omega_p) = \frac{N}{\hbar}\frac{\mu_{gn}^i\mu_{ng}^j}{\omega_{ng} - \omega_p - i\gamma_{ng}} \tag{2.5.37}$$

其实部与虚部如图 2.7 所示，为具有宽度 $2\gamma_{ng}$ 的 Lorentz 线型．折射率 $n(\omega)$ 也可通过线性极化率 $\chi^{(1)}(\omega)$ 来计算，即

$$\begin{aligned}n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} &= \sqrt{1 + 4\pi\chi^{(1)}(\omega)} \\ &\simeq 1 + 2\pi\chi^{(1)}(\omega)\end{aligned} \tag{2.5.38}$$

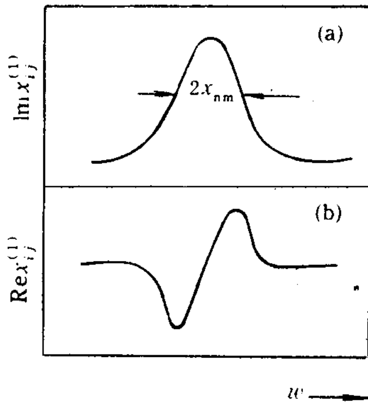


图 2.7　$\chi_{ij}^{(1)}$ 随 ω 的变化曲线

又设

$$n = n' + in'' \tag{2.5.39}$$

而传播的波矢为 k，则有

$$k = \frac{n'(\omega)\omega}{c} \tag{2.5.40}$$

对波幅的吸收系数为

$$\alpha = \frac{n''(\omega)\omega}{c} \tag{2.5.41}$$

2.6 波场 $\psi(r,t)$ 的量子化

在经典极限情形，原子是粒子，满足经典力学粒子运动方程．经过量子化得出的 Schrödinger 方程 (2.3.1) 却赋予原子以波函数 $\psi(r,t)$ 的描述，同样在经典极限情形，光是波，满足 Maxwell 方程，波场经过量子化后便给出光场的粒子，即光子描述．但场的量子化不仅适用于光场，也适用于满足 Schrödinger 方程的物质波场 $\psi(r,t)$．虽然 $\psi(r,t)$

经量子化后又回到但不是简单地回到粒子，而是由单粒子理论向多粒子理论的转化，最重要的是包含了粒子的产生与湮没算符及算符对易规则所蕴含的粒子统计．习惯上称由经典的能量守恒方程 $E=p^2/2m+V(r,t)$ 出发，应用算子法 $E\to i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\vec{p}\to -i\hbar\nabla$ 得出 Schrödinger 方程 (2.3.1) 为一次量子化，而由 $\psi(r,t)$ 出发应用场算子的对易规则使场量子化为二次量子化．光与原子相互作用本身就包含了场与粒子两个方面．故只讨论由粒子得出物质波 $\psi(r,t)$ 所满足的 Schrödinger 方程 (2.3.1) 是不够的，还必须讨论电磁场及物质波场 $\psi(r,t)$ 的量子化，由此得出的粒子表象也是本书常谈到的表象．这一节我们简要介绍非相对论波场 $\psi(r,t)$ 的量子化．关于电磁场的量子化放到第五章讨论．

参照 (2.4.4) 式，将波函数 $\psi(\vec{r},t)$ 及其共轭波函数 $\psi^\dagger(\vec{r},t)$ 用定态解 (2.4.2) 展开

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r},t)&=\sum_k a_k(t)u_k(\vec{r})e^{-i\omega_k t}\\ \psi^\dagger(\vec{r},t)&=\sum_k a_k^\dagger(t)u_k^*(\vec{r})e^{i\omega_k t}\end{aligned}\tag{2.6.1}$$

并将其中的展开系数 $a_k(t), a_k^\dagger(t)$ 算符化．式中 a_k ，$a_k^\dagger$ 分别为状态 k 的产生与湮灭算符，它们在相互作用绘景中的运动方程参照 (2.4.5) 式为

$$\begin{aligned}\frac{da_k}{dt}&=-i/\hbar\sum_n <n|H'|k>e^{i\omega_{kn}t}a_n\\ \frac{da_k^\dagger}{dt}&=i/\hbar\sum_n <k|H'|n>e^{-i\omega_{kn}t}a_n^\dagger\end{aligned}\tag{2.6.2}$$

引进粒子数算符 $N_k=a_k^\dagger a_k$,a_k ，a_k 的对易规则为

$$\begin{aligned}&[a_k,a_l]_\pm=a_ka_l\pm a_la_k=0\\ &[a_k^\dagger,a_l^\dagger]_\pm=a_k^\dagger a_l^\dagger\pm a_l^\dagger a_k^\dagger=0\\ &[a_k,a_l^\dagger]_\pm=a_ka_l^\dagger\pm a_l^\dagger a_k=\delta_{kl}\end{aligned}\tag{2.6.3}$$

在上式中，按粒子服从 Bose 统计或 Fermi 统计，分别取“ − ”或“ + ”号．取“ − ”号时，称之为对易关系；取“ + ”号时，称之为反对易关系．

服从对易关系 $a_ka_k^\dagger-a_k^\dagger a_k=1$ 的 Bose 子，其粒子数态 (即粒子算符 $N_k=a_k^\dagger a_k$ 的本征态) 可表示为 $|n_1,n_2\cdots n_k\cdots>$,$a_k,a_k^\dagger$ 作用于其上，得

$$\begin{aligned}a_k|n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots>&=n_k^{1/2}|n_1,\cdots,n_k-1,\cdots>\\ a^\dagger|n_1,n_2,\cdots,n_k,\cdots>&=(n_k+1)^{1/2}|n_1,\cdots,n_k+1,\cdots>\end{aligned}\tag{2.6.4}$$

易证由 (2.6.4) 式定义的 $a_k,a_k^\dagger$ 满足对易关系 $a_ka_k^\dagger-a_k^\dagger a_k=1$. 事实上，由 (2.6.4) 式得

$$\begin{aligned}(a_ka_k^\dagger-a_k^\dagger a_k)|n_1,\cdots,n_k,\cdots>&=|n_1,\cdots,n_k,\cdots>\\ a_ka_k^\dagger-a_k^\dagger a_k&=1\end{aligned}\tag{2.6.5}$$

另一方面，满足反对易关系 $a_ka_k^\dagger+a_k^\dagger a_k=1$ 的 Fermi 子，是服从 Pauli 不相容原理的，因此

$$N_k^2=a_k^\dagger a_ka^\dagger a_k=a_k^\dagger(1-a_k^\dagger a_k)a_k=a_k^\dagger a_k=N_k\tag{2.6.6}$$

设 N_k 的本征值为 n_k, 则

$$N_k^2|n_1,\cdots,n_k,\cdots>=n_k^2|n_1,\cdots,n_k,\cdots> \tag{2.6.7}$$

$$N_k|n_1,\cdots,n_k,\cdots>=n_k|n_1,\cdots,n_k,\cdots> \tag{2.6.8}$$

由 (2.6.6)~(2.6.8) 式得 $n_k^2=n_k, n_k=0,1$, 即同一状态 k 中最多只能有一个粒子. 相应于本征值 $n_k=0,1$ 的本征态可表示为

$$|0>=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad |1>=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{2.6.9}$$

满足 Fermi 子反对易关系的 $a,a^\dagger$ 的矩阵表示为

$$a=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \qquad a^\dagger=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} \tag{2.6.10}$$

由 (2.6.9) 和 (2.6.10) 式易证下面的关系成立：

$$a|n>=n|1-n>, \qquad a^\dagger|n>=(1-n)|1-n> \tag{2.6.11}$$

系统的状态仍可写为 $|n_1,n_2,\cdots n_k,\cdots>$. 考虑到要同时满足 (2.6.3) 式前面两个对易关系， (2.6.11) 式应推广为 (与 (2.6.4) 式相对应)[12]

$$\begin{gathered}a_k|n_1,\cdots,n_k,\cdots>=\theta_k n_k|n_1,\cdots,1-n_k,\cdots>\\ a_k^\dagger|n_1,\cdots,n_k,\cdots>=\theta_k(1-n_k)|n_1,\cdots,1-n_k,\cdots>\\ \theta_k=(-1)^{\nu_k}, \qquad \nu_k=\sum_{j=1}^{k-1}n_j\end{gathered} \tag{2.6.12}$$

还可证明总的粒子数 $N=\sum a_k^\dagger a_k$ 是一个常数，因为

$$\begin{aligned}&\frac{dN}{dt}=\sum_k\left(\frac{da_k^\dagger}{dt}a_k+a_k^\dagger\frac{da_k}{dt}\right)\\ &=i/\hbar\sum_k\sum_n\left(<k|H'|n>a_n^\dagger e^{-i\omega_{kn}t}a_k-a_k^\dagger<n|H'|k>a_ne^{i\omega_{kn}t}\right)\\ &=i/\hbar\sum_k\sum_n(<n|H'|k>-<n|H'|k>)a_k^\dagger a_ne^{i\omega_{kn}t}=0\end{aligned} \tag{2.6.13}$$

对于含单电子的二能级原子系统， $N=1,k=1,2$. 由 $a_2^\dagger a_2+a_1a_1^\dagger=1$ 及一个能级上电子不能连续湮灭 (或产生) 两次，因总共只有一个电子，故有

$$a_1a_1=a_1^+a_1^+=a_2a_2=a_2^\dagger a_2^\dagger=0$$

定义 $\sigma^+=a_2^\dagger a_1$, $\sigma^-=a_1^\dagger a_2$, $\sigma_z^-=(a_2^\dagger a_2-a_1^\dagger a_1)/2$, $\sigma^+(\sigma^-)$ 为电子的上升 (下降) 算符，即电子由基态跃迁到激发态 (或由激发态跃迁到基态), σ_z 为处于激发态原子数与处于基态原子数之差除以 2, 即半反转粒子数. 根据 $\sigma^\pm,\sigma_z$ 的定义可以证明

$$\begin{aligned}\sigma^+\sigma^-+\sigma^-\sigma^+ &= a_2^\dagger a_1a_1^\dagger a_2+a_1^\dagger a_2a_2^\dagger a_1\\ &= a_1^\dagger(1-a_1^\dagger a_1)a_2+a_1^\dagger(1-a_2^\dagger a_2)a_1\\ &= a_2^\dagger a_2+a_1^\dagger a_1=1\end{aligned} \tag{2.6.14}$$

同样

$$\begin{aligned}&\sigma^+\sigma^- - \sigma^-\sigma^+ = a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1 = 2\sigma_z\\&\sigma^{+2} = \sigma^{-2} = 0\\&\sigma^\pm\sigma_z - \sigma_z\sigma^\pm = \mp\sigma^\pm\end{aligned} \tag{2.6.15}$$

参照 (2.6.13) 式的计算方法，可求得二能级原子系统 $\sigma_z,\sigma^-,\sigma^+$ 的运动方程

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_z}{dt} &= -i\frac{\tilde{\Omega}^*}{2}\sigma^- + i\frac{\tilde{\Omega}}{2}\sigma^+\\ \frac{d\sigma^-}{dt} &= -i\tilde{\Omega}\sigma_z\\ \frac{d\sigma^+}{dt} &= i\tilde{\Omega}^*\sigma_z\end{aligned} \tag{2.6.16}$$

式中

$$\begin{aligned}\tilde{\Omega} &= -2\frac{<1|H'|2>}{\hbar}e^{-i\omega_{12}t}\\ &= \frac{2\mu_{12}E(\omega_p)}{\hbar}(e^{i\omega_p t} + e^{-i\omega_p t}) \simeq \Omega e^{-i\Delta\omega t}\\ \Omega &= \frac{2\mu_{12}E(\omega_p)}{\hbar}, \quad \Delta\omega = \omega_p - \omega_{21}\end{aligned} \tag{2.6.17}$$

参照在密度矩阵方程 (2.5.21) 中引入弛豫系数的办法，在方程 (2.6.16) 中引进弛豫系数 γ_1,γ_2 及 $\bar{\sigma}_z$，便得 Bloch 方程

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_z}{dt} &= -\gamma_1(\sigma_z - \bar{\sigma}_z) - i\frac{\tilde{\Omega}^*}{2}\sigma^- + i\frac{\tilde{\Omega}}{2}\sigma^+\\ \frac{d\sigma^-}{dt} &= -\gamma_2\sigma^- - i\tilde{\Omega}\sigma_z\\ \frac{d\sigma^+}{dt} &= -\gamma_2\sigma^+ + i\tilde{\Omega}\sigma_z\end{aligned} \tag{2.6.18}$$

式中，$\gamma_1 = \frac{1}{T_1}, \gamma_2 = \frac{1}{T_2}$. T_1 为原子处于激发态的寿命，也称为纵弛豫时间；T_2 为原子的位相失相时间，也称为横弛豫时间. 它反映原子辐射的线宽，与原子的自发辐射寿命及碰撞频率有关.

2.7 绝热定理与 Berry 位相

在 2.4 节中，我们详细地讨论了用弱场微扰方法，即用定态波函数展开法求解 Schrödinger 方程. 但从量子力学的实际出发，还有一种绝热展开也是很重要的.

现考虑一系统的哈密顿量是含时的，即 $H = H(t)$，而且对于每一时刻 t 均能求出 $H(t)$ 的本征态 $|n(t)>$ 及相位的本征值 $E_n(t)$，即

$$H(t)|n(t)>= E_n(t)|n(t)> \tag{2.7.1}$$

又设系统在 $t=0$ 时于本征态 $|n(0)>$，具有本征值 $E_n(0)$，那么当 $t>0$ 时，系统处于什么样的状态，并具有什么样的本征值呢？为求解这一问题，仍像前面做的一样，将待求系统的状态 $|\Psi(t)>$ 用 (2.7.1) 式的本征态展开为

$$\Psi(t) = \sum_n a_n(t) e^{-i/\hbar \int_0^t E_n(t')dt'} |n(t)> \tag{2.7.2}$$

将这个方程代入 Schrödinger 方程，便得

$$\dot{a}_k(t) = -\sum_n a_n(t) e^{-i/\hbar \int_0^t dt'(E_n(t')-E_k(t'))} < k(t)|\dot{n}(t)> \tag{2.7.3}$$

式中，$\dot{a}_k(t), |\dot{n}(t)>$ 分别表示 $\dfrac{da_k(t)}{dt}, \dfrac{d}{dt}|n(t)>$. 为得到 (2.7.3) 式中的 $<k|\dot{n}>$, 将 (2.7.1) 式对时间微分

$$\frac{\partial H}{\partial t}|n> + H|\dot{n}> = \dot{E}_n(t)|n> + E_n(t)|\dot{n}> \tag{2.7.4}$$

并用 $<k|$ 作用于上式，便得

$$<k|\dot{n}> = \frac{<k|\dfrac{\partial H}{\partial t}|n>}{E_n - E_k}, \qquad k \neq n \tag{2.7.5}$$

对 $k = n$ 的情形 $<n|\dot{n}>$, 考虑到规一化 $<n|n>=1$, 故有

$$\begin{aligned} &<\dot{n}|n> + <n|\dot{n}> = 0 \\ &<n|\dot{n}> = -i\dot{\gamma}_n(t) \end{aligned} \tag{2.7.6}$$

现取新的本征态 $|n'>$, 使之增加一相位因子 $e^{i\gamma_n(t)}$(这是允许的，因在任一瞬间波函数的位相可以是任意的 [12]), 即

$$\begin{aligned} |n'> &= |n> e^{i\gamma_n(t)} \\ <n'|\dot{n}'> &= <n|\dot{n}> + i\dot{\gamma}_n(t) = 0 \end{aligned} \tag{2.7.7}$$

同样取 $<n'| = <n|e^{-i\gamma_n(t)}$, 则得

$$<\dot{n}'|n'> = 0 \tag{2.7.8}$$

故采用 $|n'>$ 为基，则 (2.7.3) 式中涉及的 $<k'|\dot{n}'>$ 便完全定了. 这就是通常所说的绝热定理 [12]. 从非定态方程 (2.7.3) 来看，采用 $|n>$ 或 $|n'>$ 均是可以的，因 $|n>$ 与 $|n'>$ 一样是完备的. 虽然非定态解方程 (2.7. 3) 的形式略有区别，如

$$\dot{a}_{k'}(t) = -\sum_{n' \neq k'} a_{n'}(t) e^{-i/\hbar \int_0^t (E_{n'}(t')-E_{k'}(t'))dt'} < k'(t)|\dot{n}'(t)> \tag{2.7.9}$$

$$\dot{a}_k(t) = i\dot{\gamma}_k(t) a_k(t) - \sum_{n \neq k} a_n(t) e^{-i/\hbar \int_0^t (E_n(t')-E_k(t'))dt'} < k(t)|\dot{n}(t)> \tag{2.7.10}$$

(2.7.9) 和 (2.7.10) 式分别为取 $|n'>$ 和 $|n>$ 为基的非定态方程 (2.7.3) 的表示式，但取 $|n>$ 为基，$<n|\dot{n}> = -i\dot{\gamma}_n(t)$ 有可能通过物理实验进行测量，有明确的物理意义 [13].Berry 注意到这一点 [13], 不采用绝热定理 (2.7.7)~(2.7.9) 式，而用了一般的关系式 (2.7.6) 与 (2.7.10), 当初始时 $a_k(0) = \delta_{kn}$, 则应用 (2.7.5) 式，(2.7.10) 式可近似为

$$\begin{aligned} &\dot{a}_k(t) \simeq (\hbar\omega_{kn})^{-1} <k|\dot{H}|n> e^{i\omega_{kn}t} \\ &a_k(t) \simeq (i\hbar\omega_{kn}^2)^{-1} <k|\dot{H}|n> e^{i\omega_{kn}t} \\ &a_n(t) = e^{i\gamma_n(t)} a_n(0) \end{aligned} \tag{2.7.11}$$

现在研究由 (2.7.6) 式定义的 $\gamma_n(t)$ 的性质. 假定 H 随时间的变化可归结为其中有一个随时间 t 变化的矢量 $\vec{R}(t)$, 这样 $|n(t)>$ 对 t 的依赖亦体现在 $\vec{R}(t)$ 上，因此我们将它记作 $|n(\vec{R})>$. 定义

$$\vec{A}_n(\vec{R}) = i < n(\vec{R})|\nabla_R n(\vec{R}) > \tag{2.7.12}$$

于是由 (2.7.6) 式得

$$\dot{\gamma}_n(t) = i < n(\vec{R})|\dot{n}(\vec{R}) >= \vec{A}_n(\vec{R}) \cdot \dot{\vec{R}}(t) \tag{2.7.13}$$

解出

$$\gamma_n(t) = \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(t)} d\vec{R} \cdot \vec{A}_n(\vec{R}) \tag{2.7.14}$$

上式表明由初始的 $\vec{R}(0)$ 出发经历时间 t,$\vec{R}$ 运动至 $\vec{R}(t)$ 时 $\gamma_n(t)$ 的值. 特别是 $\vec{R}(t)$ 与 $\vec{R}(0)$ 重合，由 $\vec{R}(0)$ 至 $\vec{R}(t)$, 矢量的端点恰描述了一个闭路 C, 则 (2.7.16) 式可写为

$$\gamma_n(C) = \oint_C d\vec{R} \cdot \vec{A}_n(\vec{R}) = \int\int d\vec{s} \cdot (\nabla \times \vec{A}_n) \tag{2.7.15}$$

这后一等式是用了 Stokes 定理. 当态函数 $|n>$ 引进一相位变换 $|n(\vec{R})> \to e^{i\Phi(\vec{R})}|n(\vec{R})>$, 则按 $\vec{A}_n$ 的定义式 (2.7.12),$\vec{A}_n(\vec{R}) \to \vec{A}_n(\vec{R}) - \nabla\Phi(\vec{R})$. 考虑到 $\nabla \times \nabla\Phi = 0$, 由 (2.7.14) 式看出，这个变化对 $\gamma_n(C)$ 无贡献. 故 Berry 位相 $\gamma_n(C)$ 与任意引进的位相因子 $e^{i\Phi(\vec{R})}$ 无关，即在上述相位变换中保持不变. 将 $\vec{A}_n$ 的表达式 (2.7.12) 代入 (2.7.15) 式中，得 Berry 位相为

$$\begin{aligned}
\gamma_n(C) &= i\int\int d\vec{s} \cdot \nabla\times < n|\nabla n > \\
&= -\mathrm{Im}\int\int d\vec{s} \cdot < \nabla n| \times |\nabla n > \\
&= -\mathrm{Im}\int\int d\vec{s} \cdot \sum_{m\neq n} < \nabla n|m > \times < m|\nabla n >
\end{aligned} \tag{2.7.16}$$

和式中不包括 $m = n$ 的项，因 $< n|\nabla n >$ 为虚数， $< \nabla n|n > \times < n|\nabla n >$ 为实数，不对 (2.7.16) 式作出贡献. 类似于 (2.7.5) 式，由 (2.7.1) 式也能导出 $(E_m - E_n) < n|\nabla m >=< n|\nabla H|m >$, 代入 (2.7.16) 式便得

$$\gamma_n(C) = -\mathrm{Im}\int\int d\vec{s} \cdot \sum_{m\neq n} \frac{< n|\nabla H|m > \times < m|\nabla H|n >}{(E_m - E_n)^2} \tag{2.7.17}$$

这个式子也证明了 $\gamma_n(C)$ 与 $|n(t)>$ 的位相无关. 由 (2.7.15) 式看出， Berry 位相 $\gamma_n(C)$ 与参量 $\vec{R}(t)$ 、矢量场 $\vec{A}(\vec{R})$ 有关.

2.8 自离化共振态

2.8.1 自离化共振态

以上各节主要讨论了原子分立态间的跃迁、状态迭加与微扰. 其实，除分立态外，还有一个重要的方面，即连续态，以及由基态向连续态的跃迁，分立态和连续态间的状态迭加与微扰等.

图 2.8 为锶原子的真空紫外吸收谱 [14], 在一连续的背景上还有许多吸收峰. 自离化态的来源与性质可简要分析如下：

原子的离化极限 E_I, 即为将一个束缚电子移至无穷远处所需的最小能量. 例如 SrI 的基态为 $5s^2\ ^1S_0$，第一电离极限发生在 $5s^2\ ^1S_0 \to 5snp\ ^1P_1^0$ 系列，即一个 5s 电子被激发到 np 态，但自旋取向不变，仍保持与留下的 5s 电子自旋反平行，电离极限发生在 45 932 cm^{-1} 或 5.69 eV 处，这时电子已完全自由 (自由电子能量与基态 $5s$ 电子的能量差为 $\hbar ck$,k 为波数即 45 932cm^{-1}). 若激发能高于 5.69 eV, 则多余的能量 ε 变成了电子的动能，连续谱可记为 $5s\varepsilon p\ ^1P_1^0$(这里 $^1P_1^0$ 表示两个电子的自旋反平行， $\vec{S}=0$). 也可能发生这样的情形，即两个 5s 电子激发到更高的束缚态，例如 $4d4f\ ^1P^0$ 所需的激发能为 53 546cm^{-1}，已远高于电离极限 45932cm^{-1}. 故当 $\varepsilon=(53\ 546-45\ 932)\mathrm{cm}^{-1}$ 时，电子有两个简并态，即 $5s\varepsilon p\ ^1P_1^0$ 与 $4d4f\ ^1P_1^0$. 简并态的相互作用又使得态函数混合而产生一新的自离化共振态，对应于图 2.8 中的共振吸收峰.

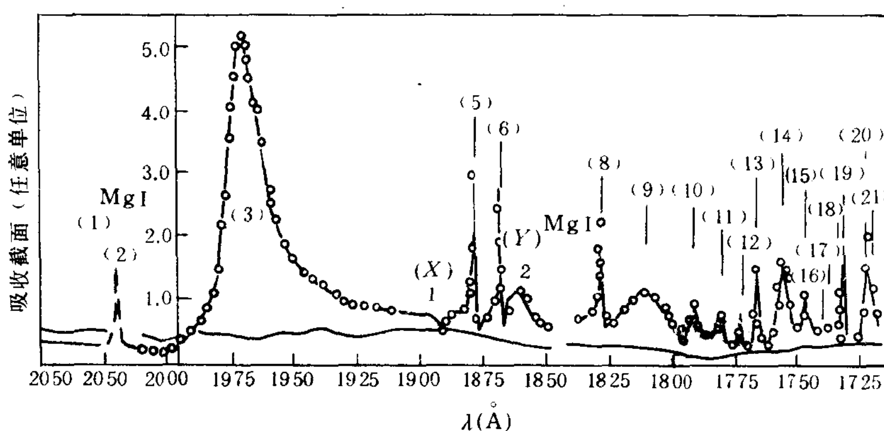


图 2.8 锶原子的真空紫外吸收光谱

(参照 Graton [14])

2.8.2 Fano 的自离化 (AI) 态理论 [15]

与一般的微扰理论不一样，自离化共振态不仅涉及分立态 ϕ_i，还涉及到连续态 ψ_E. 又设 ϕ_i 及 ψ_E 的能量矩阵元为

$$\begin{aligned} <\phi_j|H|\phi_i> &= E_i\delta_{ij} \\ <\psi_{E''}|H|\psi_{E'}> &= E'\delta(E''-E') \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

且

$$<\psi_E|\phi_i>=0,\ <\psi_{E'}|\psi_{E''}>=\delta(E''-E') \tag{2.8.2}$$

由 (2.8.2) 式及 δ 函数的性质 $\int\delta(E')dE'=1$，得知连续态波函数 ψ_E 的因次为 $E^{-1/2}$. 现在只考虑一个分立态 ϕ_i 与连续态 $\psi_{E'}$ 间的微扰，故分立态的下脚标可去掉，记为 ϕ. 设 ϕ 与 ψ_E 为简并，且能量矩阵元是非对角的，即

$$<\phi|H|\psi_{E'}>=V_{E'} \tag{2.8.3}$$

对角化后的波函数 Ψ_E，即新的非简并态，可表示为分立态 ϕ 与连续态 $\psi_{E'}$ 间的迭加

$$\Psi_E=a(E)\phi+\int b_{E'}(E)\psi_{E'}dE' \tag{2.8.4}$$

用 H 作用于上式两边，左边为 $H\Psi_E = E\Psi_E$, 并用 $\phi, \psi_{E''}$ 乘两边，求积分便得

$$aE = aE_\phi + \int b_{E'}(E)V_{E'}^* dE' \tag{2.8.5}$$

$$b_{E''}E = aV_{E''} + b_{E''}E'' \tag{2.8.6}$$

根据 (2.8.6) 式，可得 $b_{E''} = \dfrac{-aV_{E''}}{E''-E}$. 但考虑到 δ 函数的性质 $\int x\delta(x)dx = 0$, 如果 x 可能趋向于 0, 则由 $A(x) = B(x)$, 应导出 $A(x)/x = B(x)/x + Z\delta(x)$, 而不是 $A(x)/x = B(x)/x$. 故由 (2.8.6) 式得出

$$b_{E''} = aV_{E''}\left[\frac{1}{E-E''} + Z(E)\delta(E''-E)\right] \tag{2.8.7}$$

将其代入 (2.8.5) 式，便得

$$aE = aE_\phi + a\int |V_{E''}|^2 \left[\frac{1}{E-E''} + Z(E)\delta(E''-E)\right] dE'' \tag{2.8.8}$$

因 $a \neq 0$, 故由 (2.8.8) 式得

$$Z(E) = \left[E - \left(E_\phi + P\int \frac{|V_{E''}|^2}{E-E''}dE''\right)\right] / |V_E|^2 \tag{2.8.9}$$

上式中圆括号内的能量可表示为

$$E_s = E_\phi + P\int \frac{|V_{E'}|^2}{E-E'}dE' = E_\phi + F(E) \tag{2.8.10}$$

式中， P 表示积分取主值， E_s 即连续吸收谱中的自离化吸收峰， $F(E)$ 为吸收峰位置与分立能级间的偏离. 根据自离化态 Ψ_E 正交规一条件，可求得系数 $a(E)$, 亦即

$$<\Psi_{\bar{E}}|\Psi_E> = a^*(\bar{E})a(E) + \int dE' b_{E'}^*(\bar{E})b_{E'}(E) = \delta(\bar{E}-E) \tag{2.8.11}$$

将 $b_{E'}(E)$ 的表式 (2.8.7) 代入 (2.8.11) 式中，便得

$$\begin{aligned} &a^*(\bar{E})\left\{1 + \int dE' V_{E'}^* \left[\frac{1}{\bar{E}-E'} + Z(\bar{E})\delta(\bar{E}-E')\right]\right. \\ &\left.\times\left[\frac{1}{E-E'} + Z(E)\delta(E-E')\right] V_{E'}\right\} a(E) = \delta(\bar{E}-E) \end{aligned} \tag{2.8.12}$$

应注意上面的积分包含了 $\bar{E} = E$ 双奇异点. 本章的附录 B 证明 $\dfrac{1}{(\bar{E}-E')(E-E')}$ 可分解为

$$\frac{1}{(\bar{E}-E')(E-E')} = \frac{1}{\bar{E}-E}\left(\frac{1}{E-E'} - \frac{1}{\bar{E}-E'}\right) + \pi^2\delta(\bar{E}-E)\delta\left[E' - \frac{1}{2}(\bar{E}+E)\right] \tag{2.8.13}$$

将 (2.8.13) 式代入 (2.8.12) 式，并注意到

$$\begin{aligned} &\delta(\bar{E}-E')\delta(E-E') = \delta(\bar{E}-E)\delta[E' - \frac{1}{2}(E+\bar{E})] \\ &\delta(E-E')f(E') = \delta(E-E')f(E) \end{aligned} \tag{2.8.14}$$

便得

$$|a(E)|^2|V_E|^2[\pi^2+Z^2(E)]\delta(\bar{E}-E)$$
$$+a^*(\bar{E})\{1+\frac{1}{\bar{E}-E}[F(E)-F(\bar{E})+Z(E)|V_E|^2$$
$$-Z(\bar{E})|V_E|^2]\}a(E)=\delta(\bar{E}-E) \tag{2.8.15}$$

由 (2.8.9) 和 (2.8.10) 式得出上式中 { } 的值为 0, 故有

$$|a(E)|^2=\frac{1}{|V_E|^2[\pi^2+Z^2(E)]}=\frac{|V_E|^2}{[E-E_\phi-F(E)]^2+\pi^2|V_E|^4} \tag{2.8.16}$$

这表明通过与连续态相互作用，分立能级已具有共振带结构，带宽为 $\pi|V_E|^2$. 若初始时系统处于分立态 ϕ, 则经过 $\frac{\hbar}{2\pi|V_E|^2}$ 的时间后，系统将会离化. 这便是所谓自离化.

参照 (2.8.9) 式和 (2.8.16) 式，并定义

$$\Delta=-\tan^{-1}\frac{\pi}{Z(E)}=-\tan^{-1}\frac{\pi|V_E|^2}{E-E_\phi-F(E)} \tag{2.8.17}$$

则 (2.8.16) 式可写为

$$a=\frac{\sin\Delta}{\pi V_E}$$

$$b_{E'}=\frac{\sin\Delta}{\pi V_E}\frac{V^*_{E'}}{E-E'}-\cos\Delta\delta(E-E')$$

$$\begin{aligned}\Psi_E&=\frac{\sin\Delta}{\pi V_E}\phi+\frac{\sin\Delta}{\pi V_E}P\int\frac{V^*_{E'}\psi_{E'}}{E-E'}dE'-(\cos\Delta)\psi_E\\&=\frac{\sin\Delta}{\pi V_E}\left\{\phi+P\int\frac{V^*_{E'}\psi_{E'}dE'}{E-E'}\right\}-(\cos\Delta)\psi_E\\&=\frac{\sin\Delta}{\pi V_E}\Phi-(\cos\Delta)\psi_E\end{aligned} \tag{2.8.18}$$

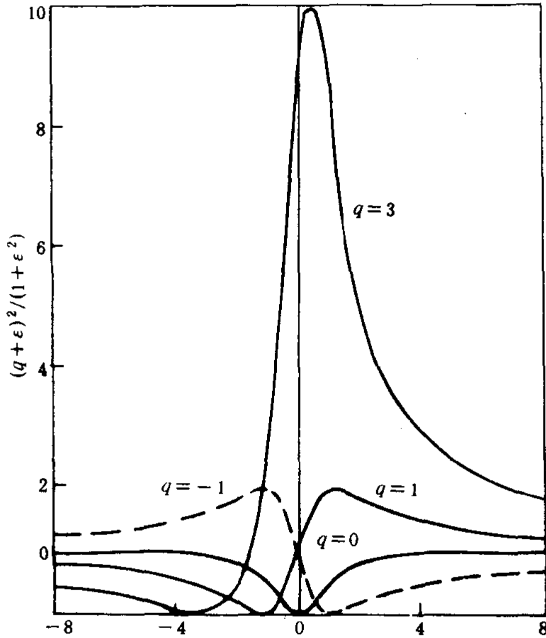


图 2.9 Fano–Beutler 线型因子

(参照 Fano [15])

由此可计算出基态 ϕ_g 向自离化共振态 Ψ_E 跃迁，算子 T 的矩阵元为

$$<\Psi_E|T|\phi_g>=\frac{\sin\Delta}{\pi V_E^*}<\Phi|T|\phi_g>-\cos\Delta<\psi_E|T|\phi_g>$$
$$|<\Psi_E|T|\phi_g>|^2=|<\psi_E|T|\phi_g>|^2|q\sin\Delta-\cos\Delta|^2 \tag{2.8.19}$$

q 为 Fano 参量，定义为

$$q=\frac{<\Phi|T|\phi_g>}{\pi V_E^*<\psi_E|T|\phi_g>} \tag{2.8.20}$$

参照 (2.8.17) 式和 (2.8.19) 式，便得

$$
\frac{|<\Psi_E|T|\phi_g>|^2}{|<\psi_E|T|\phi_g>|^2}=\frac{(q+\varepsilon)^2}{1+\varepsilon^2}
$$

$$
\varepsilon=\frac{E-E_\phi-F(E)}{\pi|V_E|^2} \tag{2.8.21}
$$

图 2.9 给出自离化共振态附近光吸收截面的 Fano–Beutler 线型因子 $\dfrac{(q+\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon^2)}$ 随 ε 而变化的曲线．当 $\varepsilon=-q$ 时，吸收截面为 0；当 q 很大时，为 Lorentz 型；当 $q=0$ 时，为反共振吸收窗．

附录 A　(2.2.27) 式的解析求解

将 (2.2.27) 式用椭圆积分表示为

$$
\zeta=\int\frac{dn_0}{2\sqrt{\pm n_0(m_1-n_0)(m_2-n_0)(m_3-n_0)-(m_0+n_0\Delta s)^2}} \tag{A1}
$$

通过分式变换 $n_0=\dfrac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$，上式变为 [7]

$$
\zeta=(\alpha\delta-\beta\gamma)\int_\rho^\infty\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}} \tag{A2}
$$

或写为

$$
u=\int_{\rho(u)}^\infty\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}},\quad u=\frac{\zeta}{\alpha\delta-\beta\gamma} \tag{A3}
$$

式中，$\rho(u)$ 即 Weierstrass 椭圆积分．设

$$
4x^3-g_2x-g_3=(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3) \tag{A4}
$$

作如下判别：

(1) 当 (A4) 式左端判别式 $\Delta>0$ 时，e_1,e_2,e_3 为实根，且

$$
e_1>e_2>e_3 \tag{A5}
$$

Weierstrass 椭圆函数 $\rho(u)$ 与 Jacobi 椭圆函数 $\mathrm{sn}(u',k)$ 的关系为

$$
\begin{gathered}
\rho(u)=e_3+(e_1-e_3)\frac{1}{\mathrm{sn}^2(\sqrt{e_1-e_3}u,k)}\\
k=\sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}
\end{gathered} \tag{A6}
$$

(2) 判别式 $\Delta<0$ 时，设 e_2 为实根，e_1,e_3 为共轭复根，则有

$$
\begin{gathered}
\rho(u)=e_2+\sqrt{9\alpha^2+\beta^2}\frac{1+\mathrm{cn}(2\sqrt[4]{9\alpha^2+\beta^2}u,k)}{1-\mathrm{cn}(2\sqrt[4]{9\alpha^2+\beta^2}u,k)}\\
k=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{3e_2}{\sqrt{9\alpha^2+\beta^2}}}
\end{gathered} \tag{A7}
$$

根据 (A 1)~(A 7) 式，就可将解 n_0 最终表示为 Jacobi 椭圆函数 sn 或 cn．

附录B (2.8.13) 式的证明

由 Fourier 分析给出

$$(\bar{E}-E')^{-1}=-\pi i\int_{-\infty}^{\infty}dk\frac{k}{|k|}\exp(2\pi ik(\bar{E}-E')) \tag{B1}$$

$$(\bar{E}-E')^{-1}(E-E')^{-1}=-\pi^2\int_{-\infty}^{\infty}dk\int_{\infty}^{\infty}dk'\frac{kk'}{|kk'|}\exp\left\{2\pi i[k(\bar{E}-E')+k'(E-E')]\right\} \tag{B2}$$

作变换 $u=k+k',\quad v=\frac{1}{2}(k-k')$, 并注意到

$$\frac{kk'}{|kk'|}=\frac{u^2-4v^2}{|u^2-4v^2|}=-1+2\mathrm{st}(u^2-4v^2) \tag{B3}$$

式中， st( ) 为步函数，这样 (B2) 式就可以写为

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\bar{E}-E')(E-E')} &= \pi^2\int_{-\infty}^{\infty}du\exp\left\{2\pi iu\left[\frac{1}{2}(\bar{E}+E)-E'\right]\right\}\\
&\quad\times\left\{\int_{-\infty}^{\infty}-2\int_{-\frac{1}{2}|u|}^{\frac{1}{2}|u|}dv\right\}\exp\left[2\pi iv(\bar{E}-E)\right]\\
&= \pi^2\int_{-\infty}^{\infty}du\exp\left\{2\pi iu\left[\frac{1}{2}(\bar{E}+E)-E'\right]\right\}\\
&\quad\times\left\{\delta(\bar{E}-E)-2\frac{\sin|u|(\bar{E}-E)}{\pi(\bar{E}-E)}\right\}\\
&= \pi^2\delta[E'-\frac{1}{2}(\bar{E}+E)]\delta(\bar{E}-E)+\frac{i\pi}{\bar{E}-E}\int_{-\infty}^{\infty}du\frac{u}{|u|}\\
&\quad\times\left\{\exp\left[2\pi iu(\bar{E}-E')\right]-\exp\left[2\pi iu(E-E')\right]\right\}
\end{aligned} \tag{B4}$$

由 (B4),(B1) 式便得出 (2.8.13) 式.

第三章　二能级系统的密度矩阵求解

非线性介质的量子理论的微扰展开，虽给出了通过解 Schrödinger 方程波函数计算非线性介质的极化与极化率的方法，但只适用于弱场与非共振相互作用．在强场与共振相互情况下，微扰展开已不适用，我们只能在旋波近似下解密度矩阵方程的基础上研究简化的二能级或三能级原子系统与辐射场相互作用的一些特点．模型虽然简化，但具有典型性，且理论结果已在实验中得到验证．这一章主要讨论二能级系统的密度矩阵求解，三能级系统的密度矩阵求解要在下一章讨论．

3.1　二能级原子密度矩阵的矢量模型

在旋波近似下对二能级原子密度矩阵方程进行解析求解的研究，最早是采用矢量模型 [1~5]，而且不考虑弛豫过程与无规力的作用．现对 (2.6.16) 方程中的变数作一些变换，令

$$\begin{aligned}&\Delta = 2\sigma_z \quad , \quad \delta\omega = \omega_p - \omega_{21}\\&v = i(\sigma^- e^{-i\delta\omega t} - \sigma^+ e^{i\delta\omega t})\\&u = \sigma^- e^{-i\delta\omega t} + \sigma^+ e^{i\delta\omega t}\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

则方程 (2.6.16) 可化为

$$\begin{aligned}&\frac{du}{dt} = \delta\omega v\\&\frac{dv}{dt} = -\delta\omega u + \Omega\Delta\\&\frac{d\Delta}{dt} = -\Omega v\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

令

$$\vec{R} = u\vec{i} + v\vec{j} + \Delta\vec{k}, \quad \vec{\beta} = \Omega\vec{i} + \delta\omega\vec{k} \tag{3.1.3}$$

则 (3.1.2) 式可写为矢量形式

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = -\vec{\beta} \times \vec{R} \tag{3.1.4}$$

其解可用矢量 $\vec{R}$ 绕轴 $\vec{\beta}$ 的进动的几何图象表示出来．对于辐射场频率 ω_p 与原子跃迁频率 ω_{21} 为共振情形 ($\delta\omega = \omega_p - \omega_{21} = 0$) 与偏离共振情形 ($\delta\omega \neq 0$) 的进动分别如图 3.1(a),(b) 所示．共振情形 $\delta\omega = 0$, $\vec{\beta}$ 与 $\vec{i}$ 轴重合． $\vec{R}$ 在 2-3 平面内绕轴 1 转动，角速度为 $|\vec{\beta}| = \Omega$. 当 $\vec{R}$ 转动到 $R_3 = 1$ 时的位置 ($\rho_{22} = 1, \rho_{11} = 0$) 时，表明原子处于激发态；当转动到 $R_3 = -1$ 位置时，表明原子处于基态．

参照图 3.1(b), 设初始的 $\vec{R}$ 在坐标系 (1, 2, 3) 中给出，即 $R_0(R_{10}, R_{20}, R_{30})$. 将这初始值变换到 $(1', 2', 3')$ 坐标系， $1'$ 与 $\vec{\beta}$ 重合，变换矩阵为 U, 得 $R_0' = UR_0$. 在坐标系 $(1', 2', 3')$ 中， R_0' 以角速度 $\beta = \sqrt{\Omega^2 + \delta\omega^2}$ 绕 $1'$ 转动，得 $R' = WR_0'$, W 为转动矩阵．然后再回到坐标系 (1, 2, 3), 最后得 $R = U^{-1}R' = U^{-1}WR_0' = U^{-1}WUR_0$, 即

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta t & \sin\beta t \\ 0 & -\sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{10} \\ R_{20} \\ R_{30} \end{pmatrix}$$

式中，$\cos\theta=\dfrac{\Omega}{\beta}$，$\sin\theta=\dfrac{\delta\omega}{\beta}$，代入上式得

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\Omega^2+\delta\omega^2\cos\beta t}{\beta^2} & -\frac{\delta\omega}{\beta}\sin\beta t & \frac{-\Omega\delta\omega}{\beta^2}(1-\cos\beta t) \\ \dfrac{\delta\omega}{\beta}\sin\beta t & \cos\beta t & \frac{\Omega}{\beta}\sin\beta t \\ \dfrac{-\delta\omega\Omega}{\beta^2}(1-\cos\beta t) & -\frac{\Omega}{\beta}\sin\beta t & \frac{\delta\omega^2+\Omega^2\cos\beta t}{\beta^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{10} \\ R_{20} \\ R_{30} \end{pmatrix} \tag{3.1.5}$$

称 β 为 Rabi 频率 [2]. 对于共振情形，$\delta\omega=0,\beta=\Omega$. 又若取定 $R_0=(0,0,-1)$, 由 (3.1.5) 式容易计算出 $R_1=u=0$, $R_2=v=-\sin\Omega t$, $R_3=\Delta=-\cos\Omega t$, 即

$$\rho_{21}e^{i\omega_{21}t}=a_1^\dagger a_2=i\frac{\sin\Omega t}{2}\quad,\quad \rho_{22}-\rho_{11}=-\cos\Omega t$$

这结果表明外场 $\vec{E}$ 已通过 $\Omega=2\dfrac{\vec{E}_0\cdot\vec{\mu}_{21}}{\hbar}$ 将状态 $|2>,|1>$ 耦合起来了. 式中 $\vec{E}_0$ 为场强 $\vec{E}$ 的振幅. 耦合后，状态 $|2>$ 与 $|1>$ 间存在一定的相干性，$\rho_{12}\neq 0$; 而粒子又在上能级 $(\Delta=1)$ 与下能级 $(\Delta=-1)$ 之间来回聚积着，频率为 Ω.

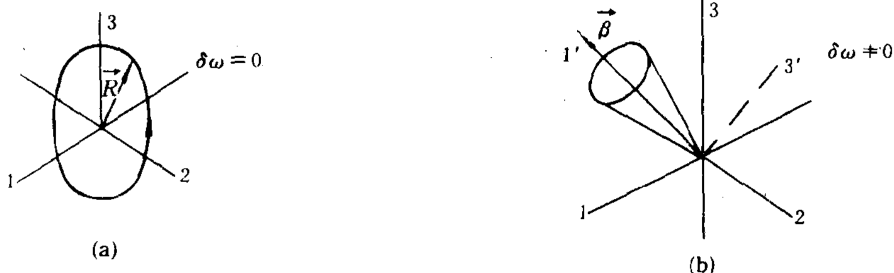


图 3.1 二能级系统的矢量表示

还应注意到，对于共振情形，若泵浦场振幅 E_0 随时间 t 而变，很明显，Rabi 频率 Ω 也将随时间而变，即 $\Omega=\Omega(t)$. 这种情形也可严格求解，只需引进参量 $z=\int_0^t\Omega dt$ 代替 Ωt 就行了，可参看 $\delta\omega=0$ 情况下的 (3.1.2) 式. $\int_0^t\Omega dt$ 实际上就是下面要讨论的光脉冲的面积.

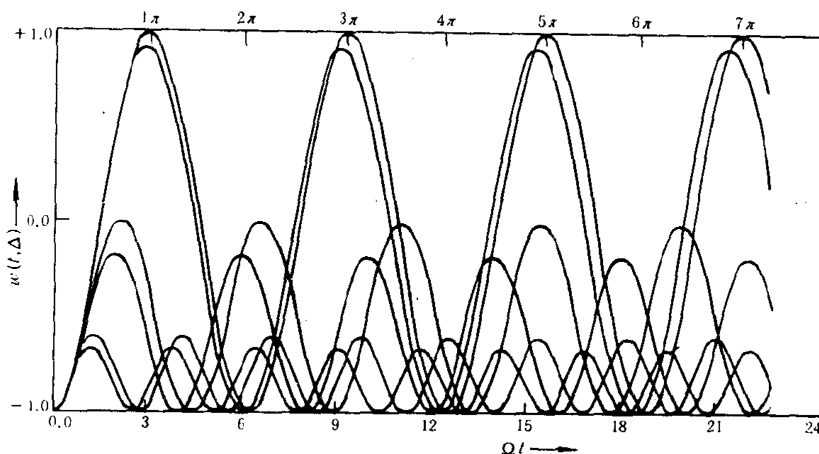


图 3.2 粒子反转数 Δ 随 βt 的变化曲线

(参照 Gibbs [6])

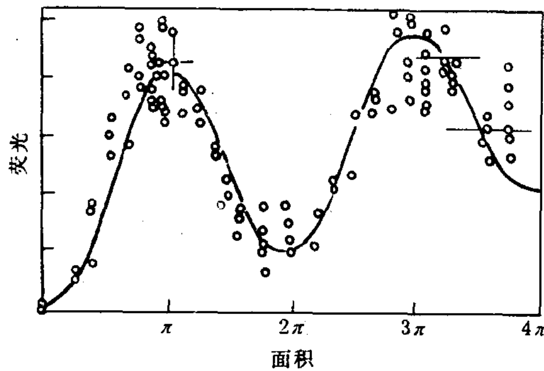


图 3.3 共振荧光强度随光脉冲面积变化的曲线

(参照 [6])

对于非共振情形，粒子反转数 Δ 对时间 t 的依赖关系可按 (3.1.5) 式的 R_3 分量直接写出，即为 βt 的周期函数. 图 3.2 给出 W 即 R_3 随时间 t 的变化曲线，最高的为共振曲线 $\delta\omega = 0$, 稍低的一条曲线失谐量为 $\delta\omega = 0.2\Omega$. 以下各曲线的失谐量依次为 $\delta\omega = \Omega, 1.2\Omega, 2\Omega, 2.2\Omega$. 图 3.3 为通过共振荧光强度随光脉冲面积的变化曲线而反映出来的反转粒子数的变化 [6].

3.2 Bloch 方程及其解

上面求解了不含弛豫系数的密度矩阵方程 (2.6.16), 现求解在加上弛豫系数后的 Bloch 方程 (2.6.18). 仍按 (3.1.1) 式换变数，并令 $\gamma_1 = \dfrac{1}{T_1}, \gamma_2 = \dfrac{1}{T_2}$, 则由 (2.1.18) 式可导出通常称为 Bloch 方程的表式 [2~4]

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= -\frac{u}{T_2} + \delta\omega v \\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{v}{T_2} - \delta\omega u + \Omega\Delta \\
\frac{d\Delta}{dt} &= -\frac{\Delta - \Delta_{eg}}{T_1} - \Omega v
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

(3.2.1) 式是关于 u, v, Δ 的线性微分方程组. 令左边为 0, 便得稳态解，这是指外场振幅为常数 (亦即 Rabi 频率 Ω 为常数) 的情形. 这组稳态解记为

$$\begin{aligned}
u_s &= -\Delta_{eq}\frac{\delta\omega\Omega}{\dfrac{1}{T_2^2} + \dfrac{T_1}{T_2}\Omega^2 + \delta\omega^2} \\
v_s &= \Delta_{eq}\frac{\dfrac{1}{T_2}\Omega}{\dfrac{1}{T_2^2} + \dfrac{T_1}{T_2}\Omega^2 + \delta\omega^2} \\
\Delta_s &= \Delta_{eq}\frac{\dfrac{1}{T_2^2} + \delta\omega^2}{\dfrac{1}{T_2^2} + \dfrac{T_1}{T_2}\Omega^2 + \delta\omega^2}
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

(3.2.1) 式的通解可表示为稳态解与齐次解 ($\Delta_{eq} = 0$) 之和，即

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_s + \tilde{u} \\ v_s + \tilde{v} \\ \Delta_s + \tilde{\Delta} \end{pmatrix} \tag{3.2.3}$$

将 (3.2.3) 式代入 (3.2.1) 式，便得齐次解 $(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\Delta})$ 满足的方程

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{u}}{dt} &= -\frac{\tilde{u}}{T_2} + \delta\omega\tilde{v}\\ \frac{d\tilde{v}}{dt} &= -\frac{\tilde{v}}{T_2} - \delta\omega\tilde{u} + \Omega\tilde{\Delta}\\ \frac{d\tilde{\Delta}}{T_1} &= -\frac{\tilde{\Delta}}{T_1} - \Omega\tilde{v}\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

设 $\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\Delta}\propto e^{\lambda t}$, 代入上式得特征根 λ 的方程

$$\left(\lambda+\frac{1}{T_2}\right)\left[\left(\lambda+\frac{1}{T_2}\right)\left(\lambda+\frac{1}{T_1}\right)+\Omega^2\right]+\delta\omega^2\left(\lambda+\frac{1}{T_1}\right)=0 \tag{3.2.5}$$

由 (3.2.4) 式组的第一和第二式，可将 $\tilde{u}$,$\tilde{v}$ 表示为 $\tilde{\Delta}$ 的函数，即

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \frac{\delta\omega\tilde{\Delta}}{(\lambda+1/T_2)^2+\delta\omega^2}\\ \tilde{v} &= \frac{(\lambda+1/T_2)\omega\tilde{\Delta}}{(\lambda+1/T_2)^2+\delta\omega^2}\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

除了一个任意的常数外，对应于特征根 λ 的 $\tilde{u}$,$\tilde{v}$, $\tilde{\Delta}$ 的函数值都是完全确定了. 这任意的常数只能靠 u,v,Δ 的初值 u_0,v_0,Δ_0 来确定. 设

$$\begin{aligned}a_i &= \frac{\delta\omega}{(\lambda_i+1/T_2)^2+\delta\omega^2}\\ b_i &= \frac{(\lambda_i+1/T_2)\Omega}{(\lambda_i+1/T_2)^2+\delta\omega^2}\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

则由 (3.2.6) 和 (3.2.7) 式得出对应于 λ_i 的解为

$$\begin{aligned}\tilde{u}_i &= \tilde{u}_{0i}e^{\lambda_i t}, &\quad \tilde{u}_{0i} &= a_i\tilde{\Delta}_{0i}\\ \tilde{v}_i &= \tilde{v}_{0i}e^{\lambda_i t}, &\quad \tilde{v}_{0i} &= b_i\tilde{\Delta}_{0i}\\ \tilde{\Delta}_i &= \tilde{\Delta}_{0i}e^{\lambda_i t}, &\quad i &= 1,2,3\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

初值为

$$\begin{aligned}u_0 &= u_s+\tilde{u}_{01}+\tilde{u}_{02}+\tilde{u}_{03}\\ &= u_s+a_1\tilde{\Delta}_{01}+a_2\tilde{\Delta}_{02}+a_3\tilde{\Delta}_{03}\\ v_0 &= v_s+b_1\tilde{\Delta}_{01}+b_2\tilde{\Delta}_{02}+b_3\tilde{\Delta}_{03}\\ \Delta_0 &= \Delta_s+\tilde{\Delta}_{01}+\tilde{\Delta}_{02}+\tilde{\Delta}_{03}\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

只要初值 u_0,v_0,Δ_0 给定，便可解 (3.2.9) 式，求出 $\tilde{\Delta}_{01},\tilde{\Delta}_{02},\tilde{\Delta}_{03}$, 再由 (3.2.8) 式，最后的通解可写为

$$\begin{aligned}u &= u_s+\sum_i\tilde{u}_{0i}e^{\lambda_i t}\\ v &= v_s+\sum_i\tilde{v}_{0i}e^{\lambda_i t}\\ \Delta &= \Delta_s+\sum_i\tilde{\Delta}_{0i}e^{\lambda_i t}\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

关于 Bloch 方程的解，最早 Torrey[4] 用 Laplace 变换的方法求得. 上面是用与之稍不同的方法得到的，其中解 λ 的特征方程是很关键的. 现讨论几种特殊形特征根 λ_i 的解.

(1) 强碰撞. 一般来说，每一次碰撞均使得相位关系中断. 但不一定每一次碰撞均使得高能态的粒子跃迁到低能态，故有 $T_1 > T_2$. 但若是强碰撞的话，则每一次碰撞均使得粒子能态发生变化，则 $T_1 = T_2$, 这时特征方程 (3.2.5) 的解为

$$\lambda = -\frac{1}{T_2} \quad , \quad -\frac{1}{T_2} \pm i\sqrt{\Omega^2 + \delta\omega^2} \tag{3.2.11}$$

(2) 共振激发 ($\delta\omega = 0$). 易于看出这时的特征根为

$$\lambda = -\frac{1}{T_2} \quad , \quad -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right) \pm i\sqrt{\Omega^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)^2} \tag{3.2.12}$$

(3) 强外场作用. 在强的外场作用下，我们有

$$\Omega \gg \frac{1}{T_2} > r = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right) \tag{3.2.13}$$

方程 (3.2.5) 可写为

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda + \frac{1}{T_2}\right)\left[\delta\omega^2 + \Omega^2 + \left(\lambda + \frac{1}{T_2}\right)^2 - r\left(\lambda + \frac{1}{T_2}\right)\right] = r\delta\omega^2 \\
&\lambda + \frac{1}{T_2} = \frac{r\delta\omega^2}{(\delta\omega^2 + \Omega^2)\left[1 + \dfrac{(\lambda + 1/T_2)(\lambda + 1/T_2 - r)}{\delta\omega^2 + \Omega^2}\right]} \\
&\lambda \simeq -\frac{1}{T_2} + r\frac{\delta\omega^2}{\Omega^2 + \delta\omega^2}
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

3.3 线性吸收与饱和吸收

前一章导出在弱场作用下的线性极化与极化率，极化率的实部和虚部分别表示色散与吸收系数，与外场无关. 但在强场作用下吸收系数会随着场的增加而下降，这就是通常所说的吸收饱和现象.

在各向同性介质中，极化 $\vec{P}$ 应平行于场强 $\vec{E}$, 即 $\vec{P} = \chi^{(1)}(\omega)\vec{E}(\omega)$,$\chi^{(1)}$ 为标量，参照 (2.5.36) 式可写为

$$\begin{aligned}
\chi^{(1)} &= N\hbar^{-1}\sum_n \frac{1}{3}|\mu_{na}|^2\left[\frac{1}{(\omega_{na} - \omega) - i\gamma_{na}} + \frac{1}{(\omega_{na} + \omega) + i\gamma_{na}}\right] \\
&\simeq \frac{N}{3\hbar}\sum \frac{2|\mu_{na}|^2\omega_{na}}{\omega_{na}^2 - \omega^2 - 2i\omega\gamma_{na}} = \frac{N}{3\hbar}\sum \frac{\omega_{na}}{\omega}\frac{|\mu_{na}|^2}{\omega_{na} - \omega - i\gamma_{na}}
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

式中因子 1/3 的引进是考虑到由基态 a 向激发态 n 的跃迁，包括各磁分量能级 m, 平均来说仅有 1/3 的跃迁产生的偶极矩的方向平行于入射场的偏振方向，并对线性吸收作出贡献. 又参照 (2.5.39) 式，线性吸收系数 α_0 为

$$\alpha_0 = 2n''\omega/c \quad , \quad n'' = 2\pi \mathrm{Im}\ \chi^{(1)}(\omega) \tag{3.3.2}$$

引进振子力 f_{na} 及规一化线型 $g(\omega-\omega_{na})$：

$$f_{na}=\frac{2m\omega_{na}|\mu_{na}|^2}{3\hbar e^2} \quad , \quad g(\omega-\omega_{na})=\frac{1}{\pi\gamma_{na}}\frac{\gamma_{na}^2}{(\omega_{na}-\omega)^2+\gamma_{na}^2} \tag{3.3.3}$$

在文献 [22] 中证明了 $\sum\limits_n f_{na}=1$. 由 (3.3.1)~(3.3.3) 式，得

$$\alpha_0=\sum_n \frac{2\pi^2 f_{na}Ne^2}{mc}g(\omega_{na}-\omega) \tag{3.3.4}$$

当 $\omega_{na}-\omega=0$, 并且只考虑二能级即基态与激发态，则 (3.3.4) 式求和号 $\sum\limits_n$ 可去掉，则

$$\alpha_0=\frac{4\pi\omega_{na}|\mu|^2 N}{3\hbar c\gamma_{na}} \tag{3.3.5}$$

(3.3.5) 式与下面的 α_0 相比，差一因子 1/3, 理由如上所述.

当场强进一步增大时，我们将看到吸收系数 α 并不是一个常数，(3.3.5) 式已不适用. 这时有

$$\begin{aligned} P &= N(\mu_{21}\rho_{12}+\mu_{12}\rho_{21}) \\ &= N(\mu_{21}\sigma_{12}e^{-i\omega_{21}t}+\mu_{12}\sigma_{21}e^{i\omega_{21}t}) \\ &= N\left(\mu_{21}\frac{u-iv}{2}e^{-i\omega_{21}t}+\mu_{12}\frac{u+iv}{2}e^{i\omega_{21}t}\right) \\ &= \chi E e^{-i\omega_{21}t}+c.c \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

将 (3.3.6) 式中的 u,v 用 (3.2.2) 式的稳态值 u_s,v_s 代入，便得极化率及吸收系数为

$$\begin{aligned} \chi &= \frac{N\mu_{21}^2}{\hbar}\frac{-\Delta_{eq}(\delta\omega+i/T_2)}{\frac{1}{T_2^2}+\frac{T_1}{T_2}\Omega^2+\delta\omega^2} \\ \alpha &= \frac{2\omega}{c}\mathrm{Im}\left[(1+4\pi\chi)^{1/2}\right]\simeq\frac{4\pi\omega}{c}\mathrm{Im}\chi \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

由此得弱场作用下的共振吸收

$$\alpha_0=-\frac{4\pi\omega_{21}}{c}\Delta_{eq}N\mu_{21}^2T_2/\hbar \tag{3.3.8}$$

而强场作用下的极化率

$$\chi=\frac{\alpha_0}{4\pi\omega_{21}/c}\frac{\delta\omega T_2+i}{1+\delta\omega^2T_2^2+\Omega^2T_1T_2} \tag{3.3.9}$$

若定义饱和吸收场强 E_s 为

$$|E_s|^2=\frac{\hbar^2}{4\mu_{21}^2T_1T_2} \tag{3.3.10}$$

则有

$$\Omega^2T_1T_2=\frac{E^2}{E_s^2} \tag{3.3.11}$$

由 (3.3.5) 式看出，当场强 $E \ll$ 饱和场强 E_s 时，极化率 χ 与弱场情况下极化率 (2.5.37) 式相近．但当 $E \gg E_s$ 时，如图 3.4 所示，极化率的实部与虚部均明显表现出随场强增大而下降的趋势，这就是饱和吸收现象．

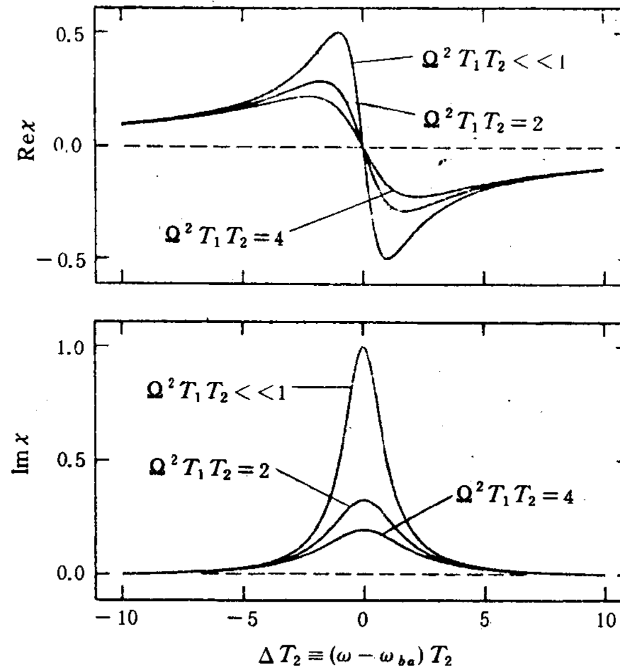


图 3.4 极化率随场强的变化曲线

3.4 光学章动与自由感生衰变 [7~9]

前面已提到由原子共振荧光强度随激发光脉冲面积的周期变化来判定反转粒子数是以 Rabi 频率 Ω 在脉动 (如图 3.3). 但这方法毕竟有些间接，而且输入脉冲场强要足够强． Rabi 频率也要足够大， $\Omega > 1/T_2$, 否则由自发辐射引起的高能态粒子的衰变就要将频率为 Ω 的荧光强度脉动掩盖掉．为了直接观察反转粒子的脉冲，实验上曾经采用 CO_2 激光通过分子气体 $C^{13}H_3F$[8], 使得非均匀加宽的吸收谱线中与 CO_2 激光为共振的那部分分子发生饱和吸收，然后再加上一个方波 Stark 场以使原子能级发生移动．这样一来，本来与 CO_2 激光为共振的那些原子突然变得不共振了，失谐量大小决定于 Stark 场产生的移位．这一部分原子的 Bloch 矢量在坐标系 (1, 2, 3) 绕矢量 $\vec{\beta}$ 进动．又注意到坐标系 (1, 2, 3) 是以 ω 角速度绕轴 3 旋转的．绕 $\vec{\beta}$ 的进动与绕轴 3 转动，便形成了 $\vec{R}$ 绕轴 3 的章动．在章动过程中，反转粒子数，即 R_3 分量，以 β 频率在脉动，由此发出的荧光强度也是以同样频率在脉动．通常是将饱和吸收原子的辐射与经过 Stark 移位原子的辐射拍频检测，将宽的 CO_2 激光信号检测出来．

在这类实验中有两种工作方式．第一种是在开始时分子与 CO_2 激光为失谐，基本上处于基态． Bloch 矢量的值为 $(0, 0, -1)$, 然后将方波 Stark 场加上，并控制场的大小，使得分子能级在移位后恰与 CO_2 激光共振，显现出强的吸收， Bloch 矢量绕 $\vec{\beta}$ 轴章动，吸收表现出调制，见图 3.5[8], 上面为调制吸收图，下面为方波 Stark 场图．这就是光学章动实验．第二种恰相反，分子在开始时与激光共振，处于饱和吸收，设 $\Delta_{eq} = -1$, 则

按 (3.2.2) 式，$\delta\omega = 0$, 且

$$\Delta_s = -\frac{1/T_2^2}{\frac{1}{T_2^2} + \frac{T_1}{T_2}\Omega^2} \tag{3.4.1}$$

当场很强时，$\Omega = \frac{2\mu E}{\hbar} \gg \frac{1}{T_2}, \Delta_s \simeq 0$, 加上方波 Stark 场后，分子能级发生很大移位，远离 CO_2 激光共振. 当 $\delta\omega \gg \Omega, \Delta_s \to -1$, 即原子由激发态感生辐射回到基态. 这种感生辐射最早在磁共振实验中被观察到，称之为自由感生衰变. 现在又在光学实验中被观察到了 (见图 3.6)[8], 其吸收由极大恢复到几乎全透，同样也有调制现象，可用 Bloch 矢量绕 $\beta = \sqrt{\delta\omega^2 + \Omega^2} \simeq \delta\omega$ 轴的进动予以解释. 进动结果使反转粒子数脉动，并导致吸收的调制波形.

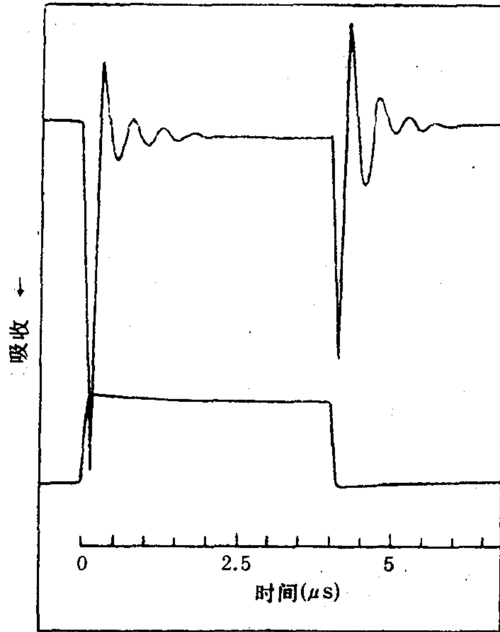


图 3.5 加上 Stark 场观察到的光学章动示意图 (参照 Bewer 等 [8])

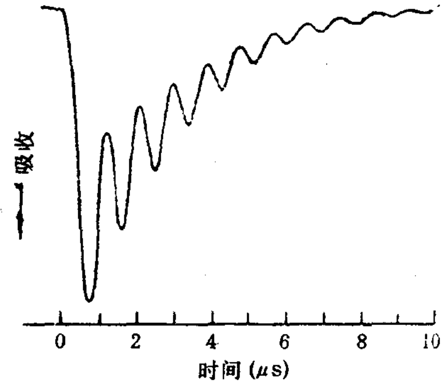


图 3.6 用 10.6 μ 激光，并加上 Stark 场观察到的自由感生衰变示意图 (参照 [8])

3.5 浸渐近似

增加了弛豫项后的 Bloch 方程，比原来的方程复杂，只在外场振幅 $\mathcal{E}$ 为恒定时，才能得到上节所述的解. 如果 $\mathcal{E}$ 不恒定，求解就很困难. 不过当外场变化很慢，而失谐 $\delta\omega \gg \Omega = 2\mu\mathcal{E}/\hbar$, 则 $\beta = \sqrt{(\delta\omega)^2 + \Omega^2} \simeq \delta\omega$, 这样就可以认为 Bloch 矢量 $\vec{R}$ 仍绝热跟随地绕 $\vec{\beta}(-\Omega, 0, \delta\omega)$ 的瞬时位置进动 (见图 3.7). 又若忽略掉 $\vec{R}$ 矢量及 $\vec{\beta}$ 矢量的夹角 α, 则无阻尼的 Bloch 方程 $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\beta} \times \vec{R}$ 的解可从图 3.7 中得出为

$$u = \frac{-\Omega}{\sqrt{\Omega^2 + \delta\omega^2}}, \quad v = 0$$
$$\Delta = \frac{\delta\omega}{\sqrt{\Omega^2 + \delta\omega^2}} \tag{3.5.1}$$

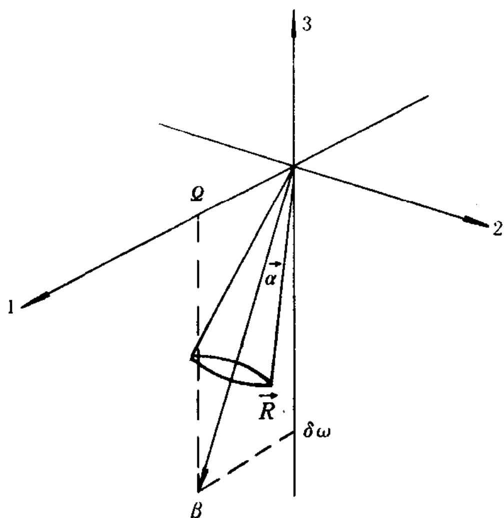


图 3.7 Bloch 矢量 $\vec{R}$ 绕 $\vec{\beta}$ 的进动图

更为详细的解析处理是 Crip 做的 [10]. 他的做法如下：

首先将 Bloch 方程重写为

$$\frac{d}{dt}(u-iv)=-\left(\frac{1}{T_2}+i\delta\omega\right)(u-iv)-i\Omega\Delta \tag{3.5.2}$$

$$\frac{d}{dt}\Delta=-\frac{1}{T_1}(\Delta-\Delta_{eq})-\Omega v \tag{3.5.3}$$

(3.5.2) 式的解为

$$u-iv=\int_{-\infty}^{t}[-i\Omega\Delta(t')]e^{(1/T_2+i\delta\omega)(t-t')}dt' \tag{3.5.4}$$

然后通过部分积分，并假定

$$\left|\frac{1}{T_2}+i\delta\omega\right|^n\gg\frac{d^n}{dt^n}(\Omega\Delta) \tag{3.5.5}$$

略去 n 高于 2 的项，便得

$$u-iv=-\frac{i}{\dfrac{1}{T_2}+i\delta\omega}\left\{\Omega\Delta-\frac{1}{\dfrac{1}{T_2}+i\delta\omega}\frac{d}{dt}(\Omega\Delta)\right\} \tag{3.5.6}$$

按 (3.5.3) 式，并应用绝热跟随不等式 $\Omega\gg 1/T_1$, 便得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\Omega\Delta)=&\ -\Omega\left[\frac{1}{T_1}(\Delta-\Delta_{eq})+\Omega v\right]+\Delta\frac{d\Omega}{dt}\\ \simeq&\ -\Omega^2 v+\Delta\frac{d\Omega}{dt}\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

代入 (3.5.6) 式并设 $|\delta\omega|\gg\dfrac{1}{T_2}$, 便得

$$\begin{gathered}u=\frac{-\Omega}{\sqrt{(\delta\omega)^2+\Omega^2}},\qquad v=\frac{\delta\omega}{[(\delta\omega)^2+\Omega^2]^{3/2}}\frac{d\Omega}{dt}\\ \Delta=\frac{\delta\omega}{\sqrt{(\delta\omega)^2+\Omega^2}}\end{gathered} \tag{3.5.8}$$

除了 v 分量外， u 与 Δ 同于按几何关系得到的 (3.5.1) 式.

上述绝热跟随近似，也称之为浸渐近似，在分析实验结果时甚为方便.

3.6 光脉冲传播的面积定理

现在我们通过解 Bloch 方程来讨论另一个有趣的问题，即在吸收介质中光脉冲的形成与传输. 首先我们根据无阻尼的方程 (3.1.2) 来证明

$$\frac{du^2}{dt}+\frac{dv^2}{dt}+\frac{d\Delta^2}{dt}=0 \tag{3.6.1}$$

因

$$\begin{aligned} u^2 &= (\rho_{21}e^{i\omega t}+\rho_{12}e^{-i\omega t})(\rho_{21}^*e^{-i\omega t}+\rho_{12}^*e^{i\omega t}) \\ &= \rho_{21}^2+\rho_{12}^2+2\rho_{12}\rho_{21}^*e^{-i2\omega t}+\rho_{21}\rho_{12}^*e^{i2\omega t} \end{aligned}$$

$$v^2=\rho_{21}^2+\rho_{12}^2-\rho_{12}\rho_{21}^*e^{-i2\omega t}-\rho_{21}\rho_{12}^*e^{i2\omega t}$$

故

$$u^2+v^2+\Delta^2=2(\rho_{21}^2+\rho_{12}^2)+(\rho_{22}-\rho_{11})^2 \tag{3.6.2}$$

对于纯态来说，有

$$\rho_{21}^2=\rho_{12}^2=(C_2C_1^*)(C_2^*C_1)=C_2^*C_2C_1^*C_1=\rho_{22}\rho_{11}$$

代入上式，得

$$u^2+v^2+\Delta^2=(\rho_{22}+\rho_{11})^2=1 \tag{3.6.3}$$

即 $u^2+v^2+\Delta^2$ 守恒乃无阻尼情况下的几率守恒.

现进一步讨论无阻尼情况下方程 (3.1.2), 即

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \delta\omega v \\ \frac{dv}{dt} &= -\delta\omega u+\Omega\Delta \\ \frac{d\Delta}{dt} &= -\Omega v \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

的解. 对共振激发情况 $\delta\omega=0$, (3.6.4) 式的第二、三式给出

$$\begin{aligned} v(t,z;0) &= -\sin\theta(t,z) \\ \Delta(t,z;0) &= -\cos\theta(t,z) \end{aligned} \tag{3.6.5}$$

$$\theta(t,z)=\int_{-\infty}^{t}\Omega(t',z)dt'=\frac{2}{\hbar}\int_{-\infty}^{t}\mu\mathcal{E}(t',z)dt' \tag{3.6.6}$$

对于一般的失谐情形 ($\delta\omega\neq 0$) 的解 $v(t,z;\delta\omega)$, 可用分离变量的形式表示为

$$v(t,z;\delta\omega)=v(t,z;0)F(\delta\omega) \tag{3.6.7}$$

将 (3.6.7) 式代入 (3.6.4) 式的第三式，并积分得

$$\Delta=-F(\delta\omega)\cos\theta+F(\delta\omega)-1 \tag{3.6.8}$$

又由 (3.6.4) 式的第二式，得

$$-F(\delta\omega)\cos\theta\Omega=-\delta\omega u+\Omega[-F(\delta\omega)\cos\theta+F(\delta\omega)-1]$$

即

$$\delta\omega u=\Omega[F(\delta\omega)-1] \tag{3.6.9}$$

代入 (3.6.4) 式的第一式，便得

$$\delta\omega\dot{u}=\ddot{\theta}[F(\delta\omega)-1]=-(\delta\omega)^2\sin\theta F(\delta\omega)$$

即

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{\tau^2}\sin\theta = 0$$

$$\frac{1}{\tau^2} = \frac{(\delta\omega)^2 F(\delta\omega)}{1 - F(\delta\omega)}, \qquad F(\delta\omega) = \frac{1}{1 + (\tau\delta\omega)^2} \tag{3.6.10}$$

(3.6.10) 式的解一般可通过椭圆函数来表示. 若边界条件给定为 $\mathcal{E} = \dot{\mathcal{E}} = 0$, 当 $t = \pm\infty$, 则 θ 的解可表示为

$$\begin{aligned} \theta(t,z) &= 4\tan^{-1}\left[\exp\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right)\right] \\ \mathcal{E}(t,z) &= \frac{2\hbar}{\mu\tau}\mathrm{sech}\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) \end{aligned} \tag{3.6.11}$$

这就是 McCall 与 Hahn 得到的著名的 sech 光脉冲解 [11,12].θ 与 $\mathcal{E}$ 对空间坐标 z 的依赖关系隐含于 t_0 中. 在求得 θ 解的基础上, 可代入 u, v, Δ 的 (3.6.7),(3.6.8),(3.6.9) 诸式, 求得

$$\begin{aligned} u &= \frac{2\tau\delta\omega}{1 + (\tau\delta\omega)^2}\mathrm{sech}\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) \\ v &= \frac{2}{1 + (\tau\delta\omega)^2}\mathrm{sech}\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right)\tanh\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) \\ \Delta &= -1 + \frac{2}{1 + (\tau\delta\omega)^2}\mathrm{sech}^2\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right) \end{aligned} \tag{3.6.12}$$

这个光脉冲的求解过程, 根本没有涉及解光脉冲传播的 Maxwell 方程, 就将光脉冲形状按 (3.6.11) 式确定下来了. 从求解过程来看, 将 $v(t, z; \delta\omega)$ 写成分离变量的形式 (3.6.7) 以及给定边界条件, 当 $t = \pm\infty$ 时, $\mathcal{E} = \dot{\mathcal{E}} = 0$ 是关键性的步骤, 因为这样就限制了求解的范围. 最后得出的是不明显依赖于空间坐标 z, 站在任一点进行长时间观察均能得到同样的稳定的脉冲波形. 这个波在空间的传播没有变形, 振幅没有衰减, 以匀速向前平移. 但若将这无阻尼的 Bloch 方程解代入 Maxwell 方程中, 情况会是怎样的呢? 是满足或不满足呢? 要清楚回答这问题, 只能借助于由 McCall 与 Hahn 证明了的面积定理.

现从电磁波在非线性介质中的传播方程 (2.1.13), 即

$$\left(\frac{\epsilon^{(1)}}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\vec{E} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} \tag{3.6.13}$$

出发. 下面为了方便起见, 去掉方程 (3.6.13) 的矢量符号, 并将场强 E 及极化 P 写成慢变振幅形式

$$E(z,t) = \mathcal{E}e^{i(k_n z - \omega t) + i\phi(z,t)} + c.c.$$

$$\begin{aligned} P(z,t) &= n_0\mu_{21}(\rho_{21} + \rho_{12}) \\ &= \frac{1}{2}\left\{[u(z,t) + iv(z,t)]e^{i(k_n z - \omega_0 t) + i\phi(z,t)} + c.c.\right\} \end{aligned} \tag{3.6.14}$$

将 (3.6.14) 式代入 (3.6.13) 式, 并用慢变振幅近似得

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{dz} + \frac{n}{c}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = -\frac{\pi\omega_0}{nc}v, \ \mathcal{E}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \frac{\pi\omega_0}{nc}u \tag{3.6.15}$$

若考虑到介质是非均匀加宽的，与 E 波相互作用的原子的共振频率 $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ 在 $g(\Delta\omega)$ 非均匀加宽内分布，相应的极化 $P(\Delta\omega, z, t)$ 为

$$\begin{aligned} P(\Delta\omega, z, t) &= n_0\mu\left[\rho_{21}(\Delta\omega, z, t) + \rho_{12}(\Delta\omega, z, t)\right] \\ &= n_0\mu\left[\rho_{21}(z, t) + \rho_{12}(z, t)\right] g(\Delta\omega) \end{aligned} \tag{3.6.16}$$

于是 $P(z,t), u(z,t), v(z,t)$ 就是对 $g(\Delta\omega)$ 线宽内各种原子的贡献求和，即

$$\begin{pmatrix} P(z.t) \\ u(z,t) \\ v(z,t) \end{pmatrix} = \int \begin{pmatrix} P(\Delta\omega, z, t) \\ u(\Delta\omega, z, t) \\ v(\Delta\omega, z, t) \end{pmatrix} g(\Delta\omega) d\Delta\omega \tag{3.6.17}$$

现定义光脉冲面积为

$$A = \lim_{t\to\infty} \theta(z, t) = \lim_{t\to\infty} \frac{2\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} \mathcal{E}(z, t') dt' \tag{3.6.18}$$

两边对 z 求微分，得

$$\frac{dA}{dz} = \lim_{t\to\infty} \frac{2\mu}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}(z, t') dt' \tag{3.6.19}$$

将 (3.6.15) 式第一式代入 (3.6.19) 式中 $\dfrac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$，便得

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dz} &= \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} dt' \left\{ -\frac{\pi\omega_0}{nc} \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta\omega, z, t') g(\Delta\omega) d\Delta\omega - \frac{n}{c}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t'} \right\} \frac{2\mu}{\hbar} \\ &= \lim_{t\to\infty} \left\{ \frac{-2n\mu}{c\hbar} \left[\mathcal{E}(z, \infty) - \mathcal{E}(z, -\infty)\right] - \frac{2\pi\omega_0\mu}{n\hbar c} \right. \\ &\quad \left. \times \int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta\omega) d\Delta\omega \int_{-\infty}^{t} dt' v(\Delta\omega, z, t') \right\} \end{aligned} \tag{3.6.20}$$

因 $\mathcal{E}(z,\infty) = \mathcal{E}(z,-\infty) = 0$，故方括号内为 0. 又将式中 v 用 $\dfrac{1}{\delta\omega}\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 代替 (参见 (3.6.4) 式的第一式)，结果为

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dz} &= \frac{-2\pi\omega_0\mu}{n\hbar c} \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\omega \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} \int_{-\infty}^{t} dt' \frac{\partial u(\Delta\omega, z, t)}{\partial t'} \\ &= \frac{-2\pi\omega_0\mu}{n\hbar c} \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\omega \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} \left[u(\Delta\omega, z, t) - u(\Delta\omega, z, -\infty)\right] \\ &= \frac{-2\pi\omega_0\mu}{n\hbar c} \lim_{t\to-\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta\omega \frac{g(\Delta\omega)}{\Delta\omega} u(\Delta\omega, z, t) \end{aligned} \tag{3.6.21}$$

因当 $t \to \infty$ 时，$\mathcal{E}(z,t) = 0$，由 (3.6.15) 式 $u(\Delta\omega, z, -\infty) = 0$. 故可选择 t_0，当 $t > t_0$ 时，$\mathcal{E} \simeq 0$，$u(\Delta\omega, z, t)$ 可用 t_0 时的 $u(\Delta\omega, z, t), v(\Delta\omega, z, t)$ 来表示. 因这时无阻尼的 Bloch 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta\omega v \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\Delta\omega u \tag{3.6.22}$$

易于解得

$$\begin{aligned} u(\Delta\omega, z, t) &= u(\Delta\omega, z, t_0) \cos\Delta\omega(t - t_0) + v(\Delta\omega, z, t_0) \sin\Delta\omega(t - t_0) \\ v(\Delta\omega, z, t) &= -u(\Delta\omega, z, t_0) \sin\Delta\omega(t - t_0) + v(\Delta\omega, z, t_0) \cos\Delta\omega(t - t_0) \end{aligned} \tag{3.6.23}$$

将 (3.6.23) 式代入 (3.6.21) 式，并注意到 $u(\Delta\omega,z,t_0),v(\Delta\omega,z,t_0)$ 分别为 $\Delta\omega$ 的奇函数与偶函数，它们可近似为

$$u(\Delta\omega,z,t)\simeq\left(\frac{\partial u}{\partial\Delta\omega}\right)_{\Delta\omega=0}\cdot\Delta\omega$$
$$v(\Delta\omega,z,t)\simeq v(0,z,t)$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\Delta\omega,z,t_0)}{\Delta\omega}\cos\Delta\omega(t-t_0)d\Delta\omega\simeq\lim_{t\to\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial\Delta\omega}\right)_{\Delta\omega=0}\frac{\sin\Delta\omega(t-t_0)}{t-t_0}\Big|_{-\infty}^{\infty}=0$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(\Delta\omega,z,t_0)}{\Delta\omega}\sin\Delta\omega(t-t_0)d\Delta\omega\simeq\pi v(0,z,t_0)$$

其中 $v(0,z,t_0)$ 可由无阻尼且共振的 Bloch 方程求解为

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\Omega\Delta\quad,\quad\frac{\partial\Delta}{\partial t}=-\Omega v$$
$$\Delta=\Delta_0\cos\theta(z,t)\quad,\quad v=\Delta_0\sin\theta(z,t)\tag{3.6.24}$$

设初始时原子处于基态，则

$$\Delta_0=n_0\mu(\rho_{22}-\rho_{11})=-N_0\mu$$
$$v(0,z,t_0)=-N_0\mu\sin\theta(z,t_0)\tag{3.6.25}$$

最后将 (3.6.25) 和 (3.6.23) 式代入 (3.6.21) 式，得

$$\frac{dA}{dz}=-\frac{\alpha_0}{2}\sin A\quad,\quad\alpha_0=\frac{4\pi^2\omega_0\mu^2N_0}{n\hbar c}g(0)\tag{3.6.26}$$

这就是由 Maxwell-Bloch 方程求得的面积定理 [12].

现仔细分析这一定理的物理含义. 首先，当面积 A 很小时，$\sin A\sim A$, 解 (3.6.26) 式，得

$$A(z)=A(0)e^{-\alpha_0z/2}\tag{3.6.27}$$

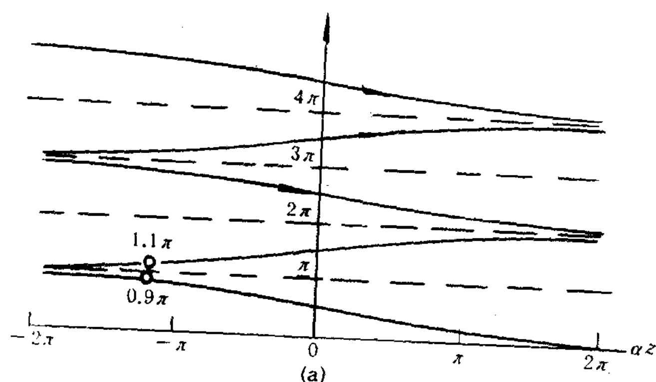
这表明脉冲按 $\varepsilon^2(z)=\varepsilon^2(0)e^{-\alpha_0z}$ 衰减，α_0 正好是线性吸收系数. 当 A 增大，吸收减小，按 (3.6.26) 式为对弱信号吸收的 $\dfrac{\sin A}{A}$ 倍. 特别是当 $A=m\pi$ 时，$\dfrac{dA}{dz}=0$, 光脉冲可以完全没有损耗地通过吸收介质. 当 m 为奇数时，A 有一小的扰动 δA, 且

$$\frac{d\delta A}{dz}=-\frac{\alpha}{2}\sin(m\pi+\delta A)=\frac{\alpha}{2}\delta A\tag{3.6.28}$$

将是不稳定的；但当 m 为偶数时

$$\frac{d\delta A}{dz}=-\frac{\alpha}{2}\sin(m\pi+\delta A)=-\frac{\alpha}{2}\delta A\tag{3.6.29}$$

就是稳定的了，故稳态光脉冲要求 $A=2n\pi$. 如果光脉冲的初始 A 还不是 $2n\pi$, 那么在传输过程中，它会改变其幅度与形状，逐渐向稳态值 $2n\pi$ 趋近. 故面积定理预示了一个演化过程，由初始的面积向最近的 $2n\pi$ 面积演化. 图 3.8(a) 中给出了 A 的演化方向 [12], 初始 A 值 $1.1\pi,0.9\pi$ 分别向 $2\pi,0\pi$ 演化；图 (b) 为相应的光脉冲演化.



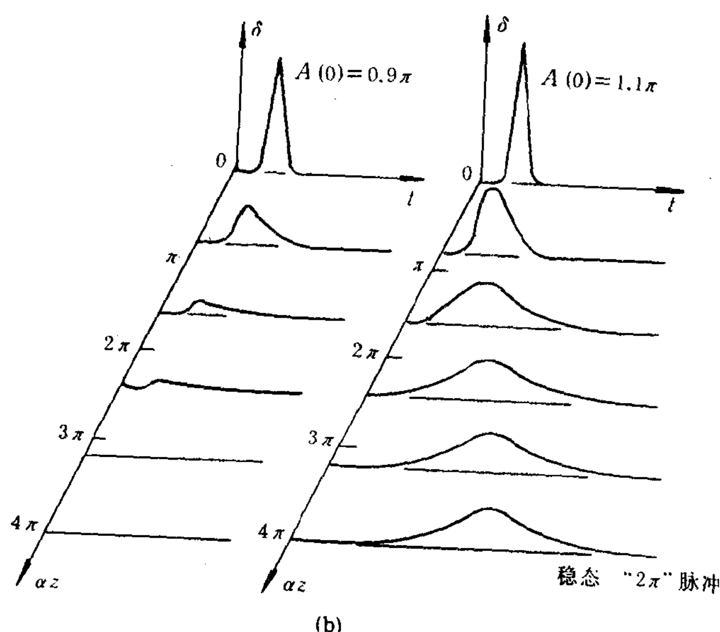


图 3.8 自感透明面积定理示意图

(a) 面积 A 的演化方向；(b) 光脉冲的稳态脉冲演化在不同距离时的波形

(参照 McCall 等 [12])

对于 $A=2\pi$ 稳态脉冲的前半部，即由 $\mathcal{E}(z,-\infty)\simeq 0$ 到峰值 $\mathcal{E}_m=\mathcal{E}(z,t_m)$, 原子吸收了光脉冲的能量，由基态跃迁到激发态. 在光脉冲的后半部，即由 $\mathcal{E}_m$ 到 $\mathcal{E}(z,\infty)$, 原子又辐射出能量并回到基态. 这种现象被称为自感透明，也已为实验所证实. 图 3.9 给出 ^{202}Hg 激光脉冲通过 ^{87}Rb 蒸气的透过率 [14], 共振吸收波长 $\lambda=7947.7$Å. 图中给出非线性透过率与输入光单位面积能量间的关系，脉冲宽度 $\tau=7\times10^{-9}$s, 碰撞失相时间 $T_2^*=55\times10^{-9}$s, 自发辐射寿命 $T_1=40\times10^{-9}$s, 故有 $\tau\ll T_2^*,T_1$. 无阻尼的分析是适用的，低能量密度时的线性透过率很低 ($\simeq 0.7$ %), 实线表示按平面波计算出来的理论值，有三个平台分别对应于 $2\pi,4\pi,6\pi$ 稳态脉冲，透过率最大达 90%, 实验点与理论曲线比较，基本相符.

综上所述，我们开始由解无阻尼的 Bloch 方程得出稳态的 sech 脉冲，后来又从更为一般的 Maxwell-Bloch 方程得出 $2n\pi$ 稳态脉冲. sech 脉冲实际上就是 2π 稳态脉冲.

3.7 相干光脉冲的合并、分裂和面积演化 [15~17]

关于相干光脉冲在吸收介质中的传播，已有许多作者进行研究．最早是前节已提到的 McCall 和 Hahn[12] 解 Maxell–Bloch 方程，发现了自感透明现象以及判定稳态脉冲的

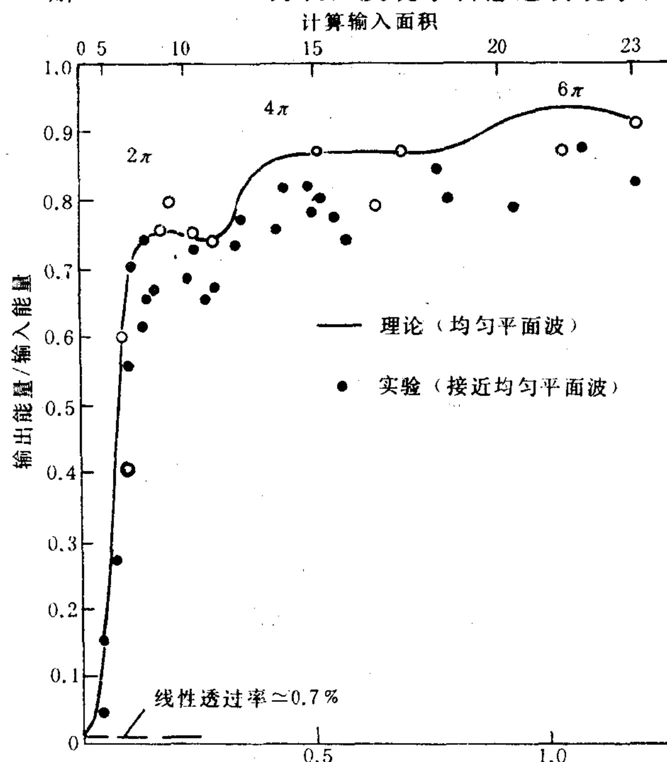


图 3.9　激光在 ^{87}Rb 蒸气中的自感透明

(参照 Slusher 等 [14])

面积定理．相干光脉冲在吸收介质中传播时，会形成稳态脉冲，其波形是双曲线正割函数，稳态面积是 $2n\pi(n=0,1,2,\cdots)$，这样的脉冲在传播过程中，波形、能量都不会发生变化．如果入射脉冲面积不是稳态值，则随着传播距离的增大，脉冲面积趋向稳态值，并且会出现脉冲分裂现象 [14](如果脉冲面积大于 3π)．一般来说，这种光脉冲演化的复杂的中间过程只能依靠数值模拟求解．

基于光与二能级原子相互作用模型，可导出在一般条件 (失谐 $\Delta\omega\neq 0$，阻尼 $\nu_i\neq 0$，弛豫 $\gamma_a\neq\gamma_b\neq 0$) 下的光与原子相互作用孤立波方程 [18,19]．也可在计算机上进行数值模拟，研究孤立波解的演化过程．主要有光脉冲的合并和分裂现象；光脉冲的面积随传播距离的演化；脉冲宽度的加宽与压缩．计算结果表明，除了获得文献 [14] 中报道过的脉冲分裂结果外，还获得两个脉冲合并为一个光脉冲，以及光脉冲面积并非单调的而是振荡地趋向稳态值 $2n\pi$ 的结果．

3.7.1　光与二能级原子系统作用方程

参照 (2.4.6) 式，可写出二能级系统的 Schrödinger 方程 [18,19]

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\omega_a+\frac{\gamma_a}{2}\right)a=i\frac{\bar{\mu}}{\hbar}\left[E\exp(-i\omega_0 t+ikx)+c.c.\right]b\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\omega_b+\frac{\gamma_b}{2}\right)b=i\frac{\bar{\mu}}{\hbar}\left[E\exp(-i\omega_0 t+ikx)+c.c.\right]a
\end{aligned}
\qquad (3.7.1)
$$

式中，a,b 分别为原子的上、下能级波函数；$\bar{\mu}$ 为 a,b 能级间的电偶极矩；γ_a,γ_b 为上、下能级的弛豫系数；ω_0 为光场的中心频率；k 为波矢；ω_a,ω_b 为上、下能级对应的频率. 令

$$
\begin{aligned}
a &= \exp\left(-\frac{i\omega_0 t - ikx}{2} - \frac{i\omega_a + i\omega_b}{2}t\right) v_1 \\
b &= \exp\left(\frac{i\omega_0 t - ikx}{2} - \frac{i\omega_a + i\omega_b}{2}t\right) v_2 \\
i\bar{\delta} &= -\frac{i\omega_0}{2} + \frac{i\omega_a - i\omega_b}{2}
\end{aligned}
\tag{3.7.2}
$$

式中，ω 为光场的频率；v_1,v_2 是波函数慢变部分，与 a,b 只差一个位相因子，具有几率振幅的意义. 将 (3.7.2) 式代入 (3.7.1) 式，并取旋波近似，得

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\bar{\delta} + \frac{\gamma_a}{2}\right) v_1 &= i\frac{\bar{\mu}}{\hbar}Ev_2 \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\bar{\delta} + \frac{\gamma_b}{2}\right) v_2 &= i\frac{\bar{\mu}}{\hbar}Ev_1
\end{aligned}
\tag{3.7.3}
$$

同样由光波在介质中的传播方程 (2.1.9), 并加上阻尼 ν_i, 有

$$
\begin{gathered}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\nu_i\frac{\partial}{\partial t} - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)[E\exp(-i\omega_0 t + ikx) + \text{c.c.}] = -4\pi\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \\
P = N_0\bar{\mu}(ab^* + a^*b) = P_0\exp(i\omega_0 t)
\end{gathered}
\tag{3.7.4}
$$

这里 N_0 为总的粒子数密度. 对 (3.7.4) 式用慢变振幅近似：

$$
\frac{\partial E}{\partial x} \ll kE, \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} \ll k\frac{\partial E}{\partial x}, \frac{\partial E}{\partial t} \ll \omega_0 E, \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \ll \omega_0\frac{\partial E}{\partial t}
$$

和旋波近似，则 (3.7.4) 式就变为

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x} + \nu_i\right)E = i2\pi\omega_0^2 N_0\bar{\mu}v_1v_2^*/\omega_0 \tag{3.7.5}
$$

令 $\mathcal{E} = i\bar{\mu}E/\hbar$, 并作变数变换 $\bar{x} = x, \quad \bar{t} = t - x/c$, 令 $\mu = 2\pi\omega_0 N_0\bar{\mu}^2/\hbar$, 得

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}} + i\bar{\delta} + \frac{\bar{\gamma}_a}{2}\right)v_1 &= \mathcal{E}v_2 \\
\left(\frac{\partial}{\partial\bar{t}} - i\bar{\delta} + \frac{\bar{\gamma}_b}{2}\right)v_2 &= -\mathcal{E}^*v_1 \\
\left(c\frac{\partial}{\partial\bar{x}} + \nu_i\right)\mathcal{E} &= -\mu v_1 v_2^*
\end{aligned}
\tag{3.7.6}
$$

(3.7.6) 式就是我们的基本方程.

3.7.2 光脉冲传输计算的差分格式与计算参数的取定

对于共振情形 $\delta = 0$, (3.7.6) 式的各变量可取为实数：

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma_a}{2}\right)v_1 &= \mathcal{E}v_2 \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma_b}{2}\right)v_2 &= -\mathcal{E}v_1 \\
\left(c\frac{\partial}{\partial t} + \nu_i\right)\mathcal{E} &= -\mu v_1 v_2
\end{aligned}
\tag{3.7.7}
$$

面积表达式为

$$A = 2\int \mathcal{E} dt \tag{3.7.8}$$

当 $\gamma_a = \gamma_b = 0$ 时，(3.7.7) 式给出

$$\frac{\partial}{\partial t}v_1^2 + \frac{\partial}{\partial t}v_2^2 = 0 \tag{3.7.9}$$

即 $v_1^2 + v_2^2 = 1$，粒子数守恒．为了保持粒子数守恒条件 (3.7.9)，且差分方程满足 Von Neuman 稳定条件，(3.7.7) 式应取隐格式．至于计算参数与初始条件的取定，为了便于

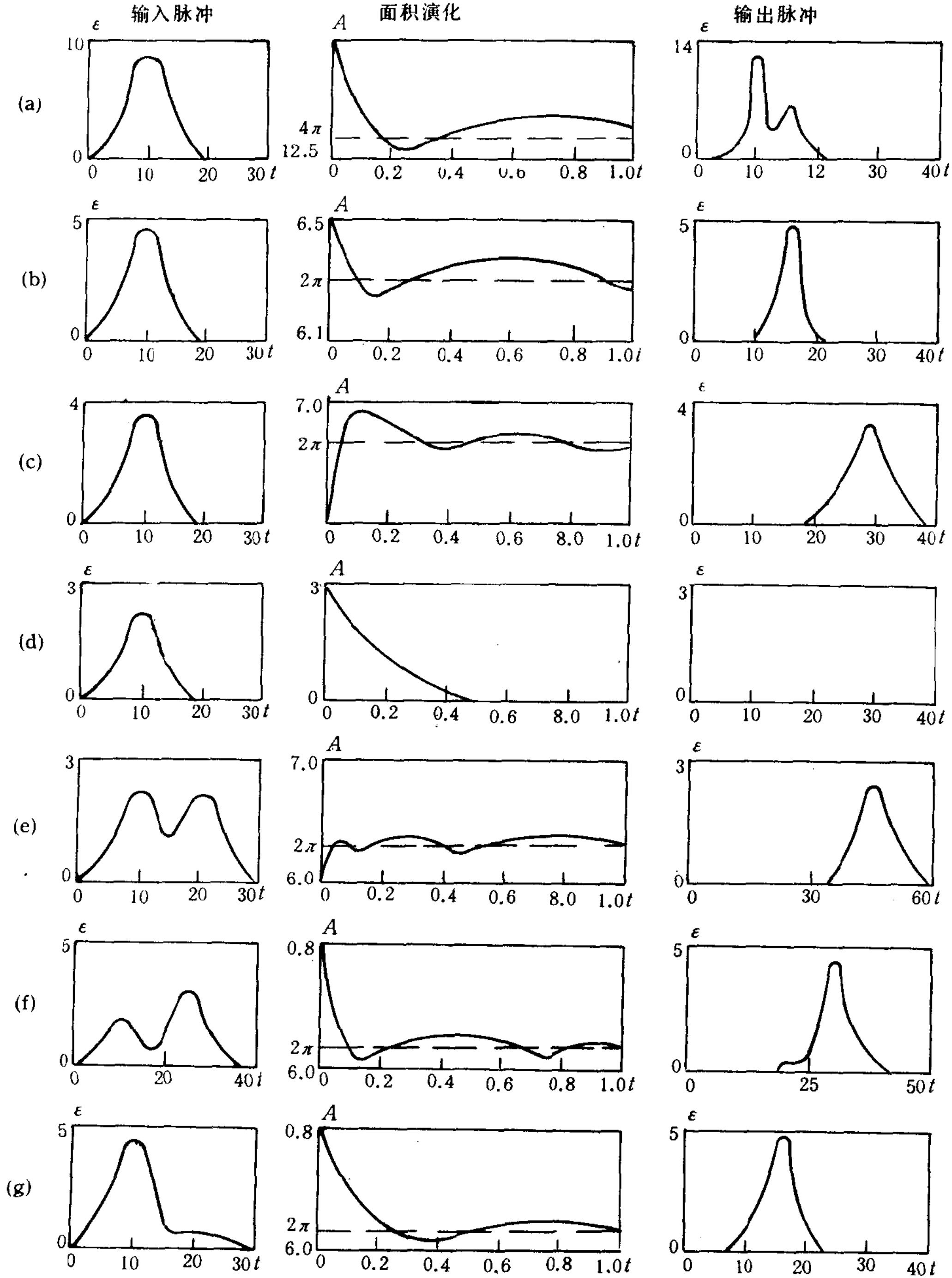


图 3.10　对应于表 3.1 的输入脉冲、面积演化、输出脉冲波形

(取自顾敏、谭维翰 [15])

比较，我们参照文献 [14] 取定参数为电偶矩 $\bar{\mu}$, 吸收盒厚 d, 原子密度 n_0 及弛豫系数等，最后算得 (3.7.7) 式的 $\mu = 4.27 \times 10^{20}\ \mathrm{s}^{-2}$, 初始条件为 $v_1 = 0, v_2 = 1$, 入射光脉冲在边界给定， $\nu_i, \gamma_a, \gamma_b$ 均取为 0.

3.7.3 计算结果与分析

在共振情形 ($\delta = 0$), 按上述差分格式与参数，对方程 (3.7.7) 进行数值模拟，主要结果列于表 3.1 中，其中 (a)~ (d) 为单脉冲输入， (e)~(g) 为双脉冲输入．图 3.10 中给出了输入、输出脉冲波形以及脉冲面积随传输距离的演变过程，其中 $\mathcal{E}$ 为场振幅， A 为脉冲面积， t 为时间 (ns),x 为传输距离 (mm). 入射脉冲的面积大小见表 3.1. 可以看出，不论入射光是一个或两个脉冲，当光脉冲通过吸收介质后，随着传输距离的增加，脉冲面积振荡地而不是单调地，按其总面积大小趋向不同稳态值 $2n\pi(n = 1, 2, \cdots)$. 与文献 [14] 不同的地方在于脉冲面积振荡地而不是单调地趋近．另外，从图 3.10(d) 可以发现，入射光脉冲面积 $A \geq \pi$ 是形成稳态脉冲的阈值．

为了在计算机上模拟到脉冲合并效应，即入射光场是两个在时间上有一定延迟 (图 3.10(e), (g) 为 10 ns,(f) 为 14 ns) 的脉冲，当光脉冲的总面积 A 满足

$$\pi < A < 3\pi \tag{3.7.10}$$

时，它们通过吸收介质合并成一个稳态脉冲，面积为 2π. 按照面积定理，入射光脉冲面积 A 满足 (3.7.10) 式时，只能形成一个稳态脉冲，这就是图 3.10(e), (f), (g) 的情形．

图 3.11 给出两个面积为“3”的入射脉冲形成单个稳态脉冲时电场振幅、时间、空间三维图．可以看出，前一个脉冲基本被吸收介质吸收，而后一个脉冲形成 2π 稳态脉冲．图 3.12 给出脉冲分裂时电场振幅、时间、空间三维图．因入射光脉冲的面积为 $13(> 3\pi)$, 故应为两个稳态脉冲．分裂后两个脉冲的宽度都比入射脉冲的宽度小，并且前沿变陡，后沿拉得较长，前一峰大为放大，后一峰相对于入射峰脉冲有一时间延迟．

表 3.1　共振条件下计算机模拟的结果

序号	输入脉冲面积		稳态面积	脉冲个数	输出脉冲宽度	
	A_1	A_2			Δt_1	Δt_2
a	13		4π	2	1.8	4.8
b	6.5		2π	1	5.8	
c	5		2π	1	7.4	
d	3		0	0	0	
e	3	3	2π	1	9.4	
f	3	5	2π	1	5.0	
g	6.5	1.5	2π	1	5.6	

表 3.1 中均是按阻尼及弛豫为 0 的情况进行数值模拟的．为了解阻尼及弛豫的影响，将表 3.1 中的 a 和 g 两例，在 (3.7.7) 方程加上阻尼、弛豫重新计算，选参数为：$\gamma_a = 0.119 \times 10^8/\mathrm{s}, \gamma_b = 0, \nu_i = 10^7/\mathrm{s}$. 计算结果表明，阻尼、弛豫的存在，不改变相干光脉冲在吸收介质中传播的合并、分裂，而脉冲的能量、波形、脉宽略有变化．

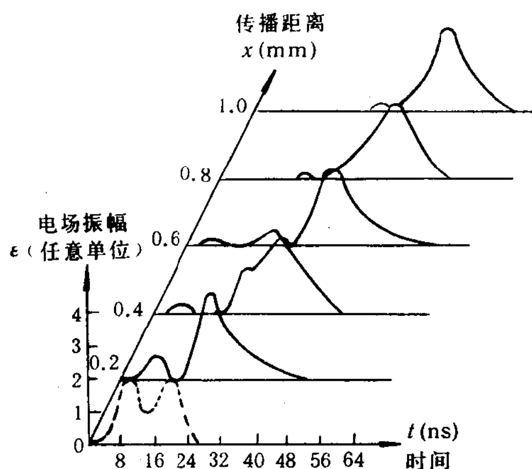


图 3.11 双脉冲合并随距离的演化)

(取自 [15])

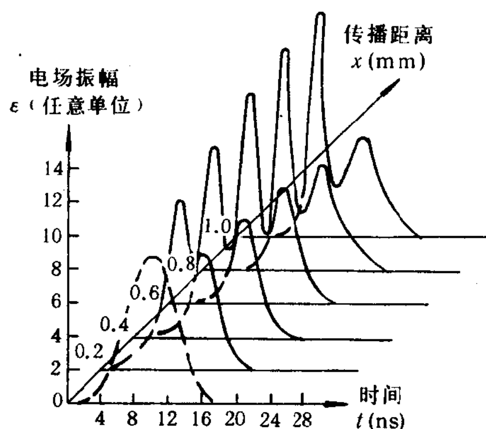


图 3.12 脉冲分裂随距离的演化

(取自 [15])

3.7.4 频率失谐对相干光脉冲演化的影响

图 3.13 为有失谐 ($\delta = 0.2\text{GHz}$) 与没有失谐相干光脉冲演化的比较. 图中的计算结果表明, 有失谐情形, 面积演化规律几乎被破坏, 并不像共振情形的面积趋向于稳态值. 图 3.14(b) 计算结果表明, 脉冲合并在失谐情形也开始消失.

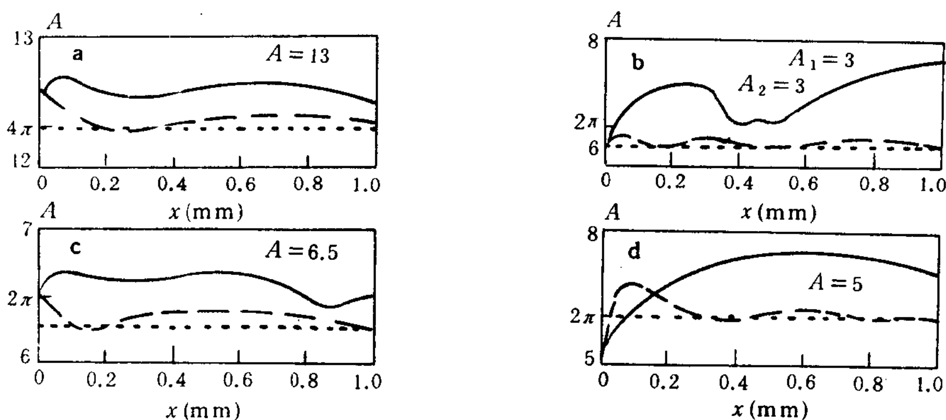


图 3.13 脉冲面积的演化 (- - - 共振情况, — 非共振情况, $\delta = 0.2\text{GHz}$)

A 为脉冲面积; x 为传播距离

(取自顾敏、谭维翰 [16])

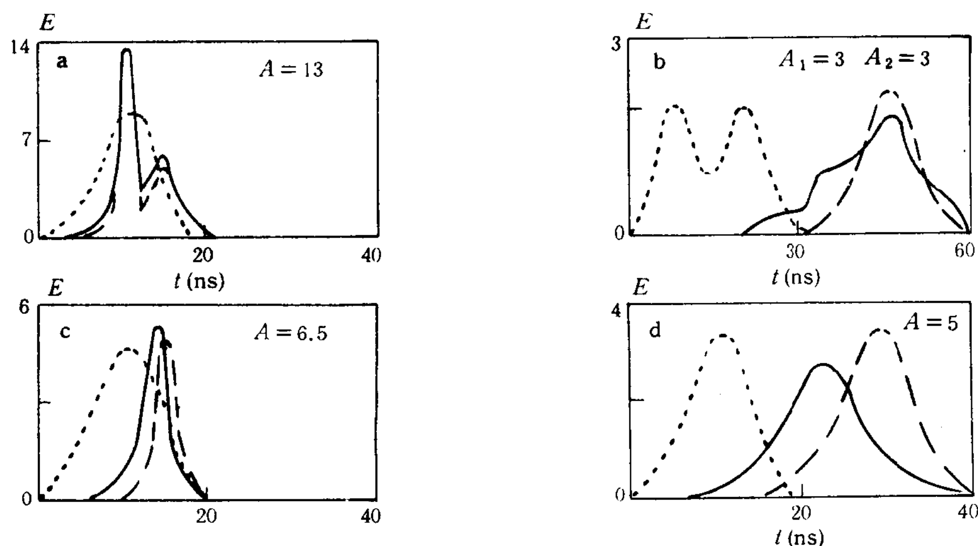


图 3.14 输入、输出脉冲波形 (- - - 共振情况， — 非共振情况， δ=0.2GHz).
E 为电场振幅 (归一化单位);t 为时间
(取自 [16])

3.7.5 光脉冲在 BDN 染料中的合并与分裂

图 3.15 为观察光脉冲合并与分裂的实验光路. 由 YAG 调 Q 输出的光脉冲经分束延迟 (15ns) 再叠加，进入 BDN 染料吸收盒，溶于二氯乙烷中的 BDN 染料在 YAG 调 Q 输出 1.06μ 有吸收峰，近乎共振吸收. 图 3.16 上面为进入吸收盒前的双脉冲叠加，具有双峰结构；下面为经吸收盒演化后的波形，只有一个峰，另一个峰基本消失. 这一结果表明了脉冲的合并. 图 3.17 为两次实验结果，图 (a) 为单脉冲输入，图 (b) 为双峰结构的脉冲输出，即脉冲分裂.

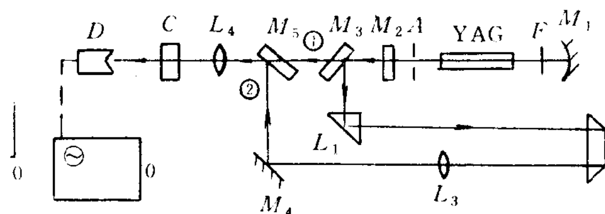


图 3.15 光脉冲合并和分裂的实验光路
(取自顾敏、谭维翰等 [17])

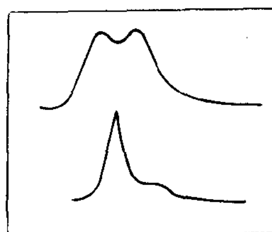


图 3.16 脉冲合并

(取自 [17])

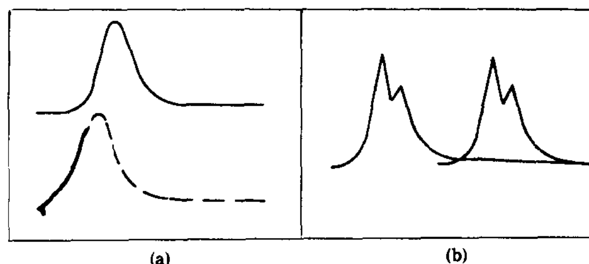


图 3.17 脉冲分裂

(取自 [17])

3.8 “准二能级”系统的 Berry 位相

上几节主要讨论了二能级系统的密度矩阵方程的解，这一节我们研究“准二能级”系统的 Berry 位相. 现考虑一自旋为 1/2 的系统在慢变磁场 $B(t)$ 中的运动、自旋与磁场的相互作用. 这时， $H=\frac{1}{2}g\vec{B}\cdot\vec{\sigma}$,$g$ 为耦合常数， H 的瞬时本征值 $E_n(B)=gBn$, $n=\pm\frac{1}{2}$. 这样，参量 $\vec{R}(t)$ 即磁场 $\vec{B}$ 的三个分量， (2.7.17) 式中的 $\nabla_{\vec{R}}H=\nabla_{\vec{B}}H=\frac{1}{2}g\vec{\sigma}$, 而 $(E_m-E_n)^2=g^2B^2(m-n)^2$, $n\neq m$, $m,n=\pm1/2$. 不失一般性，将 $\vec{z}$ 取在 $\vec{B}$ 的方向，即设 $\vec{B}=B\vec{z}$, 自旋量子化在 z 方向， $<\pm\frac{1}{2}|\sigma_z|\pm\frac{1}{2}>=\pm\frac{1}{2}$, $<\pm\frac{1}{2}|\sigma_z|\mp\frac{1}{2}>=0$, 于是 (2.7.17) 式的被积函数

$$\begin{aligned}\vec{V}_m(\vec{B})&=\sum_{n\neq m}\frac{<m|\nabla H|n>\times<n|\nabla H|m>}{(E_m-E_n)^2}\\&=\frac{1}{4B^2}\vec{z}\sum_{n\neq m}(<m|\sigma_x|n><n|\sigma_y|m>-<m|\sigma_y|n><n|\sigma_x|m>)\\&=\begin{cases}i\dfrac{1}{2B^2}\vec{z}\quad, & m=1/2\\-i\dfrac{1}{2B^2}\vec{z}\quad, & m=-1/2\end{cases}\end{aligned}\tag{3.8.1}$$

将 (3.8.1) 式表示为 $\vec{V}_m(\vec{B})=i\frac{m\vec{z}}{B^2}=im\frac{\vec{B}}{B^3}$, 代入 (2.7.17) 式，得，

$$\gamma_m(C)=-\mathrm{Im}\left(\int\int_C d\vec{s}\cdot\frac{im\vec{B}}{B^3}\right)=-m\Omega(C)\tag{3.8.2}$$

式中， $\Omega(C)$ 为闭路 C 在参量空间上对 $\vec{B}=0$ 点的立体角 (见图 3.18). 若磁场扫过的圆锥半角为 θ_0, 则

$$\vec{B}=B(\vec{x}\sin\theta_0\cos\omega t+\vec{y}\sin\theta_0\sin\omega t+\vec{z}\cos\theta_0)\tag{3.8.3}$$

$$\begin{aligned}\Omega(C)&=2\pi(1-\cos\theta_0)\\\gamma_m(C)&=-2\pi m(1-\cos\theta_0)\end{aligned}\tag{3.8.4}$$

这样便得波函数 $|\psi(T)>$ 与 $|\psi(0)>$ 的如下关系：

$$\vec{R}(T)=\vec{R}(0)$$

$$|\psi(T)>=\exp\{-i/\hbar\int_0^T dtE_m[\vec{R}(t)]\}\exp[i\gamma_m(C)]|\psi(0)>\tag{3.8.5}$$

这个方程也可看成 (2.7.8) 式当 $<n'|\dot{n}'>=0$ 时的解

$$|n'(T)>=e^{i\gamma_m(C)}|n'(0)> \tag{3.8.6}$$

Tomita 与 Chiao 等 [20] 是通过光学实验观察 Berry 位相的，他们讨论的系统与上面讨论的自旋为 1/2 的系统在慢变磁场中的运动相当. Chiao 与 Wu 研究了光子的自旋，光子为玻色子，自旋 s 为 $1, s(s+1)=2, s_z=\mu, \mu$ 有三个分量，其中 $\mu=-1$, 1 分别对应于左旋光与右旋光，$\mu=0$ 对应于纵场是不存在的 [21,22]. 光子绕波矢 $\vec{k}$ 左、右旋 $\mu=-1$, 1 与电子绕磁场 $\vec{B}$ 自旋 $\sigma_z=-1/2$, 1/2 为相当. 电子在磁场中的哈密顿量为 $\frac{1}{2}g\vec{\sigma}\cdot\vec{B}$, 表征光子螺旋性的哈密顿量为 $K\vec{s}\cdot\vec{k}, K$ 为材料的旋光性系数. 光的总哈密顿量可写为

$$H=H_0+K\vec{s}\cdot\vec{k} \tag{3.8.7}$$

光子自旋态的运动方程为

$$\frac{i}{\hbar}\frac{\partial}{\partial\tau}|\vec{k}(\tau),\mu>=H|\vec{k}(\tau),\mu>=(E_0+\mu K)|\vec{k}(\tau),\mu>$$

故有

$$|\vec{k}(\tau),\mu>=e^{-i(E_0+\mu K)\tau/\hbar-i\gamma_\mu}|\vec{k}(0),\mu> \tag{3.8.8}$$

式中，γ_μ 为 Berry 位相，$\gamma_\mu=-\mu\Omega(C), C$ 为波矢 $\vec{k}$ 扫过的闭路 C 的立体角. 设光子进入光纤时的状态为线偏振光，即 $\mu=\pm1$ 的右、左旋偏振光的叠加态为

$$|x>=\frac{1}{\sqrt{2}}(|+>+|->) \tag{3.8.9}$$

则在光纤中经历一段路程到达 x' 点的状态为

$$|x'>=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i(E_0+K)\tau/\hbar-i\gamma_+}|+>+e^{-i(E_0-K)\tau/\hbar-i\gamma_-}|->\right) \tag{3.8.10}$$

注意到 $\gamma_-=-\gamma_+$, 故有 $|<x|x'>|^2=\cos^2(K\tau-\gamma_+)$. 按 Malus 定理，这表明偏振面也旋转了 $K\tau-\gamma_+$ 角度，其中 $K\tau$ 与旋光系数 K 成正比，但 $\gamma_\pm$ 与 K 及 τ 无关，仅与光纤的几何形状有关. 如果光纤拉成一直线的话，$\gamma_\pm=0$, 如果光纤在圆管上绕成螺线形状 (见图 3.19), 则 $\Omega(C)=2\pi(1-\cos\theta), \cos\theta=P/S$, 其中 S 为光纤长度，P 为圆管长度. 而 Berry 位相 $\gamma(C)=-\mu\Omega(C)=-2\pi\mu(1-P/S), \mu=\pm1$ 为光子的左、右旋量子数，通过测得的偏振面的旋转角 θ 与上式计算得到的 Berry 位相 $\gamma(C)$ 相符 [20].

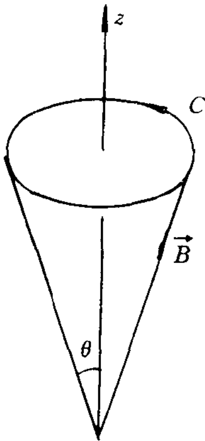


图 3.18 闭路 C 的立体角 $\Omega(C)$

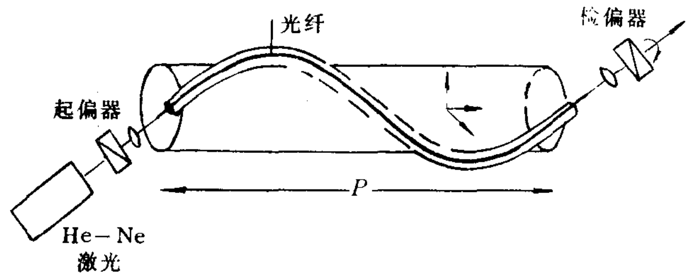


图 3.19 观察 Berry 位相的实验装置示意图

(参照 Chiao 等 [20])

第四章 原子的缀饰态

我们已知在强场作用下，简化的二能级、三能级密度矩阵方程可解析求解，并解释了诸如饱和吸收、光学章动、光脉冲形成与演化等现象．若直接求解在强场作用下二能级或三能级原子的 Schrödinger 方程，也会得出许多有意义的结果，并能引出光学非线性相互作用中一个重要的概念—原子的缀饰态．有关缀饰态、部分缀饰态的引入及其应用是本章主要讨论的内容[1~5]．

4.1 二能级原子 Schrödinger 方程的解

对于二能级原子，设 g 为基态， m 为激发态，则相互作用方程 (2.4.5) 可写为

$$\dot{a}_g = \frac{1}{i\hbar}H'_{gm}e^{-i\omega_{mg}t}a_m,\quad \dot{a}_m = \frac{1}{i\hbar}H'^*_{mg}e^{i\omega_{mg}t}a_g \tag{4.1.1}$$

当该原子处于交变的电场中时，式中的相互作用矩阵元

$$H'_{gm} = H'^*_{mg} = -\mu_{mg}(Ee^{-i\omega t} + E^*e^{i\omega t}) \tag{4.1.2}$$

由于 $E(E=|E|e^{i\varphi})$ 的初位相 φ 可通过时间原点 t_0 的选择而消掉，即 $e^{i\varphi-i\omega t_0}=1$, 故不失一般性，可设 (4.1.2) 式中的 $E=E^*$, 并令 $\dfrac{2\mu_{mg}E}{\hbar}=\Omega,\Omega$ 为 Rabi 频率．将 (4.1.2) 式代入 (4.1.1) 式，便得

$$\begin{aligned}\dot{a}_g &= -\frac{i}{2}\Omega[e^{-i(\omega_{mg}-\omega)t}+e^{-i(\omega_{mg}+\omega)t}]a_m\\ \dot{a}_m &= -\frac{i}{2}\Omega[e^{i(\omega_{mg}+\omega)t}+e^{i(\omega_{mg}-\omega)t}]a_g\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

式中， $e^{\pm i(\omega_{mg}-\omega)t}$ 为共振项， $e^{\pm i(\omega_{mg}+\omega)t}$ 为反共振项．前者的贡献是主要的，后者是次要的，这从对时间的积分

$$\int_0^t e^{\pm i(\omega_{mg}\pm\omega)t}dt = \frac{e^{\pm i(\omega_{mg}\pm\omega)t}-1}{\pm i(\omega_{mg}\pm\omega)} \tag{4.1.4}$$

中可看出．若略去反共振项仅保留共振项，亦即采用通常所说的旋波近似，令 $\bar{\Delta}=\omega-\omega_{mg}$ 表示光泵频率 ω 相对于原子跃迁频率 ω_{mg} 的失谐，则 (4.1.3) 式可写为

$$\dot{a}_g = -\frac{i}{2}\Omega e^{i\bar{\Delta}t}a_m,\qquad \dot{a}_m = -\frac{i}{2}\Omega e^{-i\bar{\Delta}t}a_g \tag{4.1.5}$$

令

$$a_g = Ke^{-i\lambda t}\qquad,\qquad a_m = K'e^{-i(\lambda+\bar{\Delta})t} \tag{4.1.6}$$

代入 (4.1.5) 式，得

$$K' = \frac{2\lambda}{\Omega}K\qquad,\qquad \lambda(\lambda+\bar{\Delta}) = \left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \tag{4.1.7}$$

λ 的两个根为

$$\lambda_\pm = -\frac{\bar{\Delta}}{2} \pm \frac{\Omega'}{2} \quad , \quad \Omega' = \sqrt{\Omega^2 + \bar{\Delta}^2} \tag{4.1.8}$$

则 (4.1.5) 式的通解为

$$\begin{aligned} a_g(t) &= e^{i\bar{\Delta}t/2}\left(A_+ e^{-i\Omega' t/2} + A_- e^{i\Omega' t/2}\right) \\ a_m(t) &= e^{-i\bar{\Delta}t/2}\left(\frac{\bar{\Delta}-\Omega'}{\Omega} A_+ e^{-i\Omega' t/2} + \frac{\bar{\Delta}+\Omega'}{\Omega} A_- e^{i\Omega' t/2}\right) \end{aligned} \tag{4.1.9}$$

式中， A_+, A_- 为两个任意的常数，它们可由 a_g 和 a_m 的初值来确定.

4.2 原子的缀饰态

“缀饰态”一词，强调了强场的作用不仅影响原子在能态间的跃迁，而且通过 (4.1.9) 式随时间变化的因子表现出来的能级移位来“修饰”原子内部的能态结构，得出新的缀饰态. 利用通解 (4.1.9) 式，可定义原子的缀饰态为 [1]

$$\begin{aligned} A_+ &= iB^{1/2} \quad , \quad A_- = A^{1/2} \\ A &= \frac{1-\bar{\Delta}/\Omega'}{2} \quad , \quad B = \frac{1+\bar{\Delta}/\Omega'}{2} \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\Delta}-\Omega'}{\Omega} A_+ &= i\frac{\bar{\Delta}-\Omega'}{\sqrt{\Omega'^2-\bar{\Delta}^2}}\sqrt{\frac{1+\bar{\Delta}/\Omega'}{2}} = -iA^{1/2} \\ \frac{\bar{\Delta}+\Omega'}{\Omega} A_- &= \frac{\bar{\Delta}+\Omega'}{\sqrt{\Omega'^2-\bar{\Delta}^2}}\sqrt{\frac{1-\bar{\Delta}/\Omega'}{2}} = B^{1/2} \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

故缀饰态可表示为

$$\begin{aligned} a_g(t) &= e^{i\bar{\Delta}t/2}(iB^{1/2}e^{-i\Omega' t/2} + A^{1/2}e^{i\Omega' t/2}) \\ a_m(t) &= -ie^{-i\bar{\Delta}t/2}(A^{1/2}e^{-i\Omega' t/2} + iB^{1/2}e^{i\Omega' t/2}) \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

因波函数初相位可任意取定，故可去掉常数位相因子 $-i = e^{-i\pi/2}$, 缀饰原子的波函数方程为

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_m &= a_m(t)e^{-iE_m t/\hbar}u_m = A^{1/2}\psi_{m\alpha} + iB^{1/2}\psi_{m\beta} \\ \tilde{\psi}_g &= a_g(t)e^{-iE_g t/\hbar}u_g = iB^{1/2}\psi_{g\alpha} + A^{1/2}\psi_{g\beta} \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

$$\begin{aligned} \psi_{m\alpha} &= e^{-iE_m t/\hbar - i(\bar{\Delta}/2+\Omega'/2)t}u_m \\ \psi_{m\beta} &= e^{-iE_m t/\hbar - i(\bar{\Delta}/2-\Omega'/2)t}u_m \\ \psi_{g\alpha} &= e^{-iE_g t/\hbar - i(-\bar{\Delta}/2+\Omega'/2)t}u_g \\ \psi_{g\beta} &= e^{-iE_g t/\hbar - i(-\bar{\Delta}/2-\Omega'/2)t}u_g \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

从 (4.2.4) 和 (4.2.5) 式看出，原子的缀饰态 $\tilde{\psi}_m$ 实际上包括两个能态 $\psi_{m\alpha}$，$\psi_{m\beta}$, 间距为 $\Omega' = \sqrt{\bar{\Delta}^2 + \Omega^2}$. 其中 Rabi 频率 Ω 正比于场强 E, 故这一对能态反映了包括原子的哈密顿量 H_0 、原子与场相互作用哈密顿量 H' 在内的总的哈密顿量 $H_0 + H'$ 的状态，是外场被缀饰在原子上的状态，故称之为缀饰态. 当 $E \to 0$ 时， $\Omega = \dfrac{2\mu E}{\hbar} \to 0, \Omega' = \sqrt{\bar{\Delta}^2 + \Omega^2} \simeq \bar{\Delta}$. 由 (4.2.1) 式，得 $A \to 0, B \to 1$. 又由 (4.2.4),(4.2.5) 式，得

$$\tilde{\psi}_m \to i\psi_{m\beta} = ie^{-iE_m t/\hbar}u_m$$
$$\tilde{\psi}_g \to i\psi_{g\alpha} = ie^{-iE_g t/\hbar}u_g \tag{4.2.6}$$

此即没有外场作用时，$H' \simeq 0$ 的原子状态，也称之为原子裸态．图 4.1 给出缀饰态 $\psi_{m\alpha}$，$\psi_{m\beta}$，$\psi_{g\alpha}$，$\psi_{g\beta}$ 与裸态 $e^{-iE_m t/\hbar}u_m$，$e^{-iE_g t/\hbar}u_g$ 间的过渡关系．

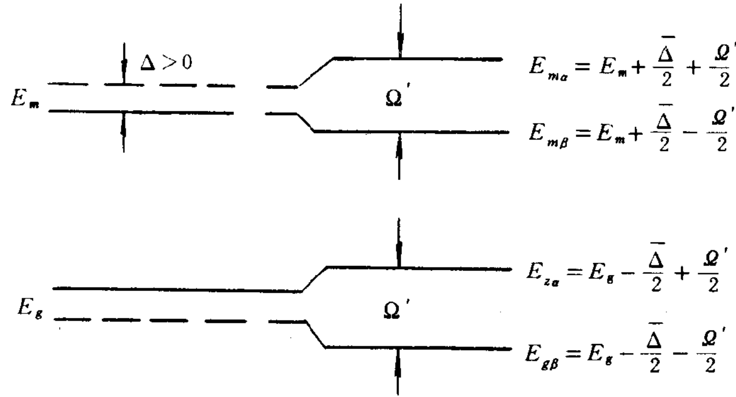


图 4.1 缀饰态与裸态能级图

(取自 Tan Weihan, Lu Weiping and R. G.Harrison [2])

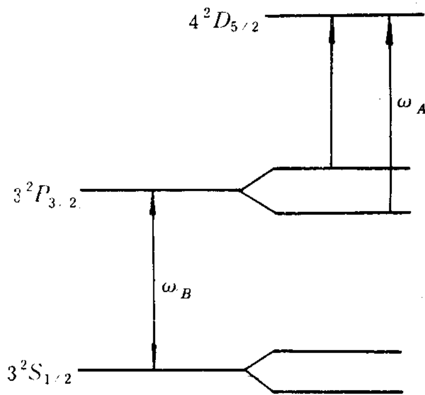


图 4.2 $(\alpha,\ \beta)$ 分裂探测

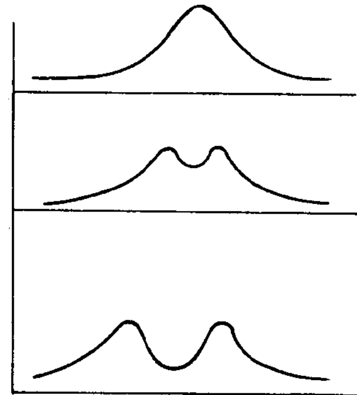


图 4.3 吸收谱随 Ω 的变化曲线

(参照 H.R.Gray [3])

在强场作用下，二能级原子状态的 (α,β) 分裂最早由 Atler–Townes 研究过[3]，也称之为 Atler-Townes 效应．这已在实验上得到验证[3,4]．在 Atler–Townes 效应中，探测从两个由强场联系起来的能级中的一个到第三个能级的跃迁，预期有两条吸收谱线．实验是这样设计的(见图 4.2)，第一个激光 ω_B 激发钠原子 $3\,^2S_{1/2}(F=2,\ m_F=2) \to 3\,^2P_{3/2}(F'=3,\ m_F=3)$ 跃迁，而第二个弱的探测光 ω_A 探测从 $3\,^2P_{3/2}(F'=3,\ m_{F'}=3) \to 4\,^2D_{5/2}(F''=4,\ m_{F''}=4)$ 的吸收．所观察到的吸收谱呈现两条吸收谱线．用共振泵浦激发时 $\bar{\Delta}=0$, $A=B=1/2$，这两条吸收谱是对称的；而用偏离共振的泵浦激发时，则是不对称的，$\bar{\Delta}\neq 0$, $A\neq B$．两个峰的间距 Ω' 与理论值 $\sqrt{\bar{\Delta}^2+\Omega^2}$ 一致．图 4.3 给出 ω_B 与原子跃迁频率为共振，不同泵浦功率 I_B 的吸收谱测量．双峰间距随功增大而增大．由上到下 I_B 分别为 5.3mW/cm^2, 86mW/cm^2, 470mW/cm^2.

4.3 Cohen-Tannoudji 的缀饰原子

上节"原子的缀饰态"是指场与原子的相互作用 H' 对原子的"修饰"产生的"原子的缀饰态"[1], 致于场本身并未被描述, 而由 Cohen-Tannoudji 的缀饰原子概念最先是从研究原子与光子组合系统的本征态提出来的[5], 组合系统的哈密顿量 $H=H_0+H'+H_L$, 式中 H_0 为原子的哈密顿量, H_L 为光场的哈密顿量. 在不考虑原子与场的相互作用时, 组合系统的两个近乎简并状态可写为

$$\begin{aligned}&|g,n>=e^{-i\omega_g t}u_g|n>\\&|m,n-1>=e^{-i\omega_m t}u_m|n-1>\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

前者表示原子处于基态, 场有 n 个光子; 后者表示原子处于激发态, 场有 $n-1$ 个光子. 由于场的频率约等于原子跃迁频率 ω_{mg}, 故有 $E_g+n\hbar\omega\simeq E_m+(n-1)\hbar\omega$. 即 $|g,n>$, $|m,n-1>$ 为近乎简并的, 在计及相互作用 H' 后, 才会去简并. 现写出状态 $\exp(i\frac{\omega-\omega_{mg}}{2}t)|g,n>$ 和 $\exp(-i\frac{\omega-\omega_{mg}}{2}t)|m,n-1>$ 间 $H=H_0+H'+H_L$ 的矩阵元, 并求其本征值 $\hbar\tilde{\lambda}$. 按照通常量子力学微扰论, $\hbar\tilde{\lambda}$ 为下列行列式的根:

$$\begin{vmatrix}E_m+(n-1)\hbar\omega-\hbar\tilde{\lambda} & -\mu_{mg}E(\omega)\\ -\mu_{mg}E(\omega) & E_g+n\hbar\omega-\hbar\tilde{\lambda}\end{vmatrix}=0 \tag{4.3.2}$$

令 $\tilde{\lambda}=\dfrac{E_g+E_m}{2\hbar}+(n-\dfrac{1}{2})\omega+\lambda$, $\bar{\Delta}=\omega-\omega_{mg}$, 则上式为

$$\begin{vmatrix}-\bar{\Delta}/2-\lambda & -\Omega/2\\ -\Omega/2 & \bar{\Delta}/2-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad , \quad \lambda_{\pm}=\pm\Omega'/2 \tag{4.3.3}$$

对应于本征值 $\lambda_{\pm}$ 的本征函数分别为

$$\begin{aligned}|\alpha_n>=&\ \frac{\bar{\Delta}+\Omega'}{\sqrt{(\bar{\Delta}+\Omega')^2+\Omega^2}}e^{i\bar{\Delta}t/2-i\Omega't/2-i\omega_g t}u_g|n>\\&-\frac{\Omega}{\sqrt{(\bar{\Delta}+\Omega')^2+\Omega^2}}e^{-i\bar{\Delta}t/2-i\Omega't/2-i\omega_m t}u_m|n-1>\\|\beta_n>=&\ \frac{\Omega}{\sqrt{(\bar{\Delta}+\Omega')^2+\Omega^2}}e^{i\bar{\Delta}t/2-i\omega_g t}u_g|n>\\&+\frac{\bar{\Delta}+\Omega'}{\sqrt{(\bar{\Delta}+\Omega')^2+\Omega^2}}e^{-i\bar{\Delta}t/2+i\Omega't/2-i\omega_m t}u_m|n-1>\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

其中涉及原子的部分也能从通解 (4.1.9) 式得到.

值得注意的是, Cohen-Tannoudji 的缀饰原子是包括原子与场的态, 而 (4.2.4) 式的缀饰态则仅仅是原子的态.

4.4 原子部分缀饰态及其展开 [2]

我们在第二章用微扰方法解了 Schrödinger 方程, 将原子与场相互作用后的波函数用无相互作用的波函数展开. 这虽然提供了计算各级微扰波函数与极化率的系统办法, 但

只适用于弱场情形. 对于强场将不收敛，这办法也就不适用了. 后来又讨论了密度矩阵方程，特别是在旋波近似下稳态密度矩阵方程的准确求解，但也只适用于二能级、三能级原子，对于多于三能级原子将是很复杂的. 在这一节我们将引入原子的部分缀饰态，并以此为基，修正已有的微扰展开方法，使之适用于任意场强，而不只限于弱场. 如前所述，包括自由原子 H_0 及相互作用 V 在内的哈密顿量 $H = H_0 + V$ 的 Schrödinger 方程为

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi = (H_0 + V)\psi \tag{4.4.1}$$

设 u_j 为自由原子的本征态 $H_0 u_j = E_j u_j$, 通常的微扰方法就是用 u_j 作为基来展开的，这样的展开只适用于弱场，因为 u_j 是 H_0 的本征态，并未反映场强的大小. 对于强场相互作用来说，应选择与场强有关的基，从相互作用中取出一个部分 δ 与 H_0 并在一起，用以确定新的基 ψ^0. 将 Schrödinger 方程写为

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = [(H_0 + \delta) + (V - \delta)]\psi \tag{4.4.2}$$

δ 即从 V 中取出的部分，用以确定新的基函数 ψ^0. 对于弱场情形 $\delta \to 0$, $\psi_j^0 \to u_j$, 与通常微扰理论一致. δ 标志场的强度， ψ^0 由下式确定：

$$i\hbar\frac{\partial\psi^0}{\partial t} = (H_0 + \delta)\psi^0 \tag{4.4.3}$$

设 (4.4.3) 式的本征函数为 ψ_j^0, 将 (4.4.2) 式的通解 ψ 用 ψ_j^0 展开

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_n a_n(t)\psi_n^0 \\ a_k &= a_k^0 + a_k^1 + \cdots + a_k^N + \cdots \\ \dot{a}_k^N &= (i\hbar)^{-1}\sum_l < \psi_k^0|V - \delta|\psi_l^0 > a_l^{N-1}\end{aligned} \tag{4.4.4}$$

式中

$$\psi_j^0 = A_j^0(t)u_j(\vec{r}) \tag{4.4.5}$$

δ 一经给定便可解方程 (4.4.3)~(4.4.5) 了.

4.4.1 单频泵浦场近共振激发的多能级系统

设单频泵浦场 $E(t) = E_0(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$ 与多能级原子的 m, g 能级为共振或近共振. 相互作用哈密顿量 $V = -\mu E = -\mu E_0(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$. δ 算子由下式定义：

$$\begin{aligned}\delta u_m &= -(1-\beta)\mu_{mg}E(t)u_g \\ \delta u_g &= -(1-\beta)\mu_{gm}E(t)u_m \\ \delta u_j &= 0 \qquad , \qquad j \neq m, g\end{aligned} \tag{4.4.6}$$

式中， $\beta(0 < \beta < 1)$ 为待定参量，其物理意义将在下面讨论. 将 (4.4.5) 式代入 (4.4.3) 式，并应用定义 (4.4.6) 式，便得

$$\begin{aligned}i\hbar\dot{A}_j^0 &= E_j A_j^0 \qquad , \qquad j \neq m, g \\ \psi_j^0 &= A_j^0 u_j(\vec{r}) = e^{-iE_j t/\hbar}u_j(\vec{r})\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

且

$$
\begin{aligned}
i\hbar\dot{A}_m^0 &= E_m A_m^0 - (1-\beta)\mu_{mg}E_0(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t})A_g^0 \\
i\hbar\dot{A}_g^0 &= E_g A_g^0 - (1-\beta)\mu_{gm}E_0(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t})A_m^0
\end{aligned}
\tag{4.4.8}
$$

由方程 (4.4.7) 式，我们看到波函数 ψ_j^0 与常见的微扰波函数的基同，这是因为 ψ_j 能级已远离共振．对于共振能级 m, g 的方程 (4.4.8), 可用旋波近似来求解．参照 (4.1.3)~(4.2.5) 式，将 (4.4.8) 式的解代入 (4.4.5) 式中，便得共振相互作用波函数为

$$
\begin{aligned}
\psi_m^0 &= A^{1/2}\psi_{m\alpha} + iB^{1/2}\psi_{m\beta} \\
\psi_g^0 &= iB^{1/2}\psi_{g\alpha} + A^{1/2}\psi_{g\beta}
\end{aligned}
\tag{4.4.9}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\psi_{m\alpha} &= e^{-iE_m t/\hbar - i\bar{\Delta}t/2 - i\Omega' t/2}u_m \\
\psi_{m\beta} &= e^{-iE_m t/\hbar - i\bar{\Delta}t/2 + i\Omega' t/2}u_m \\
\psi_{g\alpha} &= e^{-iE_m t/\hbar + i\bar{\Delta}t/2 - i\Omega' t/2}u_g \\
\psi_{g\beta} &= e^{-iE_m t/\hbar + i\bar{\Delta}t/2 + i\Omega' t/2}u_g
\end{aligned}
\tag{4.4.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&A = \frac{(1-\bar{\Delta}/\Omega')}{2} \quad , \quad B = \frac{1+\bar{\Delta}/\Omega'}{2} \quad , \quad \bar{\Delta} = \omega - \omega_{mg} \\
&\Omega' = \sqrt{\bar{\Delta}^2 + \Omega_{mg}^2(1-\beta)^2} \quad , \quad \Omega_{mg} = \frac{2\mu_{mg}E}{\hbar}
\end{aligned}
\tag{4.4.11}
$$

像 (4.2.4) 和 (4.2.5) 式那样， (4.4.9) 和 (4.4.10) 式所描述的乃激发态 m 、基态 g 由于辐射场的相互作用而引起的 (α,β) 分裂．现在的部分缀饰态与前面的缀饰态之不同，仅仅如 (4.4.11) 式，以 $(1-\beta)\Omega_{mg}$ 来代替 (4.1.8) 式 Ω' 中的 Ω, 亦即有 $1-\beta$ 部分相互作用能是用来缀饰原子，而不是全部．若 $1-\beta=0$, 便是微扰理论的结果，没有场能用来缀饰原子；若 $1-\beta=1$, 便是全部相互作用能用来缀饰原子，即前面 (4.2.4) 和 (4.2.5) 式所描述的原子缀饰态；若 $1>1-\beta>0$, 即我们现在讨论的原子部分缀饰态．

引用部分缀饰态 (4.4.9) 式，可求得电偶极矩阵元如下：

$$
\begin{aligned}
<\psi_m^0|er|\psi_g^0> &= \mu_{mg}(Ae^{i\omega_{m\alpha,g\beta}t} + Be^{i\omega_{m\beta,g\alpha}t}) \\
<\psi_g^0|er|\psi_m^0> &= \mu_{gm}(Ae^{-i\omega_{m\alpha,g\beta}t} + Be^{-i\omega_{m\beta,g\alpha}t})
\end{aligned}
$$

由 δ 算子的定义式 (4.4.6), 并应用上面结果，便得

$$
<\psi_j^0|V-\delta|\psi_k^0> = A_j^{0*}A_k^0 <u_j|V-\delta|u_k> \tag{4.4.12}
$$

式中

$$
<u_j|V-\delta|u_k> = \begin{cases} V_{jk} \quad , \quad k\neq m,g\ ;\ j\neq m\ ,\ k=g\ ;\ j\neq g\ ,\ k=m \\ \beta V_{jk} \quad , \quad j=m\ ,\ k=g\ ;\ j=g\ ,\ k=m \end{cases}
$$

现进一步讨论参量 β 的物理意义．由方程 (4.4.3) 与 (4.4.6),$(1-\beta)V$ 即为用来缀饰原子的那部分相互作用能．若取 $\beta=0$, 即全部相互作用能都用来缀饰原子，则由 (4.4.12) 式，激发态原子产生跃迁的能量将消失掉，即

$$
<u_m|V-\delta|u_g> = <u_g|V-\delta|u_m> = 0 \tag{4.4.13}
$$

于是，在能级 m 与 g 间的跃迁将是不可能的．严格说来，这样的选择与物理事实相悖的．另一方面，若取 $\beta=1$, 则又完全退化到无缀饰的通常的微扰论的情形．因此，部分

缀饰，即 $1 > 1-\beta > 0$, 是唯一与物理事实相符且能避免微扰论强场发散困难的可能选择.

β 的具体数值可通过比较由部分缀饰态计算得出的电偶极矩与密度矩阵方法求得的电偶极矩来确定，也可采用统计模型来确定 [2,6]. 这里只说密度矩阵法.

对于二能级原子，其电偶极矩的期待值为

$$<p>^{(1)} = <\psi_g^0|er|\psi_m^1> + <\psi_m^1|er|\psi_g^0> \tag{4.4.14}$$

一级微扰波函数可写为

$$\psi_m^1 = A_m^1\psi_m^0 \tag{4.4.15}$$

按 (4.4.4) 式，有

$$\begin{aligned} A_m^1 &= \frac{1}{i\hbar}\int <\psi_m^0| - \beta erE_0(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})|\psi_g^0> dt \\ &= \beta\frac{\mu_{mg}E_0}{\hbar}\left(\frac{Ae^{i(\omega_{m\alpha,g\beta}-\omega)t}}{\omega_{m\alpha,g\beta}-\omega} + \frac{Be^{i(\omega_{m\beta,g\alpha}-\omega)t}}{\omega_{m\beta,g\alpha}-\omega}\right) \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

求出电偶极矩的期待值为

$$<p>^{(1)} = \frac{\mu_{mg}\Omega_{mg}\beta}{2}\left(\frac{A^2}{\omega_{m\alpha,g\beta}-\omega} + \frac{B^2}{\omega_{m\beta,g\alpha}-\omega} + \frac{ABe^{i\Omega' t}}{\omega_{m\alpha,g\beta}-\omega} + \frac{ABe^{-i\Omega' t}}{\omega_{m\beta,g\alpha}-\omega}\right)e^{-i\omega t} + c.c. \tag{4.4.17}$$

式中， c.c. 即复数共轭，下同. 略去上式中 $\propto e^{\pm i\Omega' t}$ 的项，便得出跃迁 $m\alpha \to g\beta$ 与 $m\beta \to g\alpha$ 的感生电偶极矩 (见图 4.1). 至于跃迁 $m\alpha \to g\alpha$ 与 $m\beta \to g\beta$, 由于相互抵消，无贡献. 在 (4.4.17) 式中设跃迁频率的带宽为 ν, 则 (4.4.17) 式为

$$\begin{aligned} <p>^{(1)} &= \frac{\beta\Omega_{mg}}{2}\mu_{mg}\left\{\frac{\left[\frac{1}{2}(1-\bar{\Delta}/\Omega')\right]^2}{\Omega' - i\nu} + \frac{\left[\frac{1}{2}(1+\bar{\Delta}/\Omega')\right]^2}{-\Omega' - i\nu}\right\}e^{-i\omega t} + c.c. \\ &= \frac{-\mu_{mg}}{2}\,\frac{\beta\Omega_{mg}(\bar{\Delta} - i\nu\tau)}{\Omega'^2 + \nu^2}e^{-i\omega t} + c.c. \\ &= \frac{-\mu_{mg}}{2}\,\frac{\beta\Omega_{mg}\sqrt{\bar{\Delta}^2 + \nu^2\tau^2}}{(1-\beta)^2\Omega_{mg}^2 + \bar{\Delta}^2 + \nu^2}e^{-i\omega t - i\phi} + c.c. \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

式中， $\tau = \frac{1}{2}(1 + \bar{\Delta}^2/\Omega'^2)$.

另一方面，用密度矩阵方法也可确定电偶极矩. 事实上，将原子波函数表示为稳态波函数的迭加：

$$\psi = a_m e^{-i\omega_m t}u_m + a_g e^{-i\omega_g t}u_g \tag{4.4.19}$$

由此可计算出电偶极矩

$$\begin{aligned} <p> &= <\psi|er|\psi> \\ &= \mu_{mg} <a_g^* a_m> e^{-i\omega_{mg} t} + c.c. \\ &= \mu_{mg}\rho_{mg} + c.c. \end{aligned} \tag{4.4.20}$$

参照 (3.3.7) 式，得密度矩阵

$$\rho_{mg} = \frac{\mu_{mg}}{2}\frac{\Omega_{mg}\Delta_0\sqrt{\bar{\Delta}^2+\nu^2}e^{i\Phi'}}{\nu^2+\bar{\Delta}^2+\Omega_{mg}^2\nu/\nu_1}e^{-i\omega t} \tag{4.4.21}$$

式中，$\nu = 1/T_2$，$\nu_1 = 1/T_1$，而 T_1，T_2 即原子的横弛豫时间与纵弛豫时间. 取初值条件 $\Delta_0 = (\rho_{mm}-\rho_{gg})_0 = -1$，令 $b = \nu_1/\nu$，比较 (4.4.20) 式与 (4.4.18) 式，假定用两种方法算得的振幅相等，于是有

$$\frac{\beta\Omega_{mg}\sqrt{\bar{\Delta}^2+\nu^2\tau^2}}{(1-\beta)^2\Omega_{mg}^2+\bar{\Delta}^2+\nu^2} = \frac{\Omega_{mg}\sqrt{\bar{\Delta}^2+\nu^2}}{\nu^2+\bar{\Delta}^2+\Omega_{mg}^2/b} \tag{4.4.22}$$

定义

$$x = \frac{\Omega_{mg}}{\sqrt{\bar{\Delta}^2+\nu^2}}$$

则 (4.4.22) 式化为

$$\frac{\beta x}{(1-\beta)^2x^2+1} = \frac{\gamma b x}{x^2+b} \tag{4.4.23}$$

式中

$$\gamma = \sqrt{(\bar{\Delta}^2+\nu^2)/(\bar{\Delta}^2+\nu^2\tau^2)}$$

引进参量 $\eta = \dfrac{\bar{\Delta}^2}{(\bar{\Delta}^2+\nu^2)}$，则 γ 可写为

$$\gamma = \left[\eta+(1-\eta)\left(\frac{1}{2}+\frac{\eta/2}{(1-\beta)^2x^2+\eta}\right)^2\right]^{-1/2} \tag{4.4.24}$$

当参量 b,η 与归一场强 x 给定后，便可解 (4.4.23) 和 (4.4.24) 式以及相互作用能中用来缀饰原子的部分 $1-\beta$，和相应的修正后的 Rabi 分裂 $(1-\beta)x$. 图 4.4 和图 4.5 给出 $(1-\beta)x$ 对 x，β 对 x 的变化曲线，其中 b,η 取为定数，η 取为 1.

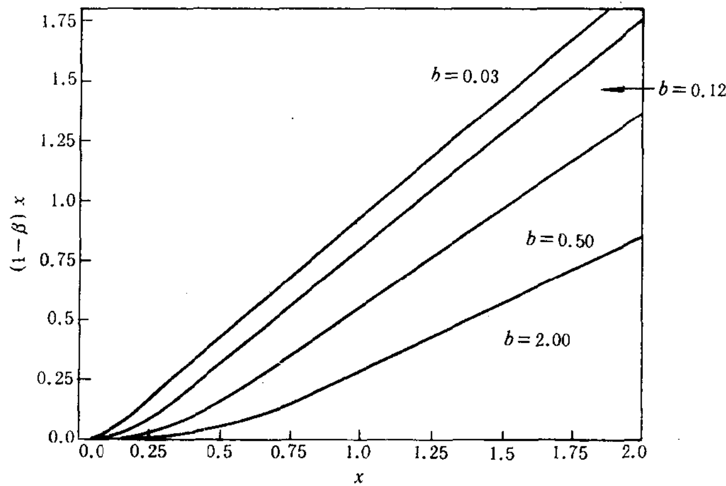


图 4.4　归一化的有效 Rabi 分裂随归一化 Rabi 频率 x 变化的曲线

(取自 [2])

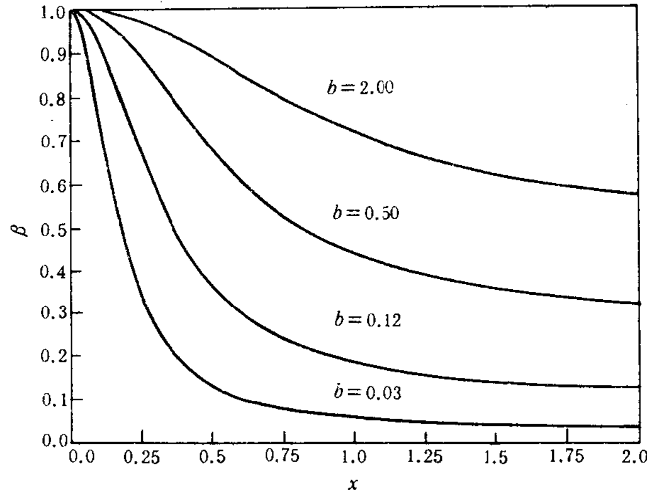


图 4.5 参量 β 随归一化 Rabi 频率 x 变化的曲线 (取自 [2])

对于小的 $x(x \ll 1)$, 亦即弱场相互作用，由 (4.4.24) 式给出 $\gamma \simeq 1$, 与 η 无关. 而方程 (4.4.23) 式可简化为 $(1-\beta)x \simeq x^3/b$, 这对应于 $(1-\beta) \sim 0$, 因而用来修正原子状态的那部分相互作用能非常小. 但有趣的是，这部分相互作用能与 b 成反比，这就意味着非相干情形 $(1/b = T_1/T_2 \gg 1)$ 要比相干情形 $(1/b = T_1/T_2 = 2)$ 在相同的归一化 Rabi 频率 x 下有更大的 Rabi 分裂 (见图 4.4). 另一方面，当 x 很小时，由 (4.4.11) 式，我们有

$$\begin{array}{llll} \Omega' = -\bar{\Delta} \ , & A = 1 \ , & B = 0 \ , & \text{当}\bar{\Delta} < 0 \\ \Omega' = \bar{\Delta} \ , & A = 0 \ , & B = 1 \ , & \text{当}\bar{\Delta} > 0 \end{array} \tag{4.4.25}$$

相应的感生电偶极矩变为

$$< p >^{(1)} \simeq \frac{-\mu_{mg}^2 E}{\hbar} \frac{1}{\omega - \omega_{mg}} e^{-i\omega t} + c.c. \tag{4.4.26}$$

与通常的弱场微扰结果一致.

对于大 $x(\gg 1)$, 即强场作用情形，解方程 (4.4.23) 式得

$$(1-\beta)x \simeq \left(\sqrt{\frac{1}{4\gamma^2 b^2} + \frac{1}{\gamma b}} - \frac{1}{2\gamma b} \right) x \tag{4.4.27}$$

根据这个关系式，我们可讨论两种极限情形. 其一为 $\eta = 1$, 对应于大失谐 $(\bar{\Delta} \gg \nu)$ 情形；另一则为 $\eta = 0$, 对应于共振跃迁 $(\bar{\Delta} = 0)$ 情形. 对于第一种情形，由 (4.4.24) 式得 $\gamma = 1$. 又若为完全相干相互作用 $b = 2$, 则按 (4.4.27) 式得 $1-\beta = \beta = 0.5$, 这就是相互作用能一半用于缀饰原子，构成新的基函数，另一半则用于激发原子在状态间跃迁. 如果是非相干相互作用，则 $b \ll 1$, $1-\beta = 1-b \sim 1$, 故几乎所有的相互作用能均用于缀饰原子，改变原子的状态，只有很小的一部分用于激发原子在状态间跃迁. 对于第二种情形， $\gamma = 2$, 完全相干相互作用 $1-\beta \simeq 0.39$; 非相干相互作用 $1-\beta = 1-2b \sim 1$. 由此得出结论，对于非相干相互作用，不论 η 的值如何，用于激发引起能态间跃迁的那部分相互作用能是很少的；而在相干相互作用极限，总有一半或近乎一半的相互作用能用于缀饰原子，而另一半用于激发.

关于二能级原子系统的分析，比较 (4.4.18) 式与 (4.4.26) 式，可归结为对任意场强的相互作用应将弱场因子作如下代换：

$$\frac{\Omega_{mg}}{\omega-\omega_{mg}} \Rightarrow \frac{\beta\Omega_{mg}(\omega-\omega_{mg}-i\nu)}{(1-\beta)^2\Omega_{mg}^2+(\omega-\omega_{mg})^2+\nu^2} \tag{4.4.28}$$

式中，参量 β 由 (4.4.23) 式确定.

对于多能级原子系统，我们注意到通常微扰展开理论包含许多描述多光子过程的因子 $\dfrac{\Omega_{ij}}{(\omega_{ij}-n\omega)}$. 如果每一个这样的因子均按 (4.4.23) 式代换，则实现了弱场微扰论按强场带来的修正.

4.4.2 三次谐波极化率计算

在这一节中，我们将应用上几节阐述的多能级微扰计算法于共振或近共振激发多能级原子系统极化或极化率计算，并以典型的分子气体产生红外三次谐波为例.

1. 弱场相互作用

在弱场相互作用情形，三次谐波极化率可直接表示为 [7]

$$\chi^3=\frac{N}{\hbar^3}\sum_{gabc}\mu_{ga}\mu_{ab}\mu_{bc}\mu_{cg}A_{abc} \tag{4.4.29}$$

$$\begin{aligned} A_{abc} = & \frac{1}{(\omega_{cg}-\omega)(\omega_{bg}-2\omega)(\omega_{ag}-3\omega)}+\frac{1}{(\omega_{cg}-\omega)(\omega_{bg}-2\omega)(\omega_{ag}+\omega)} \\ & +\frac{1}{(\omega_{cg}-\omega)(\omega_{bg}+2\omega)(\omega_{ag}+\omega)}+\frac{1}{(\omega_{cg}+3\omega)(\omega_{bg}+2\omega)(\omega_{ag}+\omega)} \end{aligned}$$

因所选择的能级并不偏离共振很远，故上式中只保留了第一项就够了，其余的项可略去. 这样就得到简化的极化率表示式

$$\chi^3=\frac{N}{\hbar^3}\frac{\mu_{cg}\mu_{bc}\mu_{ab}}{(\omega_{cg}-\omega)(\omega_{bg}-2\omega)(\omega_{ag}-3\omega)}\times\mu_{ga} \tag{4.4.30}$$

三次谐波的极化为

$$P^{(3)}=E_i^3\chi^{(3)}=\frac{N}{8}\frac{\Omega_{cg}}{\omega_{cg}-\omega}\times\frac{\Omega_{bc}}{\omega_{bc}-2\omega}\times\frac{\Omega_{ab}}{\omega_{ab}-3\omega}\times\mu_{ga} \tag{4.4.31}$$

2. 任意场强的相互作用

首先看一下与三次谐波有关的能级结构 (见图 4.6). 若相互作用能级间隔偏离甚大，不致发生双共振情形，亦即当泵浦频率 ω 调谐到使 (4.4.31) 式分母中某一因子为共振时，其它两因子为失谐很大的 $(\Delta\gg\Omega)$. 当这一条件到满足时，单频共振表式 (4.4.28) 可应用于修正 (4.4.31) 式，这样便得出极化修正式为

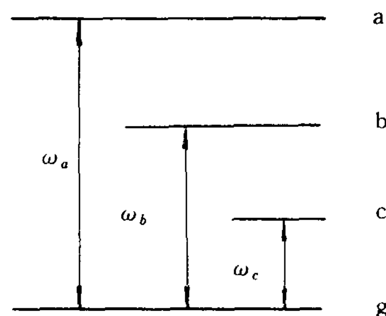


图 4.6 三次谐波能级结构示意图

(取自 [2])

$$P^{(3)}=\frac{N}{8}G_{cg}G_{bc}G_{ab}\mu_{ga} \tag{4.4.32}$$

式中

$$
\begin{aligned}
G_{cg} &= \frac{\beta_{cg}\Omega_{cg}(\omega_{cg}-\omega-i\nu_{cg})}{(1-\beta_{cg})^2\Omega_{cg}+(\omega_{cg}-\omega)^2+\nu_{cg}^2} \\
G_{bc} &= \frac{\beta_{bc}\Omega_{bc}(\omega_{bg}-2\omega-i\nu_{bg})}{(1-\beta_{bc})^2\Omega_{bc}+(\omega_{bg}-2\omega)^2+\nu_{bg}^2} \\
G_{ab} &= \frac{\beta_{ab}\Omega_{ab}(\omega_{ag}-3\omega-i\nu_{ag})}{(1-\beta_{ab})^2\Omega_{ab}+(\omega_{ab}-3\omega)^2+\nu_{ab}^2}
\end{aligned}
\tag{4.4.33}
$$

式中的 β 按 (4.4.23) 和 (4.4.24) 式确定. 当偏离共振很远时, β 自然地趋向于 1.

3. 实例计算 (分子气体产生的远红外三次谐波)

应用上述公式, 计算通过激发分子气体的转动能级产生远红外三次谐波. 表 4.1 列出有关的跃迁频率、碰撞加宽与跃迁的偶极矩阵元. 在计算中, 我们取定 $\Delta_0=-1$, $b=\nu_1/\nu=\dfrac{T_2}{T_1}=2$, $N=0.35\times10^{17}$分子/cm^3, 即 1 torr.

表 4.1

$\Omega_{ij}-i\nu_{ij}$ (单位为 10^{11} Hz)	μ(单位为 10^{-18} esu)
$\omega_{ag}-i\nu_{ag}=11-i10^{-4}$	$\mu_{ab}=0.6$
$\omega_{bg}-i\nu_{bg}=8.0-i10^{-4}$	$\mu_{bc}=0.2$
$\omega_{cg}-i\nu_{cg}=3.8-i10^{-4}$	$\mu_{cg}=0.6$
$\omega_g=0$	$\mu_{ga}=0.6$

图 4.7 为调谐泵浦频率 ω 时的三阶极化率. 当光泵频率 $\omega=3.8$, 而入射功率 I_1 从 0.01 增到 100.00kW/cm^2($E_1=0.145$ 增到 14.5 esu) 时, $|\chi|^{1/3}$ 由 0.008 增到 0.0015 esu. 相应的三阶极化 $|P^{(3)}|=N\times|\chi|E_1^3$ 由 0.546×10^{-10} 增到 3.6×10^{-7} esu. 这样一个数值可与相似密度的 Na 原子气体、入射光束强度 $I_1=1\text{GW/cm}^2$ 时所达到的极化值 10^{-6} esu 相比拟. 我们还注意到, 对 $|\chi|^{1/3}$ 作出主要贡献的, 当入射功率 I_1 低时为 χ 的虚部, 当入射功率高时为 χ 的实部. 这可从与图 4.9 中所表现的 I_1=100kW/cm^2 , 0.01kW/cm^2 的不同的 $|\chi|^{1/3}$ 谱轮廓得到证实.

图 4.8 给出 $|\chi|^{1/3}$ 的极大值随光泵强度的变化, 用 Rabi 频率 Ω 表示, 而泵浦频率 ω 固定在 $\omega=\omega_c$. 对于弱泵浦功率, $|\chi|^{1/3}$ 近似地保持常数, 这就是通常的微扰理论适用的区域. 由图 4.8 看出这区域可达 $\Omega=0.0001$, 亦即 1W/cm^2. 对于强泵浦的饱和效应, 来源于由泵浦光强引起的线宽, 最终导致 $|\chi|^{1/3}$ 的单调减少.

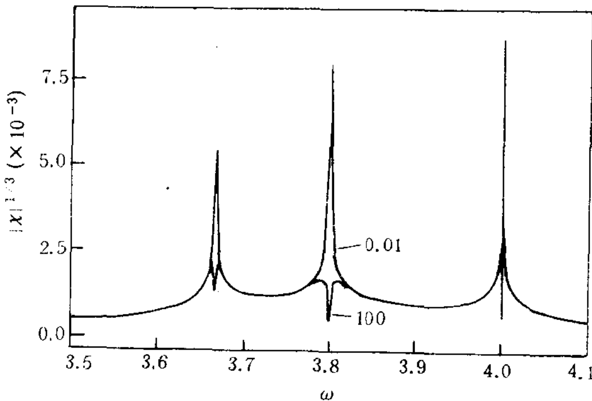


图 4.7 三阶极化率随泵浦频率 ω 的变化曲线 (取自 [2])

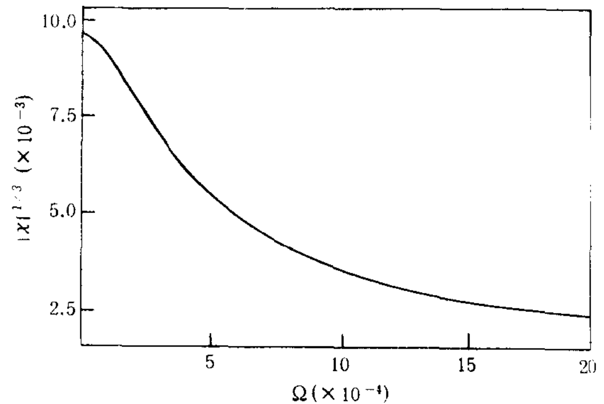


图 4.8 $\chi^{1/3}$ 的极大值随光泵浦强度而变化的曲线 (取自 [2])

4.5 集居数、介质增益与无反转激光[8]

在弱场作用下的二能级原子的共振吸收系数 α_0 由 (3.3.5) 式得

$$\alpha_0(0)=\frac{-4\pi\omega_{21}}{\hbar c}\Delta_{eg}N\mu_{21}^2T_2$$

式中， $\Delta_{eg}=\rho_{22}-\rho_{11}$, 即上能级与下能级粒子数差，也称之为集居数．在通常的情况下，由于 Boltzman 分布 $\Delta_{eg}<0$ ，$\alpha_0>0$, 光信号通过介质时，由于介质吸收，其振幅愈来愈衰减．若采取光泵抽运或其它方式造成粒子数反转 $\Delta_{eg}>0$, 则 $\alpha_0(0)<0$. 光信号通过时，由于负吸收，其振幅不但不衰减，反而得到放大，这是实现出激光的重要条件．但近来的研究表明，粒子数反转还不是出激光的必要条件[9~20]．理论上已提出多种方案，没有粒子数反转，即 $\Delta_{eg}<0$, 只要条件适合，介质也可以有增益或放大，即无反转激光．这一节我们将通过解三能级原子的密度矩阵方程来阐述无反激光的物理机制和实现无反转激光的条件．

现考虑一个由泵浦场与三能级原子组成的 V 体系 (见图 4.9)．原子能级为 1 ~ 3．泵浦频率为 ω, 在能级 1 与 2 之间驱动着，能级 1 与 3 间产生的受激辐射频率为 ω'．对这个体系，可参照 (2.6.18) 式写出密度矩阵方程

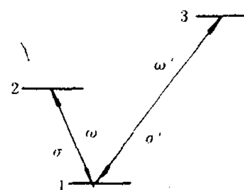


图 4.9 三能级原子的 V 系统
(取自 Tan Weihan, Lu Weiping, and Robert G. Harrison [8])

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_z}{dt}&=-(\gamma_1+\epsilon)(\sigma_z-\sigma_{z0})+2\epsilon(\sigma_z'-\sigma_{z0}')+\frac{i\Omega}{2}(\sigma^--\sigma^+)+\frac{i\Omega'}{4}(\sigma'^--\sigma'^+)\\
\frac{d\sigma^-}{dt}&=-(\gamma_2+i\Delta)\sigma^-+i\Omega\sigma_z+\frac{i\Omega'}{2}\rho_{32}\\
\frac{d\sigma^+}{dt}&=-(\gamma_2-i\Delta)\sigma^+-i\Omega\sigma_z-\frac{i\Omega'}{2}\rho_{23}
\end{aligned}\tag{4.5.1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_z'}{dt}&=-(\gamma_1'-\epsilon)(\sigma_z'-\sigma_{z0}')-2\epsilon(\sigma_z-\sigma_{z0})+i\frac{\Omega'}{2}(\sigma'^--\sigma'^+)+i\frac{\Omega}{4}(\sigma^--\sigma^+)\\
\frac{d\sigma'^-}{dt}&=-(\gamma_2'+i\Delta')\sigma'^-+i\Omega'\sigma_z'+\frac{i\Omega}{2}\rho_{23}\\
\frac{d\sigma'^+}{dt}&=-(\gamma_2'-i\Delta')\sigma'^+-i\Omega'\sigma_z'-\frac{i\Omega'}{2}\rho_{32}
\end{aligned}\tag{4.5.2}$$

$$\frac{d\rho_{32}}{dt}=-(\gamma_{32}+i\Delta-i\Delta')\rho_{32}+i\frac{\Omega'}{2}\sigma^--i\frac{\Omega}{2}\sigma'^+\tag{4.5.3}$$

式中

$$\epsilon=\frac{1}{3}(\gamma_1-\gamma_1')$$

$$\begin{aligned}
&\sigma^-=\rho_{12}\quad,\quad\sigma_z=\frac{1}{2}(\rho_{22}-\rho_{11})\quad,\quad\Omega=\frac{2\mu_{12}E}{\hbar}\quad,\quad\Delta=\omega-\omega_{12}\\
&\sigma'^-=\rho_{13}\quad,\quad\sigma_z'=\frac{1}{2}(\rho_{33}-\rho_{11})\quad,\quad\Omega'=\frac{2\mu_{13}E'}{\hbar}\quad,\quad\Delta'=\omega'-\omega_{31}
\end{aligned}\tag{4.5.4}$$

E 与 E' 分别为泵浦场与激光场的振幅，频率为 ω 与 ω'.ω_{21} 与 ω_{31} 分别为能级 2 与 1 、3 与 1 间的跃迁频率，电偶极矩阵元为 μ_{12} , μ_{13},γ_1 与 γ_2 为泵浦跃迁的纵与横弛豫时间. γ_{32} 为能级 3 与 2 间的横弛豫时间. 运动方程 (4.5.1) 和 (4.5.2) 可以看成是两个二能级系统，即能级 1 与 2 、 1 与 3, 通过 (4.5.3) 式耦合在一起. 纵、横弛豫系数间的关系为 $\gamma_2 = \gamma_1/2 + \gamma_2^c$, $\gamma_2' = \gamma_1'/2 + \gamma_2'^c$, $\gamma_{32} = (\gamma_1 + \gamma_1') + \gamma_{32}^c$. 这里 $\gamma_2^c, \gamma_2'^c, \gamma_{32}^c$ 表示原子间碰撞对阻尼的贡献. 现在令 (4.5.1)~ (4.5.3) 式左端为 0, 求稳态解，得

$$
\begin{aligned}
\rho_{32} &= \frac{(i\Omega'/2)\sigma^- - (i\Omega/2)\sigma'^+}{\gamma_{32} + i\Delta - i\Delta'} \\
\rho_{23} &= \frac{(-i\Omega'/2)\sigma^+ + (i\Omega/2)\sigma'^-}{\gamma_{32} - i\Delta + i\Delta'}
\end{aligned}
\tag{4.5.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma'^- &= \frac{(\gamma_2 - i\Delta)(\gamma_{32} - i\Delta + i\Delta')(i\Omega'\sigma_z') + [(\Omega'^2/4)\sigma_z' - (\Omega^2/4)\sigma_z](i\Omega')}{(\gamma_2 - i\Delta)(\gamma_{32} - i\Delta + i\Delta')(\gamma_2' + i\Delta') + (\gamma_2' + i\Delta')\Omega'^2/4 + (\gamma_2 - i\Delta)\Omega^2/4} \\
\sigma^+ &= \frac{(\gamma_2' + i\Delta')(\gamma_{32} - i\Delta + i\Delta')(-i\Omega\sigma_z) + [(\Omega'^2/4)\sigma_z' - (\Omega^2/4)\sigma_z](i\Omega)}{(\gamma_2 - i\Delta)(\gamma_{32} - i\Delta + i\Delta')(\gamma_2' + i\Delta') + (\gamma_2' + i\Delta')\Omega'^2/4 + (\gamma_2 - i\Delta)\Omega^2/4}
\end{aligned}
\tag{4.5.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_z - \sigma_{z0} &= \frac{\Omega}{\gamma_1}\mathrm{Im}\sigma^+ - \frac{\Omega'}{2\gamma_1'}\mathrm{Im}\sigma'^- \\
\sigma_z' - \sigma_{z0}' &= -\frac{\Omega'}{\gamma_1'}\mathrm{Im}\sigma'^- + \frac{\Omega}{2\gamma_1}\mathrm{Im}\sigma^+
\end{aligned}
\tag{4.5.7}
$$

V 系统的初值可取为 $\rho_{11}^0 = 1$, $\rho_{22}^0 = \rho_{33}^0 = 0$, 故有 $\sigma_{z0} = \sigma_{z0}' = -0.5$.(4.5.6) 式的虚部可写成如下形式：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Im}\sigma^+ &= a_{11}\sigma_z + a_{12}\sigma_z' \\
\mathrm{Im}\sigma'^- &= a_{21}\sigma_z + a_{22}\sigma_z'
\end{aligned}
\tag{4.5.8}
$$

将 (4.5.7) 式代入 (4.5.8) 式中，便得

$$
\begin{aligned}
&\left(1 - a_{11}\frac{\Omega}{\gamma_1} - a_{12}\frac{\Omega}{2\gamma_1}\right)\mathrm{Im}\sigma^+ + \left(a_{11}\frac{\Omega'}{2\gamma_1'} + a_{12}\frac{\Omega'}{\gamma_1'}\right)\mathrm{Im}\sigma'^- = a_{11}\sigma_{z0} + a_{12}\sigma_{z0}' \\
&\left(a_{21}\frac{\Omega}{\gamma_1} - a_{12}\frac{\Omega}{2\gamma_1}\right)\mathrm{Im}\sigma^+ + \left(1 + a_{21}\frac{\Omega'}{2\gamma_1'} + a_{22}\frac{\Omega'}{\gamma_1'}\right)\mathrm{Im}\sigma'^- = a_{21}\sigma_{z0} + a_{22}\sigma_{z0}'
\end{aligned}
\tag{4.5.9}
$$

用数值法求解 (4.5.9) 式，便得我们所需要的 $\mathrm{Im}\sigma^+$,$\mathrm{Im}\sigma'^-$.

现在先研究一下如图 4.9 所示的 V 系统实现无反转激光的可能性. 假定泵浦很强，而受激辐射很弱，即 $\Omega \gg \Omega'$, 则 (4.5.7) 式可近似为

$$
\begin{aligned}
\sigma_z - \sigma_{z0} &\simeq \frac{\Omega}{\gamma_1}\mathrm{Im}\ \sigma^+ \\
\sigma_z' - \sigma_{z0}' &\simeq \frac{\Omega}{2\gamma_1}\mathrm{Im}\ \sigma^+
\end{aligned}
\tag{4.5.10}
$$

而方程 (4.5.6) 可简化为

$$
\sigma^+ \simeq \frac{-i\Omega\sigma_z}{\gamma_2 - i\Delta}\gamma_2 \quad , \quad \mathrm{Im}\ \sigma^+ = \frac{-\Omega\sigma_z}{\gamma_2^2 + \Delta^2}\gamma_2 \tag{4.5.11}
$$

由 (4.5.10) 式和 (4.5.11) 式便得

$$
\sigma_z = \frac{\sigma_{z0}}{1 + 2x} \quad , \quad x = \frac{\Omega^2}{2\gamma_1\gamma_2}\eta \quad , \quad \eta = \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2^2 + \Delta^2} \tag{4.5.12}
$$

将 (4.5.12) 式代入 (4.5.10) 式，并注意到 $\sigma_{z0} = \sigma_{z0}' = -0.5$, 则有

$$\sigma_z' = \frac{1+x}{1+2x}\sigma_{z0} \tag{4.5.13}$$

将 (4.5.12) 和 (4.5.13) 式代入 (4.5.6) 式，并令 $k = \dfrac{\gamma_1}{2\gamma_2}$，可解得

$$\sigma'^{-} = \frac{i\Omega'\sigma_{z0}}{1+2x}\,\frac{(\gamma_{32} - i\Delta + i\Delta')(1+x) - \gamma_1 x/2 - ikx\Delta}{kx(\gamma_2^2 + \Delta^2) + (\gamma_{32} - i\Delta + i\Delta')(\gamma_2' + i\Delta')} \tag{4.5.14}$$

由方程 (4.5.14) 可计算出激光增益系数

$$g = \mathrm{Im}\sigma'^{-} \propto \sigma_{z0} R = -0.5R$$

$$\begin{aligned} R &= \mathrm{Re}\left\{[(\gamma_{32} - i\Delta + i\Delta')(1+x) - \gamma_1 x/2 - ikx\Delta)]\right. \\ &\quad \left.\times \left[kx(\gamma_2^2 + \Delta^2) + (\gamma_{32} + i\Delta - i\Delta')(\gamma' - i\Delta')\right]\right\} \\ &= [\gamma_2' + (\gamma_2' + \gamma_2/2)x]\,\Delta'^2 - \{2\gamma_2' + [\gamma_1/2 + 2\gamma_2' + k(\gamma_{32} + \gamma_2')]\,x\}\,\Delta\Delta' \\ &\quad + \{[\gamma_{32} + (\gamma_{32} - \gamma_1/2)x]\,kx + [1 + (1+kx)x]\,\gamma_2'\}\,\Delta^2 \\ &\quad + [\gamma_{32} + (\gamma_{32} - \gamma_1/2)x]\left[kx\gamma_2^2 + \gamma_{32}\gamma_2'\right] \end{aligned} \tag{4.5.15}$$

当

$$\Delta' = \frac{2\gamma_2' + (\gamma_1/2 + 2\gamma_2' + k(\gamma_{32} + \gamma_2'))x}{2\gamma_2' + (2\gamma_2' + \gamma_1)x}\Delta \tag{4.5.16}$$

(4.5.15) 式取极小值 R_m

$$\begin{aligned} R_m &= \left\{-\frac{[\gamma_1/2 - k(\gamma_{32} + \gamma_2')]^2}{4\,[\gamma_2' + (\gamma_2' + \gamma_1/2)x]} + (\gamma_{32} - \gamma_1/2)k\right\} x^2\Delta^2 \\ &\quad + [\gamma_{32} + (\gamma_{32} - \gamma_1/2)x]\,(kx\gamma_2^2 + \gamma_{32}\gamma_2') \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

按 (4.5.15) 式，无反转激光条件可表示为 $g > 0$ 或 $R < 0$. 仔细研究 (4.5.17) 式，只要第一项的系数为负且失谐 Δ 足够大，则 R_m 为负. 例如，对那些碰撞贡献起主导作用的分子，我们可设 γ_{32}，$\Delta \gg 2\gamma_1, \gamma_1'$; 而且 $k, x \simeq 1$, 这时 R_m 为负，只要失谐 Δ 够大. 例如，取 $\gamma_1 = 1$，$\gamma_2' = \gamma_2 = 1/2$，$k = \dfrac{\gamma_1}{2\gamma_2} = 1$，$\gamma_{32} = 6$，$x = \dfrac{\Omega^2}{2\gamma_1\gamma_2}\dfrac{\gamma_2^2}{\gamma_2^2 + \Delta^2} = \dfrac{\Omega^2}{1 + 4\Delta^2} = 1$，则由方程 (4.5.16) 和 (4.5.17) 可得

$$\Delta' = 3\Delta \quad , \quad R_m = -\frac{\Delta}{2} + 37.375 \tag{4.5.18}$$

现将 Δ 取为 30, 按方程 (4.5.9) 式数值求解增益 g 与 Δ' 的函数关系，结果由图 4.10 示出. 在极大处增益为正，且发生在 $\Delta' = 3\Delta = 90$ 处，与 (4.5.18) 式给出的相符.

现讨论 V 系统无反转激光的物理机制. 对于强泵浦情形 $\Omega \gg \Omega'$, 略去 (4.5.6) 式中的 ${\Omega'}^2/4$ 项，并采用记号 $\bar{\gamma} = \gamma_{32} - \gamma_2'$，$X = \gamma_2' + i\Delta'$, 则由 (4.5.6) 式导出

$$\begin{aligned} \sigma'^{-} &= \frac{(\bar{\gamma} + X)i\Omega'\sigma_z' - (\Omega^2/4)\sigma_z(i\Omega)}{(\gamma_2 - i\Delta)[X(\bar{\gamma} + X) + \Omega^2/4]} \\ &= \left(\frac{1}{X - X_1} + \frac{1}{X - X_2}\right)\frac{i\Omega'\sigma_z'}{2} \\ &\quad + \left(\frac{1}{X - X_1} - \frac{1}{X - X_2}\right)\left(\frac{-\Omega^2\Omega'\sigma_z}{4(\gamma_2 - i\Delta)\bar{\Omega}} + \frac{\bar{\gamma} + \Omega'}{2\bar{\Omega}}\sigma_z\right) \end{aligned} \tag{4.5.19}$$

式中

$$X_1, X_2 = -\frac{\bar{\gamma}}{2} \pm \frac{\bar{\Omega}}{2} \quad , \quad \bar{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 - \bar{\gamma}^2}$$

注意到 X_1, X_2 为前几节讨论的缀饰原子态，是基态在强泵浦作用下产生的分裂. (4.5.19) 式的前一项 $\frac{1}{X-X_1} + \frac{1}{X-X_2}$ 为同相位叠加，即通常线性色散理论结果；后一项 $\frac{1}{X-X_1} - \frac{1}{X-X_2}$ 为异相位叠加，或称之为缀饰态间的干涉，对应于通常说的"量子干涉"或"自陷"，也正是由于这一项，才导致原子的负吸收或"无反转激光增益". 与通常线性色散理论不一样，这是包含级联两次量子跃迁 (由基态到激发态，接着又由激发态到基态) 的高阶过程.

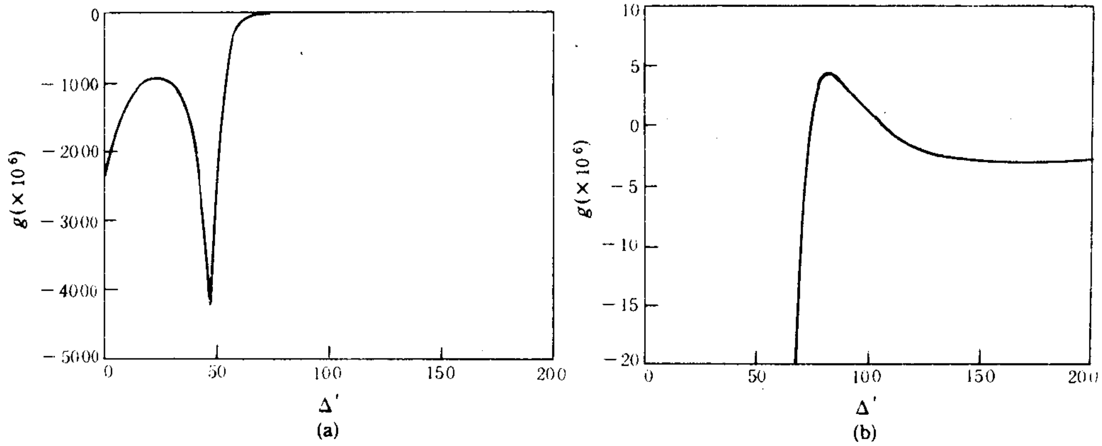


图 4.10 增益 g 随失谐 Δ' 的变化曲线

(取自 [8])

4.6 自离化共振态干涉

上节分析了三能级 V 系统由于泵浦失谐及碰撞弛豫 γ_{32} 的贡献甚大导致无反转激光增益. 这节我们将讨论自离化共振态的干涉也能实现无反转激光增益，这从 2.8 节对自离化共振态的讨论能看出. 重要的是 Fano-Beutler 线型参量 q(见图 2.9), 当 q 很大时，由基态 φ_g 向自离化共振态跃迁的几率 $\propto |<\Psi_E|T|\varphi_g>|^2$, 要比向连续态跃迁的几率 $<\psi_E|T|\varphi_g>|^2$ 大得多，而自离化态 Ψ_E 由分立态 ϕ_u 与连续态 ψ_E 迭加而成，故此时 $<\varphi_u|T|\varphi_g>|$ 的贡献是主要的，连续态的修正是次要的，线性为 Lorentz 型；当 q 逐渐变小时，线型与 Lorentz 型的差异较大；当 $q=0$ 时为反共振的吸收窗口，吸收截面达于最小，甚至为零，但辐射截面仍为原来的 Lorentz 型. 2.8 节是对一个分立谱来分析的，如果上能级有两个分立谱 [21] φ_2, φ_3, 则在连续谱中含有两个分立谱的吸收截面 σ_{ab} 与向连续谱跃迁的吸收截面 σ_c 之比为

$$\frac{\sigma_{ab}}{\sigma_c} = \frac{|<\Psi_E|T|\varphi_g>|^2}{|<\psi_E|T|\varphi_g>|^2} = \frac{(q_2/\eta_2 + q_3/\eta_3 + 1)^2}{(1/\eta_2 + 1/\eta_3)^2 + 1} \tag{4.6.1}$$

式中

$$
\begin{aligned}
\eta_i &= \frac{E - E_{\varphi_i} - F(E)}{\pi |V_{Ei}|^2} \\
q_i &= \frac{< \Phi_i|T|\varphi_g > |}{\pi V_{Ei}^* < \psi_E|T|\varphi_g >} \\
\Phi_i &= \varphi_i + P\int dE' \frac{\psi_{E'}V_{E'i}}{E - E'} \quad , \quad i = 2,3
\end{aligned} \tag{4.6.2}
$$

文献 [9] 还给出了辐射截面的计算公式，即原子初始处于激发态 φ_2 时的受激辐射截面 σ_e 与 σ_c 之比

$$
\begin{aligned}
\frac{\sigma_e}{\sigma_c} &= \frac{\Gamma}{\Gamma_2}\frac{g_2^2\eta_3^2 + [(q_2 - q_3) - \eta_3]^2}{\eta_2^2\eta_3^2 + (\eta_2 + \eta_3)^2} \\
\frac{\Gamma}{\Gamma_2} &= \frac{(2\Delta E)^2}{(\Gamma_2 + \Gamma_3)^2 + (2\Delta E)^2}
\end{aligned} \tag{4.6.3}
$$

式中， $\Delta E = E_3 - E_2$, 为激发态 φ_2, φ_3 间的能量差. 根据吸收截面公式 (4.6.1) 及辐射截面 $\frac{\sigma_e}{\sigma_c}$, 便可计算损耗与增益. 当计算吸收损耗，电子初始处于基态 φ_g; 当计算辐射增益，电子初始处于激发态 φ_2. 图 4.11 为数值计算结果. 参数取值为 $q_3^2 = 1\ 000$, $q_2^2 = 1\ 000, 10, 0$; $\Gamma_2 = 1$, $\Gamma_3 = 250$, $\Delta E = E_3 - E_2 = 2\ 000$, $\eta_2 = -(\omega_2 - \omega_1 - \omega)/(\Gamma_2/2)$, $\eta_3 = -(\omega_3 - \omega_1 - \omega)/(\Gamma_3/2)$. 图 4.11(a) 中 q_3, q_2 均很大，增益与损耗的差别很小，均趋近于 Lorentz 型；图 4.11(b) 增益仍为很大，增益仍为 Lorentz 型，但损耗曲线已有很大偏离，且在增益约为 10 处，吸收截面为 0. 图 4.11(c) 中 $q_2^2 = 0$, 我们得到对称的 Lorentz 线型，在增益极大处，损耗为 0. 这后两种情形，就是两个自离化态相互干涉而使得吸收截面减小的结果. 这就容易实现无反转有净增益 (增益大于吸收损耗) 激光.

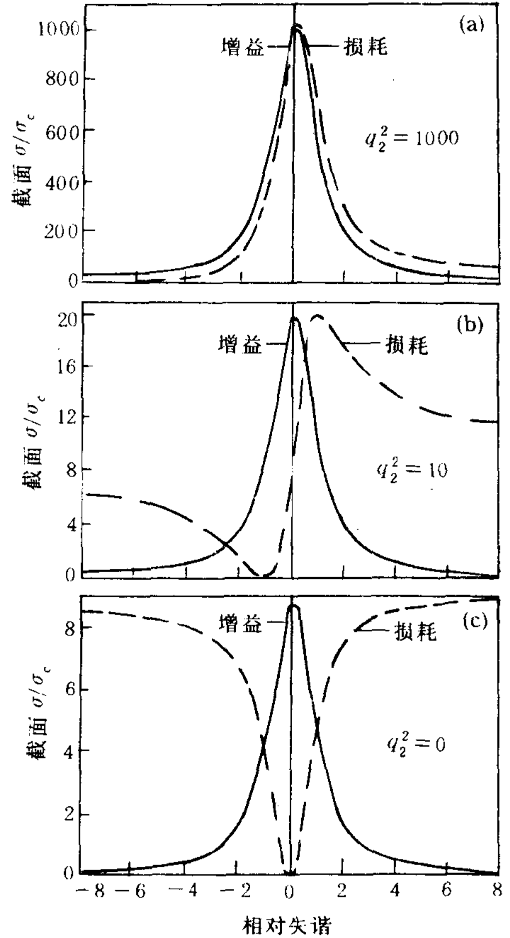


图 4.11 φ_2, φ_3 能级干涉的增益与损耗轮廓图 (参照 Harris [9])

4.7 简并态的量子拍激光

延伸上节自离化态迭加思想，通过原子三能级系统状态迭加可使原子的吸收截面减小或处于无辐射的激发态 [10]. 前一种为无反转激光增益，如图 4.12(a) 所示的 Λ 系统；后一种为处于激发态而无辐射，如图 4.12(b) 所示的 V 系统. 对于 Λ 系统，原子初始处于上能级 $|a>$, 而下能级态为近乎简并的 $|b>$ 与 $|c>$, 由 $|b>$ 到 $|c>$ 属偶极禁戒跃迁，但可通过强的微波场 $\Omega e^{-i\varphi}$ 使之耦合，微波频率 $\nu_\mu \simeq \frac{E_b - E_c}{\hbar}$. $|b>, |c>$ 处于相干态. 由 $|a>$ 向 $|b>, |c>$ 跃迁的光子变率方程为

$$\frac{dn}{dt} = \alpha\rho_{aa}^0(\bar{n}+1) - \alpha\rho_{cc}^0\bar{n}(1-\cos\varphi) \tag{4.7.1}$$

式中，α 为线性增益，ρ_{ii}^0 为能级的初始粒子数，φ 为微波场的相位. 当 $\varphi = 0$ 时，不论 ρ_{cc}^0 为何值，吸收均为 0. 只要 $\rho_{aa}^0 \neq 0$, 总是有增益的，这就是无反转激光增益.

对于图 4.12(b) V 系统情形，微波场 V_ν 使 $|b>$,$|c>$ 上能态耦合成为相干态，同样有变率方程

$$\frac{dn}{dt} = \alpha\rho_{aa}^0(\bar{n}+1)(1-\cos\varphi) - \alpha\rho_{cc}^0\bar{n} \tag{4.7.2}$$

当 $\varphi = 0$ 时，不论上能态粒子数 ρ_{aa}^0 为何值，自发或受激辐射恒为 0, 这就是有反转无激光情形. 实验上可通过序列脉冲激励原子，同时注入微波场耦合上能级 $|a>$ 与 $|b>$.

在上述两种情形，实现 $\varphi = 0$, 即状态 $|b>$ 与 $|c>$ 或 $|a>$ 与 $|b>$ 的量子拍很关键.

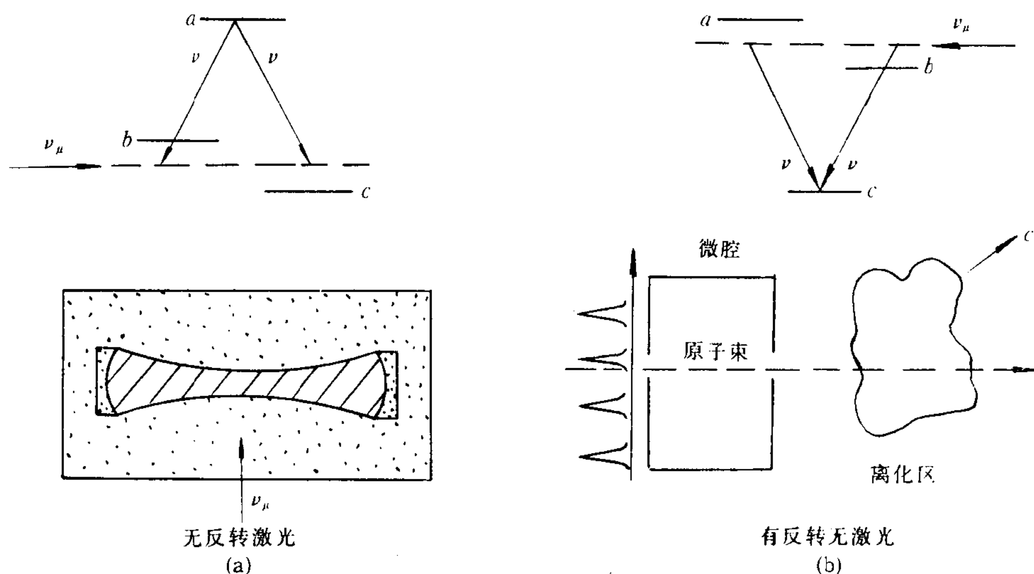


图 4.12 简并量子拍激光及对应的能级图

(a) 无反转激光；(b) 有反转无激光

(参照 Scully [10])

第五章　激光振荡理论

含原子极化的 Maxwell 方程的重要应用之一，是分析激光振荡过程及振荡过程所包含的噪音 [1,2]. 本章我们首先介绍激光振荡的半经典理论，接着讨论激光振荡的全量子理论及激光噪音等问题.

5.1　激光振荡的半经典理论

一个处于激发态的原子自发辐射出光子，光子作用于相邻的激发态原子，通过受激辐射，产生一个新的光子. 此过程继续下去，不断增添新的受激辐射光子，这就是自发辐射光子通过相邻原子的受激辐射产生的光放大. 若同时在放大介质的端面加上部分反射或全反射腔板，形成一光子在其中来回运动的腔，于是自发辐射便在一个有增益的腔内振荡，并通过端面透射输出. 在放大或振荡过程中，光子不断增益而光的波面不断向前推进，振幅不断增长. 又因原子的受激辐射与驱动原子产生受激辐射的场，亦即入射波场为同位相，受激辐射波与入射波的叠加为同位相的相干叠加. 电场 $\vec{E}$ 满足含极化 $\vec{P}$ 的 Maxwell 方程 (2.1.9) 式，采用近似式 $\nabla\times\nabla\times\vec{E}\simeq-\nabla^2\vec{E}$, 并加上损耗项 $\gamma_0\dfrac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ 后，这方程可写为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}+\gamma_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}-c^2\nabla^2\vec{E}=-4\pi\frac{\partial^2\vec{P}}{\partial t^2} \tag{5.1.1}$$

式中，γ_0 为腔的损耗及介质中的传播损耗，$\gamma_0=\omega/Q$, 介质的吸收、散射损耗以及腔的输出、衍射损耗均包括在 γ_0 之内了. 宏观极化矢量 $\vec{P}$ 在方程 (5.1.1) 式中起着电磁辐射源的作用. 在外场驱动下，原子内的电子作强迫振动，并表现为 $\vec{P}$ 随时间的振动. 反过来 $\vec{P}$ 又作为波动方程 (5.1.1) 的源出现，这也体现了原子的受激辐射 (由电偶极强迫振动产生的辐射) 相干地叠加在入射的辐射场 $\vec{E}$ 上. 在外场 $\vec{E}$ 的驱动下，原子宏观极化 $\vec{P}$ 的强迫振动容易从二能级原子密度矩阵方程得出. 下面为了讨论的方便，并不失去一般性，将矢量 $\vec{E},\vec{P}$ 简化为标量 E,P. 设 a 为激发态，b 为基态，则由密度矩阵方程 (2.5.21) 和 (2.5.27), 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\rho_{ab}&=-\left(i\omega_{ab}+\frac{1}{T_2}\right)\rho_{ab}-i\frac{\mu_{ab}}{\hbar}E(r,t)(\rho_{aa}-\rho_{bb})\\\frac{\partial}{\partial t}\rho_{ba}&=\left(i\omega_{ab}-\frac{1}{T_2}\right)\rho_{ba}+i\frac{\mu_{ba}}{\hbar}E(r,t)(\rho_{aa}-\rho_{bb})\end{aligned} \tag{5.1.2}$$

令

$$P=n_0\mu_{ab}(\rho_{ab}+\rho_{ba})\qquad,\qquad\Delta=(\rho_{aa}-\rho_{bb})n_0 \tag{5.1.3}$$

式中，n_0 为单位体积内的原子数；P,Δ 为宏观极化与反转粒子数密度. 由 (5.1.2) 和 (5.1.3) 式，便得

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2}{T_2}\frac{\partial}{\partial t}+\omega_{ab}^2+\frac{1}{T_2^2}\right)P=-2\Delta E\frac{\mu_{ab}^2\omega_{ab}}{\hbar} \tag{5.1.4}$$

这就是宏观极化 P 满足的振动方程. 它是通过电场 E 来驱动的. 由这方程及 (5.1.2) 式

看出，P 波动不是单色的，而是有 $\Delta\omega=\dfrac{1}{T_2}$ 的谱宽. 由极化 P 产生的电磁辐射也不是单色的. 在不计及腔的作用和媒质增益、损耗等的影响下，$\Delta\omega=\dfrac{1}{T_2}$ 就是原子的自然线宽，T_2 为原子自发辐射的相干时间，是横弛豫时间.

除了电场 E、极化 P 所满足的方程 (5.1.1), (5.1.4) 外，还要求出反转粒子密度 Δ 的变率方程. 同样由密度矩阵方程 (2.5.21) 和 (2.5.27), 得

$$\frac{d\Delta}{dt}=-i\frac{2E\mu_{ab}}{\hbar}n_0(\rho_{ab}-\rho_{ba})-\frac{\Delta-\Delta_0}{T_1} \tag{5.1.5}$$

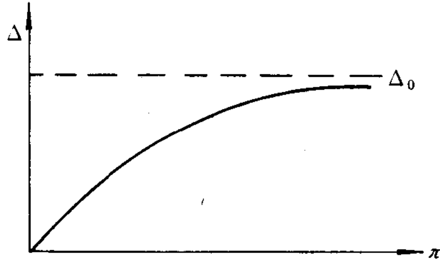


图 5.1　反转粒子数趋于饱和值 Δ_0 示意图

式中，Δ_0 表示通过光泵抽运能达到的反转粒子数密度水平，T_1 表示反转粒子寿命，即纵弛豫时间. (5.1.5) 式的第一项是由受激辐射而引起的反转粒子数的变化. 当不考虑这项的影响，对于给定光泵水平，反转粒子数随时间的变化趋于饱和值 Δ_0(见图 5.1).

(5.1.1)~(5.1.5) 式就是我们研究激光振荡与放大的基本方程. 这些方程的解一般是很复杂的，现采取 Lamb 的解法[3]. 首先将 $E(\vec{r},t),P(\vec{r},t)$ 用谐振腔的本征模式 $u_n(\vec{r})e^{-i\omega_n t}$ 展开，这在形式上与 (2.1.14) 式和 (2.1.15) 式基本一致. 稍有不同的是，(2.1.15) 式只是极化 $P(\vec{r},t)$ 中的非线性部分 P^{NL}, 而线性部分已分离出来了. 除此而外的区别，从下面表达式可看出来：

$$E(\vec{r},t)=\sum E_n e^{-i(\omega_n t+\varphi_n(t))}u_n(\vec{r})+c.c \tag{5.1.6}$$

$$P(\vec{r},t)=\sum P_n e^{-i(\omega_n t+\varphi_n(t))}u_n(\vec{r})+c.c \tag{5.1.7}$$

$$-c^2\nabla^2u_n(\vec{r})=\Omega_n^2u_n(\vec{r}) \tag{5.1.8}$$

式中，Ω_n 为谐振腔本振频率；ω_n 为第 n 个模式的振荡频率；$E_n(t),\varphi(t)$ 分别为慢变振幅与位相 [(2.1.14) 式中的 $\vec{A}_n(\vec{r},t),P_n(\vec{r},t)$ 尚与 $\vec{r}$ 有关]. 又注意到 $-\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}P(\vec{r},t)\simeq\omega_{ab}^2P(\vec{r},t)$, 将 (5.1.6), (5.1.7) 式代入 (5.1.1) 式，便得

$$\ddot{E}_n+2\dot{E}_n(-i\omega_n-i\dot{\varphi}_n)+[\Omega_n^2-(\omega_n+\dot{\varphi}_n)^2-\ddot{\varphi}_n]E_n=4\pi\omega_{ab}^2P_n \tag{5.1.9}$$

在上式中略去 $\ddot{E}$, $\dot{E}_n\dot{\varphi}_n$, $\dot{\varphi}_n^2$, $\ddot{\varphi}_n$ 诸项，并设 $P_n=C_n+iS_n$, 便得

$$\begin{aligned}&(\omega_n+\dot{\varphi}_n-\Omega_n)E_n=-2\pi\omega C_n\\&\dot{E}_n+\frac{1}{2}\frac{\omega}{Q_n}E_n=-2\pi\omega S_n\end{aligned} \tag{5.1.10}$$

式中，$\omega=\omega_{ab}$, $\dfrac{\omega}{2Q_n}$ 为唯象引进的腔的损耗. 下面就几种简单情形解 (5.1.10) 式.

5.1.1　没有激活离子 (或原子) 情形

这时宏观极化 $P=0$, $C_n=P_n=0$, 根据 (5.1.10) 式第一方程，并令 $\dot{\varphi}_n=0$, 便得激光振荡频率 ω_n 等于谐振腔本征频率 Ω_n. 由第二方程得 $E_n=E_n'e^{-\frac{\omega}{2Q_n}t}$, 这表明振幅是按指数衰减的.

5.1.2 线性极化 $P \propto E$

令 $C_n = \chi' E_n$, $S_n = \chi'' E_n$, 代入 (5.1.10) 式，得

$$\omega_n + \dot{\varphi}_n - \Omega_n = -2\pi\omega\chi_n' \tag{5.1.11}$$

$$\dot{E}_n + \frac{\omega}{2Q_n} E_n = -2\pi\omega\chi_n'' E_n \tag{5.1.12}$$

令 $\dot{\varphi}_n = 0$, 得

$$\omega_n = \Omega_n - 2\pi\omega\chi_n' \tag{5.1.13}$$

$$E_n = E_n^0 e^{-(\omega/(2Q_n) + 2\pi\omega\chi'')t} \tag{5.1.14}$$

(5.1.13) 式为模式振荡频率 ω_n 相对于腔本征频率 Ω_n 的牵引，(5.1.14) 式则表明当介质增益大于损耗时 $-2\pi\omega\chi'' > \dfrac{\omega}{2Q_n}$, E_n 按指数增加，否则减小.

5.1.3 一级近似

将 $E(\vec{r}, t)$ 的展开式 (5.1.6) 代入 (5.1.2) 式并积分，得极化 P 的一级近似

$$P^{(1)} = n_0 \mu_{ab} (\rho_{ab}^{(1)} + \rho_{ba}^{(1)}) \quad , \quad \Delta = n_0(\rho_{aa} - \rho_{bb}) \tag{5.1.15}$$

$$\rho_{ab}^{(1)} = -\frac{i\mu_{ab}}{\hbar} \sum \frac{E_n(t) u_n(\vec{r})}{1/T_2 + i(\omega - \omega_n)} e^{-i[\omega_n t + \varphi_n(t)]} \Delta \tag{5.1.16}$$

在做这个积分时，已假定了 $E_n(t)$, $\varphi_n(t)$ 及 Δ 的慢变函数性质，可从对 t 的积分号中提出. 还采用了旋波近似，略去非共振项，即

$$\frac{i\mu_{ab}}{\hbar} \sum_n \frac{E_n(t) u_n(\vec{r})}{1/T_2 + i(\omega + \omega_n)} e^{-i[\omega_n t + \varphi_n(t)]} \Delta$$

才得到 (5.1.16) 式. 式中 $\omega = \omega_{ab}$.

在一级近似 (5.1.16) 式的基础上，还可以计算反转粒子数密度 $\Delta(\vec{r}, t)$ 随辐射场变化的关系. 将 $E(\vec{r}, t), \rho_{ab}^{(1)}$ 的展开式 (5.1.6) 和 (5.1.16) 式代入 (5.1.5) 式，便得

$$\frac{\partial \Delta}{\partial t} = -2R\Delta - \frac{\Delta - \Delta_0}{T_1} \tag{5.1.17}$$

$$R = \frac{\mu_{ab}^2}{\hbar^2} \sum_\mu \sum_\sigma \frac{E_\mu E_\sigma u_\mu(\vec{r}) u_\sigma(\vec{r})}{1/T_2 + i(\omega - \omega_\mu)} e^{i(\omega_\sigma - \omega_\mu)t} + c.c. \tag{5.1.18}$$

这二式为反转粒子数密度变率方程. 稳态时 $\dfrac{\partial \Delta}{\partial t} = 0$, 我们有 Δ 的稳态解

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{1 + 2T_1 R} \tag{5.1.19}$$

这表明稳态时反转粒子数密度 Δ 由于 R 的增大而下降，亦即受激辐射消耗了反转粒子数，使得 Δ 被吃空.

现进一步讨论一级近似下的宏观极化 P. 由 (5.1.15) 和 (5.1.16) 式，得

$$P(\vec{r}, t) = \frac{-i\mu_{ab}^2}{\hbar} \sum_n \frac{E_n(t) u_n(\vec{r}) \Delta(\vec{r})}{1/T_2 + i(\omega - \omega_n)} e^{-i(\omega_n t + \varphi_n(t))} + c.c. \tag{5.1.20}$$

由此得 (5.1.10) 式中的 P_n, S_n 及 C_n 为

$$\begin{aligned} P_n &= \int P(\vec{r},t)u_n(\vec{r},t)d\vec{r} \\ N_n &= \int \Delta(\vec{r})u_n^2(\vec{r})d\vec{r} \end{aligned} \tag{5.1.21}$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{-\mu_{ab}^2 N_n}{\hbar} E_n \frac{\omega - \omega_n}{(1/T_2)^2 + (\omega - \omega_n)^2} \\ S_n &= \frac{-\mu_{ab}^2 N_n}{\hbar} E_n \frac{1/T_2}{(1/T_2)^2 + (\omega - \omega_n)^2} \end{aligned} \tag{5.1.22}$$

代入 (5.1.11), (5.1.12) 式，便得

$$\omega_n + \dot{\varphi}_n = \Omega_n + \frac{2\pi N_n \mu_{ab}^2 \omega}{\hbar} \frac{\omega - \omega_n}{(1/T_2)^2 + (\omega - \omega_n)^2} \tag{5.1.23}$$

$$\frac{\dot{E}_n}{E_n} = \frac{2\pi N_n \mu_{ab}^2 \omega}{\hbar} \frac{1/T_2}{(1/T_2)^2 + (\omega - \omega_n)^2} - \frac{\omega}{2Q_n} \tag{5.1.24}$$

(5.1.23) 式为激活介质的色散方程，其第二项就是激活离子或原子产生的色散或频率牵引．(5.1.24) 式右端第一项为介质的增益，第二项为腔的损耗．增益与反转粒子数分布 N_n 成正比，当增益等于损耗时，便给出使得激光开始振荡的反转数密度阈值 $\bar{N}_n$ ：

$$\frac{\dot{E}_n}{E_n} = \frac{\omega}{2Q_n} \left[\frac{N_n}{\bar{N}_n} - 1 \right] \tag{5.1.25}$$

$$\bar{N}_n = \frac{\hbar}{4\pi\mu_{ab}^2} \frac{(1/T_2)^2 + (\omega - \omega_n)^2}{Q_n/T_2} \tag{5.1.26}$$

当激光振荡频率 ω_n 与原子跃迁频率 ω 共振时，便有

$$\omega - \omega_n = 0 \quad , \quad \bar{N}_n = \frac{\hbar}{4\pi\mu_{ab}^2} \frac{1}{T_2 Q_n} \tag{5.1.27}$$

5.1.4 气体激光的烧孔效应与 Lamb 凹陷

在讨论 (5.1.19) 式的物理意义时，我们已经注意到受激辐射消耗反转粒子数使得 Δ 被吃空．如将 (5.1.19) 式的 Δ 代入 $P(\vec{r},t)$ 的表式 (5.1.20), 将会使得 $P(\vec{r},t)$ 非线性地依赖于 E, 即出现高阶极化．本节将结合气体激光的特点，讨论高阶极化对激光振荡的影响．与固体的激活介质不一样，对气体原子或分子，还需要考虑以速度 v 迎着观察者或背离观察者运动带来的 Doppler 频移．设 ω 为原子的跃迁频率，观察到的频率为 $\omega' = \omega \pm kv$, 考虑到 Doppler 频移后，(5.1.16) 式为

$$\rho_{ab}^{(1)}(v) = \frac{i\mu_{ab}}{\hbar} \sum_n \left\{ \frac{E_n u_n \Delta}{1/T_2 + i(\omega - kv - \omega_n)} + \frac{E_n u_n \Delta}{1/T_2 + i(\omega + kv - \omega_n)} \right\} e^{-i(\omega_n t + \varphi_n)} \tag{5.1.28}$$

对单模振荡情形，去掉上式对 n 的求和，且 (5.1.17) 式亦相应地写为

$$\begin{aligned} R &= \frac{\mu_{ab}^2}{\hbar^2} \left\{ \frac{1}{1/T_2 + i(\omega - \omega_n - kv)} + \frac{1}{1/T_2 + i(\omega - \omega_n + kv)} + c.c. \right\} E_n^2 u_n^2 \\ &= 2T_2 \left(\frac{\mu_{ab} E_n u_n}{\hbar} \right)^2 \{ L(\omega - \omega_n - kv) + L(\omega - \omega_n + kv) \} \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

$$L(\omega-\omega\pm kv)=\frac{(1/T_2)^2}{\frac{1}{T_2}^2+(\omega-\omega_n\pm kv)^2}$$

当驻波模式空间分布 $|u_n|^2$ 用平均值 1/2 来代替时， R 为

$$R=T_2\left(\frac{\mu_{ab}E_n}{\hbar}\right)^2[L(\omega-\omega_n-kv)+L(\omega-\omega_n+kv)] \tag{5.1.30}$$

类似于 (5.1.19) 式，可得速度在 v 至 $v+dv$ 范围内反转粒子数密度的稳态解为

$$\Delta(\vec{r},v)dv=\frac{\bar{\Delta}}{1+2T_1R}w(v)dv\simeq\bar{\Delta}(1-2T_1R)w(v)dv \tag{5.1.31}$$

式中， $w(v)$ 为原子的速度分布函数. 因子 $1-2T_1R$ 体现了反转粒子被吃空，且在 $w(v)$ 分布曲线 $v=\pm(\omega-\omega_n)/k$ 处留下烧孔 (见图 5.2). 将 (5.1.31) 式代入 (5.1.28) 式，并对 v 求积分，便得宏观极化 P_n

$$P_n(t)=\int P(\vec{r},t)u_n(\vec{r})d\vec{r}=(P_n^{(1)}+P_n^{(3)})e^{-i\omega_n t} \tag{5.1.32}$$

$$\begin{aligned}P_n^{(1)}&=\frac{-i\mu_{ab}^2}{\hbar}E_n\bar{\Delta}\int\left\{\frac{1}{1/T_2+i(\omega-\omega_n-kv)}+\frac{1}{1/T_2+i(\omega-\omega_n+kv)}+c.c.\right\}w(v)dv\\P_n^{(3)}&=\frac{-i\mu_{ab}^2}{\hbar}E_n\bar{\Delta}\int\left\{\frac{1}{1/T_2+i(\omega-\omega_n-kv)}+\frac{1}{1/T_2+i(\omega-\omega_n+kv)}+c.c.\right\}\\&\quad\times(-2T_1R)w(v)dv\end{aligned}$$

取 $w(v)=\dfrac{\exp[-v^2/u^2]}{\sqrt{\pi}u}$, 则一阶极化 $P_n^{(1)}$ 的计算可通过等离子体的色散函数 $Z(\omega)$ 表示出来. $Z(\omega)$ 的定义为

$$Z(\omega)=\frac{ik}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dv'\frac{e^{-v'^2/u^2}}{\omega+ikv'}=\frac{ik}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dv'\frac{e^{-v'^2/u^2}}{\omega-ikv'} \tag{5.1.33}$$

于是

$$P^{(1)}=\frac{-\bar{\Delta}\mu_{ab}^2}{ku\hbar}2E_nZ\left(\frac{1}{T_2}+i(\omega-\omega_n)\right) \tag{5.1.34}$$

当 $ku\gg\Delta\omega\gg\dfrac{1}{T_2}$ 时

$$Z\left(\frac{1}{T_2}+i\Delta\omega\right)\simeq Z(i\Delta\omega)\quad=\quad e^{-(\frac{\Delta\omega}{ku})^2}\left[i\sqrt{\pi}-2\int_0^{\frac{\Delta\omega}{ku}}dxe^{x^2}\right]\simeq i\sqrt{\pi}e^{-(\frac{\Delta\omega}{ku})^2}$$

故有

$$P^{(1)}\simeq\frac{-i\bar{\Delta}\mu_{ab}^2}{ku\hbar}2E_n\sqrt{\pi}e^{-\left(\frac{\omega-\omega_n}{ku}\right)^2} \tag{5.1.35}$$

现讨论三阶极化 $P^{(3)}$ 的计算. 由 (5.1.30) 式得

$$\begin{aligned}P_n^{(3)}&=\frac{-\mu_{ab}^2}{\hbar}E_n\bar{\Delta}(-T_2T_1)\left(\frac{\mu_{ab}E_n}{\hbar}\right)^2\frac{1}{ku}\int_{-\infty}^{\infty}ikudv'e^{-(v'/u)^2}\\&\quad\times\frac{1}{1/T_2+i(\omega-\omega_n-kv')}\{L(\omega-\omega_n-kv')+L(\omega-\omega_n+kv')\}\end{aligned} \tag{5.1.36}$$

在 $ku \gg \Delta\omega > \dfrac{1}{T_2}$ 的假定下，最后可得

$$P^{(3)} = \frac{T_1 T_2 \sqrt{\pi}\bar{\Delta}\mu_{ab}^4}{\hbar^3 ku} E_n^3 \exp\left[-\left(\frac{\omega-\omega_n}{ku}\right)^2\right] \{T_2(\omega-\omega_n)L(\omega-\omega_n) + i[1+L(\omega-\omega_n)]\} \tag{5.1.37}$$

参照 (5.1.12) 式，可直接写出含有一阶及三阶极化的 Lamb 方程

$$(\omega_n \dot{\varphi}_n - \Omega_n) = -2\pi\omega(C_n^{(1)} + C_n^{(3)}) \tag{5.1.38}$$

$$\dot{E}_n + \frac{\omega}{2Q_n} E_n = -2\pi\omega(S_n^{(1)} + S^{(3)}) \tag{5.1.39}$$

按 (5.1.35), (5.1.37) 式，并参照 (5.1.19) 式可计算一阶、三阶极化对增益的贡献 $S^{(1)}$, $S^{(3)}$

$$\begin{aligned} S^{(1)} &= \frac{-4\pi^{3/2}\mu_{ab}^2\bar{\Delta}}{\hbar ku} E_n e^{-\left(\frac{\omega-\omega_n}{ku}\right)^2} \\ S^{(3)} &= 2T_1T_2\left(\frac{\pi^{3/2}\bar{\Delta}\mu_{ab}^4}{\hbar^3 ku}\right) E_n^3 e^{-\left(\frac{\omega-\omega_n}{ku}\right)^2}[1+L(\omega-\omega_n)] \end{aligned} \tag{5.1.40}$$

将 (5.1.40) 式代入 (5.1.39) 式，得

$$\begin{aligned} \frac{\dot{E}_n}{E_n} &= \frac{\omega}{2Q_n}\left[\frac{\bar{\Delta}}{\Delta_T} - e^{\left(\frac{\omega-\omega_n}{ku}\right)^2} - \frac{\bar{\Delta}}{\Delta_T} I_n[1+L(\omega-\omega_n)]\right] e^{-\left(\frac{\omega-\omega_n}{ku}\right)^2} \\ \Delta_T &= \frac{\hbar ku}{8\pi^{3/2}\mu_{ab}^2 Q_n} \\ I_n &= \frac{T_1T_2\mu_{ab}^2E_n^2}{2\hbar^2} \end{aligned} \tag{5.1.41}$$

式中，Δ_T 为阈值反转粒子数密度，I_n 为无量纲光强. 由 (5.1.41) 式得稳态 ($\dot{E}_n = 0$) 光强输出

$$I_n = \frac{1 - \frac{\bar{\Delta}_T}{\bar{\Delta}} \exp\left[\left(\frac{\omega-\omega_n}{ku}\right)^2\right]}{1+L(\omega-\omega_n)} \tag{5.1.42}$$

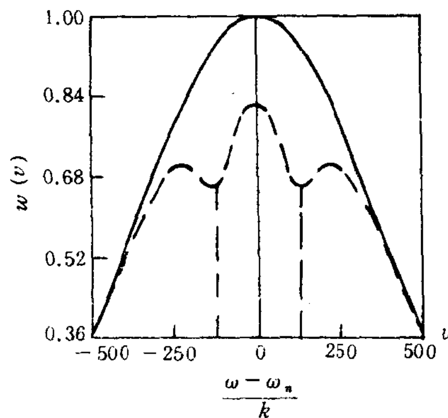


图 5.2 烧孔曲线

(参照 Sargent [1])

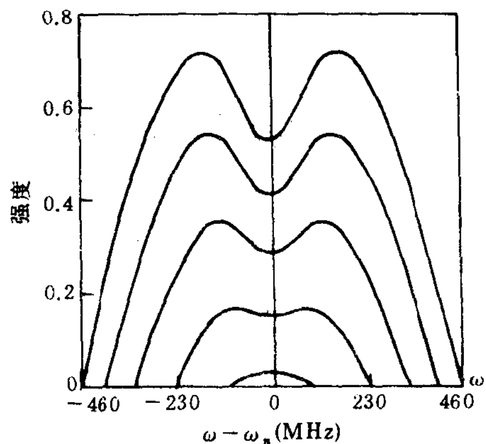


图 5.3 Lamb 凹陷 (参照 [1])

容易看出，I_n 随着激光输出频率 ω_n 而异，当 ω_n 调谐到原子跃迁频率，即 $\omega_n=\omega$ 时，输出 I_n 有极小值，这就是 Lamb 凹陷. 这从烧孔曲线 (见图 5.3) 来看也是很明显的. 当 $\omega=\omega_n$ 时，对激光有贡献的主要是 $v\simeq 0$ 的原子. $v\simeq 0$ 的烧孔可看成是 $v=\pm\dfrac{\omega-\omega_n}{k}\neq 0$ 的两个烧孔移近叠加在一起，形成一个深度更深的烧孔，稳态反转粒子数密度很低，输出也就相应下降了.

还应着重指出的是，Lamb 凹陷之所以能出现，主要是用了 Doppler 加宽远大于原子的自然线宽，即 $ku\gg 1/T_2$, 它是 (5.1.42) 式成立的条件. 若 ku 与 $1/T_2$ 为同量级，则不会观察到凹陷效应.

5.1.5 多模振荡

有关单模激光振荡的 Lamb 方程、反转粒子数吃空及 Lamb 凹陷等已如上述. 若将上面方法推广到多模情形，便可研究存在于激光器中的多模竞争了. 首先 R 的表示式 (5.1.18) 需要对 N 个竞争模式求和，参照 (5.1.32) 至 (5.1.40) 式的推导，最后将看到，对 $S^{(3)}$ 作出贡献的，除了 E_n^3 以外，还有交叉项 $E_nE_u^2$. 在 (5.1.10) 式中的 S_n 用 $S_n^{(1)}+S_n^{(3)}$ 代，便得出振幅 E_n 满足的方程

$$\dot{E}_n=\alpha_nE_n-\beta_nE_n^3-\sum_{\mu\neq n}\theta_\mu E_nE_\mu^2 \tag{5.1.43}$$

对于双模竞争，则有

$$\begin{aligned}\dot{E}_1&=\alpha_1E_1-\beta_1E_1^3-\theta E_1E_2^2\\ \dot{E}_2&=\alpha_2E_2-\beta_2E_2^3-\theta E_2E_1^2\end{aligned} \tag{5.1.44}$$

令 $x=E_1^2$, $y=E_2^2$, 则方程 (5.1.44) 可写为

$$\begin{aligned}\dot{x}/2&=(\alpha_1-\beta_1x-\theta y)x\\ \dot{y}/2&=(\alpha_2-\beta_2y-\theta x)y\end{aligned} \tag{5.1.45}$$

这个方程有如下四个奇点：

$$\begin{aligned}&(1)\quad y=0,\qquad x=\alpha_1/\beta_1,\qquad 若\alpha_1>0\\ &(2)\quad x=0,\qquad y=\alpha_2/\beta_2,\qquad 若\alpha_2>0\\ &(3)\begin{cases}\alpha_1=\beta_1x+\theta y, & L_1\\ \alpha_2=\theta x+\beta_2y, & L_2\end{cases}\\ &(4)\quad x=y=0\end{aligned} \tag{5.1.46}$$

第 (1) 和第 (2) 个奇点分别对应于模“1”或“2”的单模振荡稳态解 $\dot{x}=\dot{y}=0$, 第 (3) 个奇点为 L_1, L_2 的交点，如果这交点在第一象限，便对应于双模振荡解. 第 (4) 个奇点所对应的解是不稳解. 图 5.4 给出双模振荡即 L_1 与 L_2 交点在第一象限内随时间的演化图.

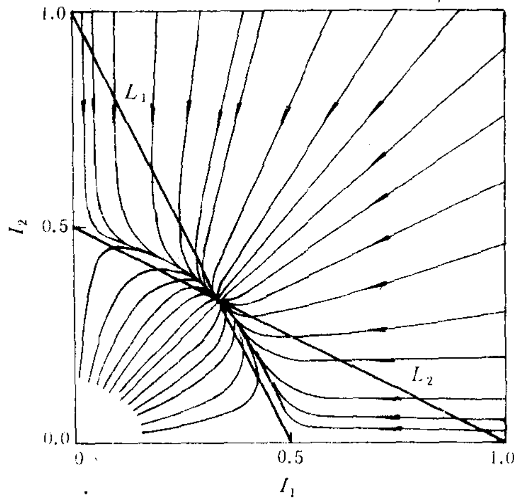


图 5.4 双模振荡演化图 (参照 [1])

5.2 激光振荡的全量子理论

全量子理论是相对于半经典理论而言的. 半经典理论将电磁场看作可用 Maxwell 方程描述的经典场, 而与之相互作用的原子或分子则用量子力学来描述. 半经典理论在描述激光的振荡、放大及模式竞争等方面是很富有成效的. 但有关辐射场的相干统计性质等就要采用将电磁场也进行量子化的全量子理论来处理. 下面先从电磁场的量化来讨论这一问题.

5.2.1 电磁场的量子化

由 Maxwell 方程得辐射场强 $\vec{E}$, $\vec{H}$ 可通过矢势 $\vec{A}$ 和标势 φ 表示为

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \nabla \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\vec{A} - \text{grad}\varphi\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

取库仑规范 $\text{div}\vec{A} = 0$, 标势 $\varphi = 0$. 因为我们主要讨论横场, 将矢势 $\vec{A}$ 用谐振腔的本征模 $u_\lambda(\vec{r})$ 展开, 于是有

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\pi c^2\hbar}{\omega_\lambda}}(b_\lambda^\dagger e^{i\omega_\lambda t} + b_\lambda e^{-i\omega_\lambda t})\vec{\varepsilon}_\lambda u_\lambda(\vec{r}) \tag{5.2.2}$$

式中, $\vec{\varepsilon}_\lambda$ 为光的偏振, $u_\lambda(\vec{r})$ 已规一化. 于是可得

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t) &= \frac{-1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} = -i\sum_\lambda \sqrt{2\pi\hbar\omega_\lambda}(b_\lambda^\dagger e^{i\omega_\lambda t} - b_\lambda e^{-i\omega_\lambda t})\vec{\varepsilon}_\lambda u_\lambda(\vec{r}) \\ \vec{H} &= \nabla \times \vec{A} = \sum_\lambda \sqrt{\frac{2\pi c^2\hbar}{\omega_\lambda}}\vec{\varepsilon}_\lambda \times \nabla u_\lambda(\vec{r})(b_\lambda^\dagger e^{i\omega_\lambda t} + b_\lambda e^{-i\omega_\lambda t})\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

对于平面波 $\nabla u_\lambda(\vec{r}) = \vec{k}_\lambda u_\lambda(\vec{r})$, 应用上式可求出场能展开式

$$H_L = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 + H^2)d\vec{r} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda b_\lambda^\dagger b_\lambda \tag{5.2.4}$$

注意在得出 (5.2.3) 式时，已对偏振 $\vec{\varepsilon}_\lambda$ 求和，并用了规一正交关系 $\int u_\lambda(\vec{r})u_\mu(\vec{r})d\vec{r}=\delta_{\lambda\mu}$. 到现在为止，场仍为经典的，$b_\lambda^\dagger$, b_λ 为可对易的 c 数. 这里 $\vec{E}(\vec{r},t)$ 展开式的得到是用了关系 $\vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}$. 但若对 $b_\lambda^\dagger$, b_λ 引进对易规则，即对场进行量子化，则 $\vec{E}$ 的展开也完全可以按 Heisenberg 运动方程得到. 首先按 (2.6.3) 式，对易规则为

$$\begin{aligned}&[b_\lambda,b_\rho^\dagger]=b_\lambda b_\rho^\dagger-b_\rho^\dagger b_\lambda=\delta_{\lambda\rho}\\&[b_\lambda,b_\rho]=[b_\lambda^\dagger,b_\rho^\dagger]=0\end{aligned}\tag{5.2.5}$$

算子 O 的 Heisenberg 运动方程为算子 O 对时间 t 的全微分，即

$$\frac{dO}{dt}=\frac{\partial O}{\partial t}+\frac{i}{\hbar}[H,O]\tag{5.2.6}$$

于是由 (5.2.4)~(5.2.6) 式得 (将 $b_\lambda^\dagger e^{i\omega_\lambda t}$, $b_\lambda e^{-i\omega_\lambda t}$ 分别写为 $b_\lambda^\dagger$, b_λ)

$$\vec{A}(\vec{r},t)=\sum_\lambda\sqrt{\frac{2\pi c^2\hbar}{\omega_\lambda}}(b_\lambda^\dagger+b_\lambda)\vec{\varepsilon}_\lambda u_\lambda(\vec{r})\tag{5.2.7}$$

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r},t)&=\frac{-1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}=-\frac{i}{c\hbar}[H_L,\vec{A}]\\&=-i\sum_\lambda\sqrt{2\pi\hbar\omega_\lambda}(b_\lambda^\dagger-b_\lambda)\vec{\varepsilon}_\lambda u_\lambda(\vec{r})\end{aligned}\tag{5.2.8}$$

现在 $b_\lambda^\dagger$, b_λ 已为算符. 能量本征矢的真空态可定义为

$$b_\lambda\Phi_0=0\tag{5.2.9}$$

其它状态可通过算子 $b_\lambda^\dagger$ 的多次作用表示为

$$\Phi_{n_1,n_2,\cdots,n_N}=\frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\cdots n_N!}}(b_1^\dagger)^{n_1}(b_2^\dagger)^{n_2}\cdots(b_N^\dagger)^{n_N}\Phi_0\tag{5.2.10}$$

这就是具有 n_1 个 $\hbar\omega_1$ 光子，n_2 个 $\hbar\omega_2$ 光子，$\cdots$, n_N 个 $\hbar\omega_N$ 光子的本征态，亦即光子数态，也称为 Fock 态，它是 $b_1^\dagger,\cdots,b_N^\dagger$ 作用在真空态 Φ_0 上得出来的，故称 $b_1^\dagger,\cdots,b_N^\dagger$ 为产生算符. 同样，湮灭算符 b 的作用在于减少光子. (5.2.9) 式表明 b_λ 作用在“没有光子”的真空态 Φ_0, 其值为 0. 一般来说，参见 (2.6.4) 式得出

$$\begin{aligned}b_\lambda\Phi_{\cdots,n_\lambda,\cdots}&=\sqrt{n_\lambda}\Phi_{\cdots,n_\lambda-1,\cdots}\\b_\lambda^\dagger\Phi_{\cdots,n_\lambda,\cdots}&=\sqrt{n_\lambda+1}\Phi_{\cdots,n_\lambda+1,\cdots}\\b_\lambda^\dagger b_\lambda\Phi_{\cdots,n_\lambda,\cdots}&=n_\lambda\Phi_{\cdots,n_\lambda,\cdots}\end{aligned}\tag{5.2.11}$$

5.2.2 辐射场与电子波场的相互作用

包括辐射场与原子体系在内的总的能量算符 H 可写为原子的 H_a 、辐射场的 H_L 及 H_I 之和，即

$$H=H_a+H_L+H_I\tag{5.2.12}$$

式中，H_I 为场与电偶极的相互作用能. 按经典电动力学 $H_I=-\frac{e\vec{A}}{mc}\cdot\vec{p}$, 量子化后，$\vec{A}$ 用 (5.2.7) 式来表示，$\vec{p}$ 用相应的矩阵元 $\int\varphi_j^*\vec{p}\varphi_l a_j^\dagger a_l d\vec{r}$ 来表示，便有

$$H_I = \frac{-e}{m} \sum_{\lambda,j,l\mu} \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_\lambda}} (b_\lambda^\dagger + b_\lambda) u_\lambda(\vec{r}) \int \varphi_{j\mu} \vec{p} \varphi_{l\mu} d\vec{r} a_{j\mu}^\dagger a_{l\mu} \tag{5.2.13}$$

(5.2.13) 式是辐射场与 N 个原子的相互作用，μ 是指第 μ 个原子，相互作用对 μ 求和.

对于二能级原子，按 (2.6.14) 和 (2.6.15) 式算符 $a_1^\dagger$, a_2 等，可用自旋算符 σ 表示为

$$\begin{aligned} \sigma^+ &= \sigma_x + i\sigma_y = a_2^\dagger a_1 \\ \sigma^- &= \sigma_x - i\sigma_y = a_1^\dagger a_2 \\ \sigma_z &= \frac{1}{2}(a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1) \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

并满足对易关系

$$\begin{aligned} &\sigma^{+2} = \sigma^{-2} = 0 \\ &\sigma^+\sigma^- + \sigma^-\sigma^+ = 1 \\ &[\sigma^\pm, \sigma_z] = \mp\sigma^\pm \\ &\sigma^+\sigma^- - \sigma^-\sigma^+ = 2\sigma_z \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

又定义

$$\begin{aligned} g_{\lambda,\mu} &= \frac{-e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_\lambda}} \int \varphi_{1\mu}\vec{p}\varphi_{2\mu} u_\lambda(\vec{r}) d\vec{r} \\ g_{\lambda,\mu}^* &= \frac{-e}{m}\sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_\lambda}} \int \varphi_{2\mu}\vec{p}\varphi_{1\mu} u_\lambda(\vec{r}) d\vec{r} \end{aligned} \tag{5.2.16}$$

并应用旋波近似，则 (5.2.13) 式可写为

$$H_I = \sum_{\lambda,\mu} (g_{\lambda,\mu} b_\lambda^\dagger \sigma_\mu^- + g_{\lambda,\mu}^* b_\lambda \sigma_\mu^+) \tag{5.2.17}$$

而原子与场的哈密顿量分别为

$$H_a = \sum_\mu \hbar\omega_0 \sigma_{z\mu}, H_L = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda b_\lambda^\dagger b_\lambda \tag{5.2.18}$$

总的哈密顿量 $H = H_a + H_L + H_I$, 代入 (5.2.6) 运动方程中，并应用 (5.2.5) 和 (5.2.15) 式，便得

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{z\mu} &= i\sum_\lambda (g_{\lambda,\mu} b_\lambda^\dagger \sigma_\mu^- - g_{\lambda,\mu}^* b_\lambda \sigma_\mu^+) \\ \dot{\sigma}_\mu^- &= -i\omega_0 \sigma_\mu^- + i2\sum_\lambda g_{\lambda,\mu}^* b_\lambda \sigma_{z\mu} \\ \dot{\sigma}_\mu^+ &= i\omega_0 \sigma_\mu^+ - i2\sum_\lambda g_{\lambda,\mu} b_\lambda^\dagger \sigma_{z\mu} \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

$$\begin{aligned} \dot{b}_\lambda &= -i\omega_\lambda b_\lambda - i\sum_\mu g_{\lambda,\mu} \sigma_\mu^- \\ \dot{b}_\lambda^\dagger &= i\omega_\lambda b_\lambda^\dagger + i\sum_\mu g_{\lambda,\mu}^* \sigma_\mu^+ \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

上面二式为包括原子、辐射场及其相互作用在内的全量子方程.

5.3 热库模型与激光输出的统计分布

5.3.1 热库模型

上节我们通过求解含极化的 Maxwell 方程，研究了激光振荡问题，所涉及的是辐射场与 N 个原子体系的相互作用. 实际上，在产生激光的体系中，情况要复杂些. 辐射场在工作物质中要被杂质原子散射、吸收，并在镜面部分输出. 而 N 个激活原子也要相互碰撞，或经受晶格振动，且激活原子的泵浦场也是不恒定的，有无规起伏. 所有这些均可归并为一个热库的相互作用 [2](见图 5.5). 热库可理解为一个自由度很大的体系，与热库相互作用的特点是它的无规与随机性. 这种随机性可通过 Langevin 方程中的无规力 $F_i(t)$ 来描写. 无规力 $F_i(t)$ 体现了热库对体系的作用，因为是无规的，故 $F(t)$ 与 $F(t')(t'\neq t)$ 几乎没有关联，亦即 $F_i(t)$ 的关联时间趋于 0, 即满足

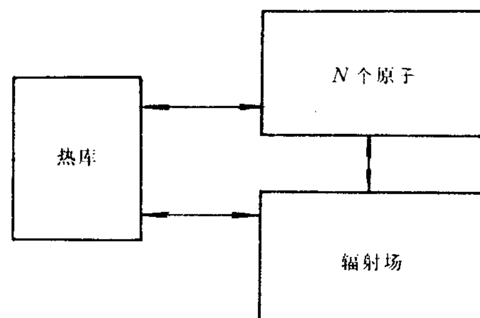


图 5.5 热库模型

$$< F_i(t)F_k(t') >= Q_{ik}\delta(t-t') \tag{5.3.1}$$

当 n 为奇数时

$$< F_1(t_1)\cdots F_n(t_n) >= 0 \tag{5.3.2}$$

当 n 为偶数时

$$< F_1(t_1)\cdots F_n(t_n) >= \sum_p < F_{\lambda_1}(t_{\lambda_1})F_{\lambda_2}(t_{\lambda_2}) > \cdots < F_{\lambda_{n-1}}(t_{\lambda_{n-1}})F_{\lambda_n}(t_{\lambda_n}) > \tag{5.3.3}$$

式中，$\sum\limits_p$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1},\lambda_n$ 求和. (5.3.1) 式称为 Markoff 条件，它表明无规力的相干时间非常之短. (5.3.2) 和 (5.3.3) 式称为 Gauss 条件，在通常激光情形，可以认为 Markoff 条件和 Gauss 条件均成立. 将无规力加到系统的运动方程中便得描述系统的多自由度的 Langevin 方程

$$\begin{gathered}\frac{dv_i}{dt}=\sum_k M_{ik}v_k+F_i(t)\quad ,\qquad i=1,\cdots,n\\ M_{ik}=M_{ik}(v_1,\cdots,v_n)\end{gathered} \tag{5.3.4}$$

根据过程的 “ Markoff ” 性质，除了 Langevin 方程描述外，还有描述体系的速度分布函数 $f(\vec{v},t)$ 满足的 Fokker–Planck 方程

$$\frac{\partial f(\vec{v},t)}{\partial t}=-\sum_i\frac{\partial}{\partial v_i}[B_i(v)f]+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2(Q_{i,j}f)}{\partial v_i\partial v_j} \tag{5.3.5}$$

式中

$$B_i(v) = \frac{< \Delta v_i >}{\tau} =< \sum_k M_{ik} v_k + F_i(t) >= \sum_k M_{ik} v_k \tag{5.3.6}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{< \Delta v_i(t) \Delta v_j(t') >}{\tau} &\simeq < [B_i(v) + F_i(t)][B_j(v) + F_j(t')] > \tau \\ &= B_i(v) B_j(v) \tau + Q_{ij} \delta(t - t') \tau \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

式中， $\tau = t' - t$. 当 $\tau \to 0$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{\tau \to 0} \frac{< \Delta v_i >}{\tau} &= B_i(v) \\ \lim_{\tau \to 0} \frac{< \Delta v_i(t) \Delta v_j(t') >}{\tau} &= Q_{ij} \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

关于 Fokker-PLanck 方程的详细推导，见第十章.

作为一个例子，我们举出复变量 v 的非线性 Van der Pol 方程

$$\frac{dv}{dt} - \beta(n - vv^*)v = \Gamma(t) \tag{5.3.9}$$

式中， $\Gamma(t)$ 为无规力. 取极坐标 $v = re^{i\varphi}$, 当 $\Gamma(t)$ 为 0 时， (5.3.9) 式给出

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} - \beta(n - r^2)r &= 0 \\ \frac{d\varphi}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{5.3.10}$$

参照 (5.3.4), (5.3.6) 式，并定义 M_{ik}, B_i 为

$$\begin{aligned} M_{rr} &= \beta(n - r^2) \quad , \quad M_{\varphi r} = M_{r\varphi} = M_{\varphi\varphi} = 0 \\ B_r &= \beta(n^2 - r^2)r \quad , \quad B_\varphi = 0 \end{aligned} \tag{5.3.11}$$

故 Fokker-Planck 方程 (5.3.5) 为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \beta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}[(n - r^2) r^2 f] &= \frac{Q}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \right) \\ Q = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T &< \Gamma(t_1) \Gamma^*(t_2) > dt_1 dt_2 \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

5.3.2 激光场与热库相互作用的 Langevin 方程

针对激光振荡问题，并参照图 5.5, 将包括激光场及热库相互作用在内的哈密顿量 H 写为

$$H = H_L + H_{LB} = \sum \hbar\omega_\lambda b_\lambda^\dagger b_\lambda + \sum_{\omega_\lambda, \omega} \left(g_\omega^\lambda \hbar b_\lambda^\dagger B_\omega e^{-i\omega t} + g_\omega^{\lambda *} \hbar b_\lambda B_\omega^\dagger e^{i\omega t} \right) \tag{5.3.13}$$

把热库看作是由自由度非常大的谐振子组成的. 式中 $B_\omega^\dagger$, B_ω 分别为热库的产生与湮灭算子； g_ω^λ, $g_\omega^{\lambda *}$ 为辐射场第 λ 个模式与热库 $\hbar\omega$ 振子的耦合系数，是唯象地引进的. 由 (5.3.13) 式及 Heisenberg 运动方程 (5.2.6) 式可得 $b_\lambda^\dagger$, $B_\omega^\dagger$ 的运动方程. 对于单模情形，可略去脚标 “ λ ”，于是有

$$\frac{db^\dagger}{dt} = i\omega_0 b^\dagger + \sum_\omega g_\omega^* B_\omega^\dagger e^{i\omega t}$$
$$\frac{dB_\omega^\dagger}{dt} = ib^\dagger g_\omega e^{-i\omega t} \tag{5.3.14}$$

注意到，$\frac{db^\dagger}{dt}$，$\frac{dB_\omega^\dagger}{dt}$ 具有不同的形式，这是因为 $b^\dagger$ 为 Heisenberg 绘景中的力学量，而 $B_\omega^\dagger$ 已经是相互作用绘景中的力学量了．由 (5.3.14) 式，得

$$B_\omega^\dagger = i\int_{t_0}^t b^\dagger(\tau) g_\omega e^{-i\omega\tau} d\tau + B_\omega^\dagger(t_0)$$
$$\frac{db^\dagger}{dt} = i\omega_0 b^\dagger - \int_{t_0}^t b^\dagger(\tau)\sum_\omega |g_\omega|^2 e^{i\omega(t-\tau)} d\tau + i\sum_\omega g_\omega^* B_\omega^\dagger(t_0) e^{i\omega t} \tag{5.3.15}$$

假定噪音起伏与 ω 无关 (称之为白噪音假定)，即设 g_ω^2 与 ω 无关，将求和化成积分，并令 $g_\omega^2 = \frac{\chi}{\pi} d\omega$，则得

$$\sum_\omega |g_\omega|^2 e^{i\omega(t-\tau)} = \frac{\chi}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = 2\chi\delta(t-\tau) \tag{5.3.16}$$

$$\frac{db^\dagger}{dt} = i\omega_0 b^\dagger - \chi b^\dagger + \underbrace{i\sum_\omega g_\omega^* B_\omega^\dagger e^{i\omega t}}_{F^\dagger(t)} \tag{5.3.17}$$

同样有

$$F(t) = -i\sum_\omega g_\omega B_\omega e^{-i\omega t}$$

$$\begin{aligned} < [F(t), F^\dagger(t')] > &= \sum_\omega |g_\omega|^2 e^{i\omega(t-t')} < [B_\omega, B_\omega^\dagger] > \\ &= \sum_\omega |g_\omega|^2 e^{i\omega(t-t')} = 2\chi\delta(t-t') \end{aligned} \tag{5.3.18}$$

于是量子化后的 Langevin 方程为

$$\frac{db^\dagger}{dt} = i\omega_0 b^\dagger - \chi b^\dagger + F^\dagger(t)$$
$$\frac{db}{dt} = -i\omega_0 b - \chi b + F(t) \tag{5.3.19}$$

式中，$F(t)$，$F^\dagger(t)$ 为算符，对易关系 (5.3.18) 也具有 Markoff 性质 (5.3.1) 式．

现由 (5.3.19) 式求场算符 $b^\dagger$，b 的积分

$$b^\dagger = b^\dagger(0)e^{(i\omega_0-\chi)t} + \int_0^t e^{(i\omega_0-\chi)(t-\tau)} F^\dagger(\tau) d\tau$$
$$b = b(0)e^{-(i\omega_0+\chi)t} + \int_0^t e^{-(i\omega_0+\chi)(t-\tau)} F(\tau) d\tau \tag{5.3.20}$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}<[b,b^\dagger]> &= -2\chi<[b,b^\dagger]>+\int_0^t<[F(t),F^\dagger(\tau)]>e^{-(i\omega+\chi)(t-\tau)}d\tau\\ &+\int_0^t<[F(\tau),F^\dagger(t)]>e^{(i\omega-\chi)(t-\tau)}d\tau\\ &= 2\chi(1-<[b,b^\dagger]>)\end{aligned}\tag{5.3.21}$$

由初始的 $<[b_0,b_0^\dagger]>=1$, 得

$$<[b,b^\dagger]>\equiv 1\tag{5.3.22}$$

这表明无规力满足 (5.3.18) 式时，b, $b^\dagger$ 的对易关系可以像 (5.3.22) 式那样在对无规力求统计平均意义下得到满足.

5.3.3 原子体系与热库相互作用的 Langevin 方程

参照激光场与热浴相互作用的 Langevin 方程 (5.3.19), 我们可在 Schrödinger 方程粒子数表象 (2.6.2) 和 (2.6.3) 式的基础上求得原子体系与热库相互作用的 Langevin 方程. 对于开放的系统，在 $a_k,a_k^\dagger$ 的运动方程中应加上阻尼及无规力 (Langevin 力), 它反映热库的影响，便得到粒子数表象中的 Langevin 方程组

$$\begin{aligned}\frac{da_k}{dt}&=-\frac{\gamma_k}{2}a_k-i/\hbar\sum_n<k|H'|n>a_ne^{i\omega_{kn}t}+\Gamma_k\\ \frac{da_k^\dagger}{dt}&=-\frac{\gamma_k}{2}a_k^\dagger+i/\hbar\sum_n<k|H'|n>a_n^+e^{-i\omega_{kn}t}+\Gamma_k^\dagger\end{aligned}\tag{5.3.23}$$

又将算子 $a_k,a_k^\dagger$ 的对易关系 (2.6.3) 用求统计平均的关系来替代，则有

$$\begin{aligned}&<[a_k,a_l]_\pm>=<a_ka_l\pm a_la_k>=0\\ &<[a_k^\dagger,a_l^\dagger]_\pm>=<a_k^\dagger a_l^\dagger\pm a_l^\dagger a_k^\dagger>=0\\ &<[a_k,a_l^\dagger]_\pm>=<a_ka_l^\dagger\pm a_l^\dagger a_k>=\delta_{kl}\end{aligned}\tag{5.3.24}$$

我们用“< >”表示对热库求统计平均，式中 ± 号分别对应于满足 Fermi 分布或 Bose 分布的粒子. 如果在 (5.3.23) 中只有阻尼力而不加无规力，则 $a_k,a_k^\dagger$ 所满足的对易关系 (5.3.24) 式中第三式将不能成立，只有引进无规力才能使上式成立. 在 Markoff 情形下，无规力满足关系

$$<[\Gamma_k(t),\Gamma_k^\dagger(t')]_\pm>=\gamma_k\delta(t-t')\tag{5.3.25}$$

现就服从 Fermi 分布的粒子满足反对易关系情形来证明 (5.3.25) 式. 由于

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}<a_ka_k^\dagger>=&<\dot{a}_ka_k^\dagger+a_k\dot{a}_k^\dagger>\\ =&<(-\frac{\gamma_k}{2}a_k-i/\hbar\sum_n<k|H'|n>a_ne^{i\omega_{kn}t}+\Gamma_k)a_k^\dagger>\\ &+<a_k(-\frac{\gamma_k}{2}a_k^\dagger+i/\hbar\sum_n<k|H'|n>a_n^\dagger e^{-i\omega_{kn}t}+\Gamma_k^\dagger)>\end{aligned}\tag{5.3.26}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}<a_k^\dagger a_k>=&<\dot{a}_k^\dagger a_k+a_k^\dagger\dot{a}_k>\\ =&<a_k^\dagger(-\frac{\gamma_k}{2}a_k-i/\hbar\sum_n<k|H'|n>a_ne^{i\omega_{kn}t}+\Gamma_k)>\\ &+<(-\frac{\gamma_k}{2}a_k^\dagger+i/\hbar\sum_n<k|H'|n>a_n^\dagger e^{-i\omega_{kn}t}+\Gamma_k^\dagger)a_k>\end{aligned}\tag{5.3.27}$$

注意到

$$< a_n a_k^\dagger + a_k^\dagger a_n >= \delta_{nk}$$

则得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} < [a_k, a_k^\dagger]_+ > &= -\gamma_k < [a_k, a_k^\dagger]_+ > + < \Gamma_k a_k^\dagger + a_k \Gamma_k^\dagger > \\ &\quad + < a_k^\dagger \Gamma_k + \Gamma_k^\dagger a_k >\end{aligned} \tag{5.3.28}$$

又注意到

$$\begin{aligned}< a_k \Gamma_k^\dagger > &= < \int_0^t dt' e^{-\frac{-\gamma_k}{2}(t-t')}(-i/\hbar \sum_n < k|H'|n > a_n e^{i\omega_{kn}t} + \Gamma_k(t'))\Gamma_k^\dagger(t) > \\ &= \int_0^t e^{-\frac{-\gamma_k}{2}(t-t')} < \Gamma_k(t')\Gamma_k^\dagger(t) > dt'\end{aligned} \tag{5.3.29}$$

在 (5.3.29) 式的推导中用了关系式

$$< a_n(t')\Gamma_k^\dagger(t) >= 0, \qquad t > t' \ , \ n \neq k \tag{5.3.30}$$

此式代表的是因果关系，即 a_n 与比它晚的 Langevin 力没有关联．同样可以导出

$$\begin{aligned}< \Gamma_k a_k^\dagger > &= \int_0^t e^{-\frac{\gamma_k}{2}(t-t')} < \Gamma_k(t)\Gamma_k^\dagger(t') > dt' \\ < a_k^\dagger \Gamma_k > &= \int_0^t e^{-\frac{\gamma_k}{2}(t-t')} < \Gamma_k^\dagger(t')\Gamma_k(t) > dt' \\ < \Gamma_k^\dagger a_k > &= \int_0^t e^{-\frac{\gamma_k}{2}(t-t')} < \Gamma_k^\dagger(t)\Gamma_k(t') > dt'\end{aligned} \tag{5.3.31}$$

由 (5.3.28)~(5.3.31) 式，得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &< [a_k, a_k^\dagger] >= -\gamma_k < [a_k, a_k^\dagger] > \\ &+ \int_0^t e^{-\gamma_k/2(t-t')} < [\Gamma_k(t'), \Gamma_k^\dagger(t')]_+ + [\Gamma_k(t), \Gamma_k^\dagger(t')]_+ > dt'\end{aligned} \tag{5.3.32}$$

当 (5.3.25) 式得到满足时，便有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} < [a_k(t), a_k^\dagger(t)]_+ >= -\gamma_k < [a_k(t), a_k^\dagger(t')]_+ > +\gamma_k \\ < [a_k(t), a_k^\dagger(t)]_+ >\equiv 1\end{aligned} \tag{5.3.33}$$

对服从 Bose 分布的对易关系情形，证明相似．

定义 $\sigma_{nm} = a_m^\dagger a_n$，类似于 (5.3.27) 式易于计算出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sigma_{nm} &= -\frac{\gamma_n + \gamma_m}{2}\sigma_{nm} - i/\hbar \sum_\nu < n|H'|\nu > \sigma_{\nu m} e^{i\omega_{n\nu}t} \\ &\quad + i/\hbar \sum_\nu \sigma_{n\nu} < \nu|H'|m > e^{i\omega_{\nu m}t} + \Gamma_{nm}\end{aligned} \tag{5.3.34}$$

式中

$$\Gamma_{nm} = a_m^\dagger \Gamma_n + \Gamma_m^\dagger a_n$$

对于二能级原子系统

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma_z}{dt} &= -\gamma_1(\sigma_z - \bar{\sigma}_z) - i\frac{\Omega}{2}(\sigma^- e^{-i\Delta\omega t} - \sigma^+ e^{i\Delta\omega t}) + \Gamma_z \\
\frac{d\sigma^-}{dt} &= -i\Omega e^{i\Delta\omega t}\sigma_z - \gamma_2\sigma^- + \Gamma^- \\
\frac{d\sigma^+}{dt} &= i\Omega e^{-i\Delta\omega t}\sigma_z - \gamma_2\sigma^+ + \Gamma^+
\end{aligned} \tag{5.3.35}
$$

$$
<\Gamma^-(t)\Gamma^+(t')> = 2\gamma_2 <\sigma^-(t)\sigma^+(t)> \delta(t-t') \tag{5.3.36}
$$

$$
<\Gamma^\pm(t)\Gamma_z(t') - \Gamma_z(t)\Gamma^\pm(t')> = (\gamma_1+\gamma_2) <\sigma^\pm(t)\sigma_z(t) - \sigma_z(t)\sigma^\pm(t)> \delta(t-t') \tag{5.3.37}
$$

将 (5.3.35) 式与二能级原子系统运动方程 (2.6.16) 比较，增加了阻尼项及无规力，这些均来源于与热库的相互作用. 与 Bloch 方程 (2.6.18) 比较，则只增加了无规力. 注意到 Bloch 方程的阻尼项是唯象引进的，只在引进无规力后，才能保证算子间的对易关系 (5.3.2) 仍然成立. 参照辐射与二能级原子相互作用方程 (5.2.20) 及有阻尼情形的 Langevin 方程 (5.3.19)，可写出有阻尼情形单模场的运动方程

$$
\begin{aligned}
\frac{db}{dt} &= -(i\omega + \chi)b - ig\sigma^- + F \\
\frac{db^\dagger}{dt} &= (i\omega - \chi)b^\dagger + ig\sigma^+ + F^\dagger
\end{aligned} \tag{5.3.38}
$$

由 (5.3.38) 式的第二式及 (5.3.35) 式的第三式消去 σ^+, 得

$$
\begin{aligned}
& \ddot{b}^\dagger + (-i(\omega+\omega_0) + \chi + \gamma_2)\dot{b}^\dagger + \left((i\omega - \gamma_2)(i\omega - \chi) - g^2\sigma_z\right) b^\dagger \\
= & -(i\omega_0 - \gamma_2)F^\dagger + ig\Gamma^+ + \dot{F}^\dagger = F_t^\dagger
\end{aligned} \tag{5.3.39}
$$

该方程在研究激光单模振荡时将用到.

5.3.4 辐射场的密度矩阵方程 [4]

除了 Langevin 方程与 Fokker-Planck 方程外，密度矩阵方法也是很重要的. 设辐射场与热库构成的体系的密度矩阵为 ρ_{LB}, 在相互作用绘景中，参照 (2.5.11) 式， ρ_{LB} 满足的运动方程为

$$
\frac{d\rho_{LB}}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[H_I, \rho_{LB}] \tag{5.3.40}
$$

于是有

$$
\rho_{LB}(t) = \frac{-i}{\hbar}\int_0^t [H_I(t'), \rho_{LB}(t')]dt' + \rho_{LB}(0)
$$

代入 (5.3.40) 式后，得

$$
\frac{d\rho_{LB}(t)}{dt} = (\frac{-i}{hbar})^2[H_I(t), \int_0^t [H_I(t'), \rho_{LB}(t')]dt' + \rho_{LB}(0)]
$$

参照 (5.3.13) 式，并令 $B_\lambda(t) = \sum_\omega g_\omega^\lambda B_\omega e^{-i\omega t}$, 则得

$$
H_I = \hbar\sum_\lambda (g_\lambda b_\lambda^+ B_\lambda + g_\lambda^* b_\lambda B_\lambda^+) \tag{5.3.41}
$$

对于单模情形，去掉对 λ 的求和，将 (5.3.41) 式代入 (5.3.40) 式，在 t=0 时， $\rho_{LB}(0) = \rho(0)\rho_B(0)$[2] ；在 $t \neq 0$ 时，我们也近似取这个分解 [14]，即 $\rho_{LB}(t) \simeq \rho(t)\rho_B(0)$, 因热库很大，不会因相互作用发生大的变化. 将等式两边对热库 B 求迹，在通常情况下 $[H_I(t), \rho_{LB}(0)]$ 对热库求迹后为 0, 又计及 $\mathrm{tr}_B(\rho_B) = 1$, $\rho = \mathrm{tr}_B(\rho_{LB})$, 于是有

$$\frac{d\rho}{dt} = \left([b^\dagger\rho, b] + [b^\dagger, \rho b]\right) A_{21} + \left([b\rho, b^\dagger] + [b, \rho b^\dagger]\right) A_{12}$$

$$A_{21} = \int_0^t \mathrm{tr}_B(|g|^2 B^\dagger(t) B(t')\rho_B) dt' = \int_0^t < F^\dagger(t) F(t') > dt' = \chi n_\omega \tag{5.3.42}$$

$$A_{12} = \int_0^t \mathrm{tr}_B(|g|^2 B(t) B^\dagger(t')\rho_B) dt' = \int_0^t < F(t) F^\dagger(t') > dt' = \chi(n_\omega + 1)$$

式中，χ 为阻尼系数，n_ω 为热库光子数．若令 $\chi = \dfrac{\nu}{2Q}$, 则上式即 Scully–Lamb[1] 求得的原子束热库作用下密度矩阵运动方程

$$\dot\rho(t) = -\frac{R_a}{2}\left([b, b^\dagger\rho] + [\rho b, b^\dagger]\right) - \frac{R_b}{2}\left([b^\dagger, b\rho] + [\rho b^\dagger, b]\right)$$

$$R_a = \frac{\nu}{Q} n_\omega \quad , \quad R_b = \frac{\nu}{Q}(n_\omega + 1) \tag{5.3.43}$$

在具体取定热库时，文献 [1] 中的 (17.16) 式，是令 $R_a = n_\omega = 0$, 即考虑真空场的起伏

$$\dot\rho(t) = -\frac{\nu}{Q}(b^\dagger b\rho - b\rho b^\dagger + \rho b^\dagger b - b\rho b^\dagger) \tag{5.3.44}$$

在粒子数表象中，上式的对角矩阵元为

$$\dot\rho_{nn}(t) = -\frac{2\nu}{Q}[n\rho_{nn} - (n+1)\rho_{n+1,n+1}] \tag{5.3.45}$$

这就是真空场起伏对激光输出的贡献．

考虑到 $[b, f] = \dfrac{\partial f}{\partial b^\dagger}$, $[b^\dagger, f] = -\dfrac{\partial f}{\partial b}$(见第六章附录), 并令 $\delta = A_{21}$, $\xi = A_{12}$, 则 (5.3.42) 式可写为

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt} &= -\delta\left(\frac{\partial b^\dagger\rho}{\partial b^\dagger} + \frac{\partial \rho b}{\partial b}\right) + \xi\left(\frac{\partial b\rho}{\partial b} + \frac{\partial \rho b^\dagger}{\partial b^\dagger}\right) \\ &= -\delta\left(2\rho + b^+\frac{\partial\rho}{\partial b^+} + \frac{\partial\rho}{\partial b}b\right) + \xi\left(2\rho + b\frac{\partial\rho}{\partial b} + \frac{\partial\rho}{\partial b^+}b^+\right) \\ &= 2(\xi - \delta)\rho + 2\xi\frac{\partial^2\rho}{\partial b\partial b^\dagger} + (\xi - \delta)\left(b^\dagger\frac{\partial\rho}{\partial b^\dagger} + \frac{\partial\rho}{\partial b}b\right)\end{aligned} \tag{5.3.46}$$

上式无疑是辐射密度矩阵理论中一个重要的结果，有意思的是除了上面的证明外，还可应用在相空间 $(B_\omega, B_\omega^\dagger)$ 求密度矩阵的全微分的方法予以证明．一般来说，密度矩阵 ρ_{LB} 可以看成是算子 $b, b^\dagger, B_\omega, B_\omega^\dagger$ 的函数，而 $b = b(t), b^\dagger = b^\dagger(t)$, 故 ρ_{LB} 可表示为 $B_\omega, B_\omega^\dagger$ 及相互作用时间 t 的函数 $\rho_{LB} = \rho_{LB}(B_\omega, B_\omega^\dagger, t)$, 这就表明可在相空间 $(B_\omega, B_\omega^\dagger)$ 来计算密度矩阵 ρ_{LB} 对 t 的全微分．与 Liouville 定理所证明的 $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$ 不一样，我们现在讨论的光子数密度 $\rho_{LB}(t)$, 因光子服从 Bose 统计分布，粒子数不守恒，应该有 $\dfrac{d\rho_{LB}}{dt} \neq 0, \mathrm{tr}_B(\dfrac{d}{dt}\rho_{LB}) = \dfrac{d}{dt}\mathrm{tr}_B(\rho_{LB}) = \dfrac{d\rho}{dt} \neq 0$, 实际上我们证明了 $\dfrac{d\rho}{dt} \neq 0$, 而且就是 (5.3.46) 式．

设 ρ_{LB} 按正常顺序展开

$$\rho_N = \sum \rho_{mn} b^{\dagger m} b^n$$

式中，ρ_{mn} 是 $B_\omega^\dagger, B_\omega$ 的函数，也是按正常顺序排列的，即 $B_\omega^\dagger$ 在 B_ω 之前，则可证明

$$\frac{d\rho_N}{dt} = -\sum \frac{\partial \rho_N \dot{B}_\omega}{\partial B_\omega} - \sum \frac{\partial \dot{B}_\omega^\dagger \rho_N}{\partial B_\omega^\dagger} + \frac{\partial \rho_N}{\partial b} F + F^\dagger \frac{\partial \rho_N}{\partial b^\dagger} \tag{5.3.47}$$

其物理意义是，前两项代表单位时间光子净流进元体积的数目，即流进数减去流出数；后两项代表单位时间内元体积内光子的产生率，即 $\frac{\partial \rho_N}{\partial t}$，不是流引进的．式中的 $F, F^\dagger$ 即热库作用于系统的无规力，由 (5.3.17) 式定义．现证后面两项即元体积中光子的产生率 $\frac{\partial \rho_N}{\partial t}$．由于

$$H_{LB} = \hbar b^\dagger \sum g_\omega B_\omega e^{-i\omega t} + \hbar b \sum g_\omega^* B_\omega^\dagger e^{i\omega t}$$

又参照 (5.3.17) 式 $F^\dagger(t)$ 的定义，得

$$\left(\frac{\partial b^\dagger}{\partial t}\right)_{B_\omega^\dagger} = \frac{i}{\hbar}[H_{LB}, b^\dagger] = i \sum g_\omega^* B_\omega^\dagger e^{i\omega t} = F^\dagger \tag{5.3.48}$$

同样

$$\left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)_{B_\omega} = \frac{i}{\hbar}[H_{LB}, b] = -i \sum g_\omega B_\omega e^{-i\omega t} = F$$

故后两项可写为

$$\left(\frac{\partial \rho_N}{\partial b^\dagger}\right)\left(\frac{\partial b^\dagger}{\partial t}\right)_{B_\omega^\dagger} + \left(\frac{\partial b}{\partial t}\right)_{B_\omega}\left(\frac{\partial \rho_N}{\partial b}\right) = \frac{\partial \rho_N}{\partial t} \tag{5.3.49}$$

前两项的贡献为

$$\begin{aligned}
& -\sum \frac{\partial(\dot{B}_\omega^\dagger \rho_N)}{\partial B_\omega^\dagger} - \sum \frac{\partial(\rho \dot{B}_\omega)}{\partial B_\omega} \\
= \ & -\sum \frac{\partial(i g_\omega b^\dagger \rho_N)}{\partial B_\omega^\dagger} - \sum \frac{\partial(-i g_\omega^* \rho_N b)}{\partial B_\omega} \\
= \ & -\sum \left[B_\omega(i g_\omega b^\dagger \rho_N) - (i g_\omega b^\dagger \rho_N) B_\omega\right] + \sum \left[B_\omega^\dagger(-i g_\omega^* \rho_N b) - (-i g_\omega^* \rho_N b) B_\omega^\dagger\right] \\
= \ & \left[F b^\dagger \rho_N - b^\dagger \rho_N F\right] - \left[F^\dagger \rho_N b - \rho_N b F^\dagger\right] \\
= \ & F b^\dagger \sum \rho_{mn} b^{\dagger m} b^{n+1} - b^\dagger \sum \rho_{mn} b^{\dagger m} b^n F - F^\dagger \sum \rho_{mn} b^{\dagger m} b^{n+1} + \sum \rho_{mn} b^{\dagger m} b^{n+1} F^\dagger
\end{aligned} \tag{5.3.50}$$

注意到

$$\begin{aligned}
F b^\dagger &= F(t)\left(b^\dagger(0) e^{i\omega t - \chi t} + \int_0^t F^\dagger(\tau) e^{(i\omega - \chi)(t-\tau)} d\tau\right) \\
< F b^\dagger > &= \int_0^t < F(t) F^\dagger(\tau) > e^{(i\omega - \chi)(t-\tau)} d\tau = \chi(n_\omega + 1)
\end{aligned} \tag{5.3.51}$$

将 (5.3.50) 式两端对 F, $F^\dagger$ 求平均，便得

$$\begin{aligned}
& \sum \rho_{mn}(n_\omega + 1)\chi(m+1) b^{\dagger m} b^n - \sum \rho_{mn} n_\omega \chi(m+1) b^{\dagger m} b^n - \sum \rho_{mn} n_\omega \chi(n+1) b^{\dagger m} b^n \\
& + \sum \rho_{mn}(n_\omega + 1)\chi(n+1) b^{\dagger m} b^n = 2\chi \rho_N + \chi\left(b^\dagger \frac{\partial \rho_N}{\partial b^\dagger} + \frac{\partial \rho_N}{\partial b} b\right)
\end{aligned} \tag{5.3.52}$$

后两项的贡献为

$$F^\dagger \frac{\partial}{\partial b^\dagger} \sum \rho_{mn} b^{\dagger m} b^n + \frac{\partial}{\partial b} \sum \rho_{mn} b^{\dagger m} b^n F$$

对 $F^\dagger$, F 求平均后为

$$2\chi n_\omega \sum \rho_{mn} mn b^{\dagger(m-1)} b^{n-1} = 2\chi n_\omega \frac{\partial^2 \rho_N}{\partial b^\dagger \partial b} \tag{5.3.53}$$

于是，由 (5.3.52), (5.3.53) 和 (5.3.47) 式，得

$$\frac{d\rho_N}{dt} = 2\chi\rho_N + \chi\left(b^\dagger \frac{\partial \rho_N}{\partial b^\dagger} + \frac{\partial \rho_N}{\partial b} b\right) + 2\chi n_\omega \frac{\partial^2 \rho_N}{\partial b^\dagger \partial b} \tag{5.3.54}$$

若将 ρ 按反常顺序展开

$$\rho_A = \sum \rho_{mn} b^m b^{\dagger n} \tag{5.3.55}$$

同样可以证明

$$\frac{d\rho_A}{dt} = 2\chi\rho_a + 2\chi(n_\omega + 1)\frac{\partial^2 \rho_A}{\partial b \partial b^\dagger} + \chi\left(b^\dagger \frac{\partial \rho_A}{\partial b^\dagger} + \frac{\partial \rho_A}{\partial b} b\right) \tag{5.3.56}$$

比较 (5.3.46) 与 (5.3.56) 式，得

$$\xi - \delta = \chi \quad , \quad \chi(n_\omega + 1) = \xi$$

即

$$\frac{\delta}{\xi - \delta} = n_\omega \quad , \quad \frac{\delta}{\xi} = \frac{n_\omega}{n_\omega + 1} \tag{5.3.57}$$

这结果与 (5.3.42) 式一致， $\delta = A_{21}$， $\xi = A_{12} = \chi(n_\omega + 1)$.

5.3.5 激光输出的统计分布

现在应用上面结果分析激光的统计分布. 先通过解单模激光振荡方程，研究激光在阈值附近谱宽的变化，接着通过解 Fokker–Planck 方程研究激光输出的统计分布.

上节已求得单模激光振荡方程 (5.3.39), 为了简化方程,现作变换. 设 $b^\dagger \to b^\dagger e^{i\Omega t}$, $F_t^\dagger \to F_t^\dagger e^{i\Omega t}$, $\Omega = \dfrac{\omega_0\chi + \omega\gamma_2}{\chi + \gamma_2}$,$\delta = \omega_0 - \omega$, 则有

$$\ddot{b}^\dagger + \left(\chi + \gamma_2 + i\delta\frac{\chi - \gamma_2}{\chi + \gamma_2}\right)\dot{b}^\dagger + \left\{\chi\gamma_2\left[1 + \frac{\delta^2}{(\chi + \gamma_2)^2}\right] - g^2\sigma_z\right\} b^\dagger = F_t^\dagger \tag{5.3.58}$$

如果是在阈值以下， σ_z 可用 $\bar{\sigma}_z$ 近似，而 $\ddot{b}^\dagger$ 也可略去，则 (5.3.58) 式的解为

$$\begin{aligned} b^\dagger &= \int_0^t e^{-\hat{\chi}(t-\tau)} F_t^\dagger(\tau)\left[\chi + \gamma_2 + i\frac{(\omega_0 - \omega)(\chi - \gamma_2)}{\chi + \gamma_2}\right]^{-1} d\tau \\ \hat{\chi} &= \frac{\chi\gamma_2\left[1 + \dfrac{\delta^2}{(\chi + \gamma_2^2)^2}\right] - g^2\bar{\sigma}_z}{\chi + \gamma_2 + i\delta(\chi - \gamma_2)/(\chi + \gamma_2)} \end{aligned} \tag{5.3.59}$$

为求得线宽就需要求相关函数 $< b^\dagger(t) b(t') >$, 按上式

$$\begin{aligned} < b^\dagger(t) b(t') > &= e^{i\Omega(t-t')} \int_0^t \int_0^{t'} e^{-\hat{\chi}(t-\tau) - \hat{\chi}^*(t'-\tau')} \\ &\quad \times < F_t^\dagger(\tau) F_t(\tau') > \left[(\chi + \gamma_2)^2 + \frac{\delta^2(\chi - \gamma_2)^2}{(\chi + \gamma_2)^2}\right]^{-1} d\tau d\tau' \end{aligned} \tag{5.3.60}$$

注意到

$$F_t^\dagger = -(i\omega_0 - \gamma_2)F^\dagger + ig\Gamma^+ + \dot{F}^\dagger, \qquad \dot{F}^\dagger = i\Omega F^\dagger$$

$$< F_t^\dagger(\tau)F_t(\tau') >= \gamma_2^2\left[1 + \frac{\delta^2}{(\chi+\gamma_2)^2}\right] < F^\dagger(\tau)F(\tau) > + g^2 < \Gamma^+(\tau)\Gamma(\tau') >$$

$$\begin{aligned} < F^\dagger(\tau)F(\tau') > &= 2\chi n_{th}\delta(\tau - \tau') \\ < \Gamma^+(\tau)\Gamma(\tau') > &= 2\gamma_2 N_3\delta(\tau - \tau') \end{aligned} \tag{5.3.61}$$

将 (5.3.61) 式代入 (5.3.60) 式，便得

$$< b^\dagger(t)b(t') >= \begin{cases} \dfrac{2\gamma_2^2\left[1 + \dfrac{\delta^2}{(\chi+\gamma_2)^2}\right]\chi n_{th} + 2g^2\gamma_2 N_3}{\left[(\chi+\gamma_2)^2 + \dfrac{\delta^2(\chi-\gamma_2)^2}{(\chi+\gamma_2)^2}\right](\hat{\chi}+\hat{\chi}^*)} e^{(i\Omega-\hat{\chi})(t-t')}, & t > t' \\ \dfrac{2\gamma_2^2\left[1 + \dfrac{\delta^2}{(\chi+\gamma_2)^2}\right]\chi n_{th} + 2g^2\gamma_2 N_3}{\left[(\chi+\gamma_2)^2 + \dfrac{\delta^2(\chi-\gamma_2)^2}{(\chi+\gamma_2)^2}\right](\hat{\chi}+\hat{\chi}^*)} e^{(i\Omega+\hat{\chi})(t-t')}, & t < t' \end{cases} \tag{5.3.62}$$

由 (5.3.62) 式得知，谱宽 $\Delta\omega = \mathrm{Re}\hat{\chi}$, 输出功率 P 为

$$P = 2\chi\hbar\omega < b^\dagger(t)b(t) >= 2\frac{2\gamma_2^2\left[1 + \dfrac{\delta^2}{(\chi+\gamma_2)^2}\right]\chi n_{th} + 2g^2\gamma_2 N_3}{\left[(\chi+\gamma_2)^2 + \dfrac{\delta^2(\chi-\gamma_2)^2}{(\chi+\gamma_2)^2}\right]\Delta\omega}\chi\hbar\omega \tag{5.3.63}$$

式中，$\Delta\omega$ 与输出功率 P 之间的反比关系，正是激光振荡输出很重要的关系之一，最早由 Schawlow 与 Townes[5] 给出. 这些结果只适用于阈值以下的阻尼振荡情形，所得的结果与半经典理论基本一致.

根据相关函数 (5.3.62) 式，不但可求出谱宽，而且可求出线型. 这是因为除了 $e^{i\Omega t}$ 振荡的模式外，还包含许多邻近的模式：

$$b^\dagger(t) = r_0 e^{i\Omega t + i\varphi(t)} \tag{5.3.64}$$

热库与原子系统都是许多独立的系统，它们对激光模式的相位影响可表示为

$$\varphi(t) - \varphi(0) = \sum_\mu \varphi_\mu(t) \tag{5.3.65}$$

$\varphi_\mu(t)$ 是彼此独立的，故有

$$\begin{aligned} < b^\dagger(t)b(0) > &= < r_0^2 e^{i\Omega t + i(\varphi(t)-\varphi(0))} > \simeq r_0^2 e^{i\Omega t}\prod_\mu < e^{i\varphi_\mu(t)} > \\ &\simeq r_0^2 e^{i\Omega t}\prod_\mu\left\{1 + < \varphi_\mu(t) > - \frac{1}{2} < \varphi_\mu^2(t) >\right\} \end{aligned}$$

因 $< \varphi_\mu >= 0$, $< \varphi_\mu\varphi_\nu >= 0$, 当 $\mu \neq \nu$,

$$< b^\dagger(t)b(0) > \simeq r_0^2 e^{i\Omega t} e^{-\frac{1}{2}\sum < \varphi_\mu^2 >} \simeq r_0^2 e^{i\Omega t} e^{-\frac{1}{2} < (\varphi-\varphi_0)^2 >} \tag{5.3.66}$$

按扩散关系 $\dfrac{1}{2} < (\varphi - \varphi_0)^2 > \simeq \Delta\omega t$, 有

$$< b^{\dagger}(t)b(0) > \simeq r_0^2 e^{i\Omega t - \Delta\omega t'} \tag{5.3.67}$$

上式表明阈值以下的线型属自发辐射的 Lorentz 线型.

在阈值以上的情况有较大的变化，现作一简化讨论. 在不计及无规力并且考虑稳态情况下，可在 (5.3.58) 式中令 $\ddot{b}^{\dagger} = \dot{b}^{\dagger} = F_t^{\dagger} = 0$. 因 σ_z 按定义即反转粒子数 Δ 的一半，参照 Δ 的稳态解 (5.1.19) 和 (5.1.18) 式， $\Delta \simeq \Delta_0(1 - 2T_1 R)$, 而 $R \propto (b^+ b)$, 故可将 σ_z 表示为 $\bar{\sigma}_z - C^2(b^+ b)/g^2$. 于是有稳态解为

$$\left\{\chi\gamma_2\left[1 + \frac{\delta^2}{(\chi+\gamma_2)^2}\right] - g^2\bar{\sigma}_z + C^2(b^{\dagger}b)\right\} b^{\dagger} = 0 \tag{5.3.68}$$

即

$$b^{\dagger} = 0, \quad , \qquad C|b^{\dagger}| = \sqrt{g^2\bar{\sigma}_z - \chi\gamma_2\left(1 + \frac{\delta^2}{\chi+\gamma_2}\right)} \tag{5.3.69}$$

由上式看出，当根号内为负数 (亦即在阈值以下) 时，不存在不为 0 的稳态解，即 $b^{\dagger} = 0$. 只有在阈值以上时才有 $|b^{\dagger}| \neq 0$. 将 $|b^{\dagger}|$ 对粒子数反转 $\bar{\sigma}_z$ 作图 (见图 5.6),A 点为阈值，由 0 至 A 一般为阈值以下的阻尼振荡. 高于阈值时，便实现了稳态振荡，即图中 AB 曲线所表示的. 在 $0A$ 段振幅与位相均可以起伏；在 AB 段有起伏的主要是位相. 对于前一种情况，我们有

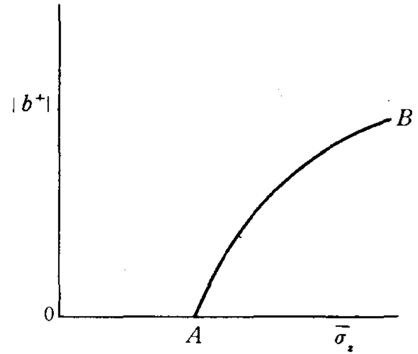


图 5.6　稳态解振幅 $|b^{\dagger}|$ 随时间 $\bar{\sigma}_z$ 的变化曲线

$$| < b^{\dagger}(t)b(0) > | \simeq r_0^2 e^{-\frac{1}{2}\left[(\Delta\varphi^r)^2 + (\Delta\varphi^i)^2\right]} \tag{5.3.70}$$

对于后一种情况，我们有

$$| < b^{\dagger}(t)b(0) > | \simeq r_0^2 e^{-\frac{1}{2}(\Delta\varphi^i)^2} \tag{5.3.71}$$

式中， $\Delta\varphi^r$, $\Delta\varphi^i$ 分别为振幅及位相起伏. 若这两种起伏的均值相等 $(\Delta\varphi^r)^2 = (\Delta\varphi^i)^2$, 则由 (5.3.70) 和 (5.3.71) 式可看出，阻尼解的谱宽应是稳态解谱宽的两倍.

为得出当光泵功率逐渐加大，因而反转粒子数密度 $\bar{\sigma}_z$ 也逐渐增加，由阈值下过渡到阈值上谱宽逐渐变化的解，我们解经典的 Langevin 方程及 Fokker–Planck 方程，即前面的 (5.3.9), (5.3.12) 式. 在目前的情况下，略去 Langevin 方程 (5.3.58) 式中二次微分项 $\ddot{b}^{\dagger}$, 并将算符换成可易的量 u, 于是可得出 u 的运动方程

$$\frac{d}{dt}u - \beta(\bar{n} - u^* u)u = \Gamma \tag{5.3.72}$$

式中， $\bar{n}$ 为光泵参数. 令 $u = re^{-i\varphi}$, 则由 (5.3.72) 及 (5.3.12) 式得 Fokker–Planck 方程

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\beta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[(\bar{n} - r^2)r^2 W\right] = Q\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial W}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2}\right] \tag{5.3.73}$$

将 (5.3.73) 式取规一化变量

$$\hat{r}=\sqrt[4]{\frac{\beta}{Q}}r \quad , \qquad \hat{t}=\sqrt{\beta Q}t \quad , \qquad a=\sqrt{\frac{\beta}{Q}}\bar{n} \tag{5.3.74}$$

为方便起见，仍用 r,t 表示 $\hat{r},\hat{t}$, 则 (5.3.73) 式可写为

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[(a^2-r^2)r^2W]=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial W}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 W}{\partial \varphi^2} \tag{5.3.75}$$

该式的稳态解为 $\dfrac{\partial W}{\partial t}=0$, 设 $\dfrac{\partial W}{\partial \varphi}=0$, 则得

$$W(r^2)=\frac{N}{2\pi}e^{-\frac{r^4}{4}+a\frac{r^2}{2}} \quad , \qquad \frac{1}{N}=\int_0^\infty re^{-\frac{r^4}{4}+a\frac{r^2}{2}}dr \tag{5.3.76}$$

稳态解 $W(r)$ 随光子规一化强度 $\hat{n}=r^2$ 的变化曲线如图 5.7 所示. 当 a 由 -2, 0, 3 增至 6 时， $W(r)$ 的峰值已由 $r=0$ 移至 $r\neq 0$, 远离中心的地方. 利用稳态解 (5.3.76) 式，可求得光子计数率. 在 dt 时间内测量到一个光子的几率 $p(1,dt,t)$ 应与光强成正比，即

$$p(1,dt,t)=\alpha I(t)dt \tag{5.3.77}$$

在 T 时间内测量到 n 个光子的几率 $p(n,T,t)$ 由 Possion 分布给出为

$$p(n,T,t)=\frac{1}{n!}(\alpha TI)^n e^{-\alpha TI} \tag{5.3.78}$$

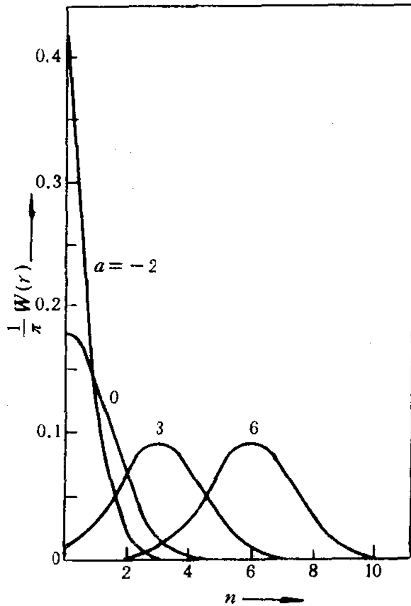


图 5.7 稳态解 $W(r)$ 随 $\bar{n}$ 的变化曲线 (参照 Haken [2])

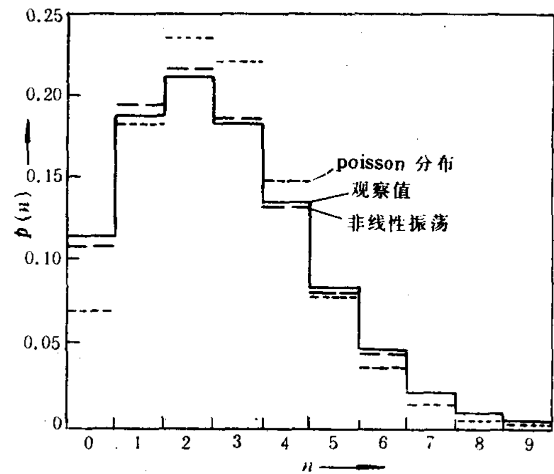


图 5.8 $p(n,t)$ 随 n 变化的曲线 (参照 [2])

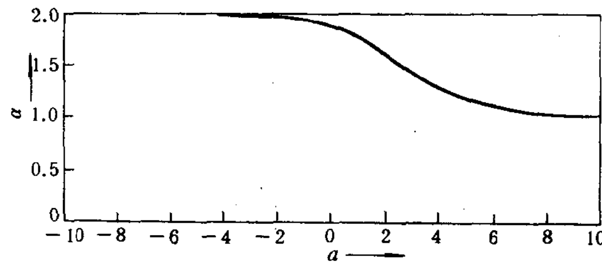


图 5.9 谱线变窄因子 α 随泵浦参量 a 的变化曲线 (参照 [2])

将 (5.3.78) 式用 $W(I)I$ 分布几率乘，经积分得出在 T 时测量到 n 个光子的几率

$$p(n,T) = \int_0^\infty \frac{(\alpha TI)^n}{n!} e^{-\alpha TI} W(I) dI \tag{5.3.79}$$

图 5.8 给出按非线性振荡 Fokker–Planck 方程的稳态解 (5.3.76) 和 (5.3.79) 式计算得的 $p(n,T)$, 与实验结果比较是很符合的；还给出了按 Poisson 分布计算的光子数分布，与实验结果比较偏离很大.

解非定态方程 (5.3.75), 还能得出谱线变窄因子 $\alpha(a)$ 随泵浦参量 a 的变化曲线 (见图 5.9), 当 a 由 -10 增至 10 时， $\alpha(a)$ 由 2 变至 1, 与 (5.3.70) 和 (5.3.71) 式相符.

5.4 激光振荡量子噪音的变率方程分析

激光振荡的量子理论是一个研究得较多的课题 [1~12]. 较早有 Lax 与 Louisell[6−8], 后来有 Haken[2] 及 Lamb[1] 学派对这一课题做了大量工作. 近年来，为获得低噪音非经典光场输出， Haus, Yamamoton 等又对半导体激光的量子噪音理论 [10~12] 进行了研究. 但这些研究有一共同的特点，即模型与推导均较复杂，各个噪音不是看得很清楚. 在研究这些量子噪音理论的基础上，发现将现有阻尼振子的热库理论推广到包括负阻尼振子在内的情形，就容易得出将损耗与增益包括在内的激光变率方程组，也容易得出白泵浦激光的噪音谱，与前人所得结果比较，基本相符.

在 Haken 提出的阻尼振子热库理论中，阻尼振子与热库相互作用通过无规力 F, $F^\dagger$ 来体现，而热库便是无规力的源. 如上面见到的 F ,$F^\dagger$ 应满足 $< [F(t), F^\dagger(t')] >= 2\chi\delta(t-t')$, 因子 $\delta(t-t')$ 体现 Markov 过程的无规力性质. Haken 理论中还有一个重要之点，即只用含未来时 $(t > t_0)$ 的解，不用含过去时 $(t < t_0)$ 的解. 主要因为解中包含因子 $e^{-\chi(t-t_0)}$. 如果用含过去时的解，当 $t-t_0 \to -\infty$, 则 $e^{-\chi(t-t_0)}$ 明显发散. 对于负阻尼振子，由于 $-\chi > 0$, 恰好相反，采用含未来时的解，当 $t - t_0 \to \infty$ 时， $e^{-\chi(t-t_0)}$ 发散，而用含过去时的解，当 $t-t_0 \to -\infty$,$e^{-\chi(t-t_0)} \to 0$, 是收敛的. 据此可用含过去时的解代替含未来时的解，实现对负阻尼振子与热库相互作用的推广.

5.4.1 阻尼及负阻尼振子的热库模型

参照 Haken [2], 设单模场 L 与热库相互作用的哈密顿量 H_{L-B} 为

$$H_{L-B} = \hbar b^\dagger \sum_\omega g_\omega B_\omega e^{-i\omega t} + \hbar b \sum_\omega g_\omega^* B_\omega^\dagger e^{i\omega t} \tag{5.4.1}$$

单模场的哈密顿量为 $\hbar\omega b^\dagger b$, 于是算子 $b^\dagger, B_\omega^\dagger$ 的 Heisenberg 方程为

$$\begin{aligned} \frac{db^\dagger}{dt} &= i\omega_0 b^\dagger + i\sum_\omega g_\omega^* B_\omega^\dagger e^{i\omega t} \\ \frac{dB_\omega^\dagger}{dt} &= i b^\dagger g_\omega e^{-i\omega t} \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

由此得

$$B_\omega^\dagger = \begin{cases} i\int_{t_0}^t b^\dagger(\tau) g_\omega e^{-i\omega\tau} d\tau + B_\omega^\dagger(t_0) & , \quad t \geq t_0 \\ -i\int_t^{t_0} b^\dagger(\tau) g_\omega e^{-i\omega\tau} d\tau + B_\omega^\dagger(t_0) & , \quad t_0 \geq t \end{cases} \tag{5.4.3}$$

将 (5.4.3) 式代入 (5.4.2) 式的第一式，得

$$\frac{db^\dagger}{dt} = \begin{cases} i\omega_0 b^\dagger - \int_{t_0}^{t} b^\dagger(\tau)\sum_\omega |g_\omega|^2 e^{i\omega(t-\tau)}d\tau + \sum_\omega g_\omega^* B_\omega^\dagger(t_0)e^{i\omega t} & , \quad t > t_0 \\ i\omega_0 b^\dagger + \int_{t}^{t_0} b^\dagger(\tau)\sum_\omega |g_\omega|^2 e^{i\omega(t-\tau)}d\tau + \sum_\omega g_\omega^* B_\omega^\dagger(t_0)e^{i\omega t} & , \quad t_0 > t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (i\omega_0 - \chi)b^\dagger + F^\dagger(t) & , \quad t > t_0 \\ (i\omega_0 + \chi)b^\dagger + F^\dagger(t) & , \quad t_0 > t \end{cases} \tag{5.4.4}$$

$$\begin{aligned} &< F^\dagger(t)F(t') >= \sum_\omega |g_\omega|^2 e^{i\omega(t-t')} < B_\omega^\dagger B_\omega > \simeq 2\bar{n}_\omega \chi\delta(t-t') \\ &< F(t)F^\dagger(t') >= \sum_\omega |g_\omega|^2 e^{i\omega(t-t')} < B_\omega B_\omega^\dagger > \simeq 2(1+\bar{n}_\omega)\chi\delta(t-t') \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

(5.4.4) 式的解为

$$b^\dagger(t) = \begin{cases} b^\dagger(t_0)e^{(i\omega_0-\chi)(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{(i\omega_0-\chi)(t-\tau)}F^\dagger(\tau)d\tau, & t > t_0 \\ b^\dagger(t_0)e^{(i\omega_0+\chi)(t-t_0)} - \int_{t}^{t_0} e^{(i\omega_0+\chi)(t-\tau)}F^\dagger(\tau)d\tau, & t_0 > t \end{cases} \tag{5.4.6}$$

根据 (5.4.4) 与 (5.4.6) 式，得

$$< \frac{d}{dt}b^\dagger b >=< \dot{b}^\dagger b + b^\dagger \dot{b} >$$

$$= \begin{cases} -2\chi < b^\dagger b > & + \int_{t_0}^{t} < F^\dagger(t)F(\tau) > e^{-(i\omega_0+\chi)(t-\tau)}d\tau \\ & + \int_{t_0}^{t} < F^\dagger(\tau)F(t) > e^{(i\omega_0-\chi)(t-\tau)}d\tau, \quad t > t_0 \\ 2\chi < b^\dagger b > - \int_{t}^{t_0} & < F^\dagger(t)F(\tau) > e^{-(i\omega_0+\chi)(t-\tau)}d\tau \\ & - \int_{t}^{t_0} < F^\dagger(\tau)F(t) > e^{(i\omega_0-\chi)(t-\tau)}d\tau, \quad t_0 > t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2\chi < b^\dagger b > +2\chi\bar{n}_\omega & , \quad t > t_0 \\ 2\chi < b^\dagger b > -2\chi\bar{n}_\omega & , \quad t_0 > t \end{cases} \tag{5.4.7}$$

由此得

$$\frac{d}{dt} < [b, b^\dagger] >= \begin{cases} -2\chi < [b, b^\dagger] > +2\chi & , \quad t > t_0 \\ 2\chi < [b, b^\dagger] > -2\chi & , \quad t_0 > t \end{cases} \tag{5.4.8}$$

在初值 $< [b(t_0), b^\dagger(t_0)] >= 1$ 条件下，$< [b, b^\dagger] >= 1$ 是上面方程的解．归结为一句，对于阻尼情形，就采用 $t \geq t_0$ 的推迟解；而对于负阻尼情形，就采用 $t \leq t_0$ 的超前解，才会使关系 $< [b, b^\dagger] >= 1$ 得到满足．

5.4.2 包含量子噪音的激光变率方程

在上面阻尼 (负阻尼) 热库模型基础上，容易得出包含量子噪音的激光变率方程．为讨论方便起见，现就阻尼振子进行，然后推广到负阻尼振子．在 (5.4.4) 式基础上，作变换 $b \to be^{-i\omega_0 t}$, $b^\dagger \to b^\dagger e^{i\omega_0 t}$, 便得阻尼振子的运动方程

$$\begin{aligned}\frac{db}{dt} &= -\chi b + F \\ \frac{db^\dagger}{dt} &= -\chi b^\dagger + F^\dagger\end{aligned} \tag{5.4.9}$$

由此得

$$\frac{d}{dt}b^\dagger b = -2\chi b^\dagger b + b^\dagger F + F^\dagger b \tag{5.4.10}$$

注意到 (5.4.5) 和 (5.4.6) 式以及 $\int_{t_0}^{t} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \frac{f(t)}{2}$, 于是有

$$\begin{aligned}< b^\dagger(t)F(t) > &= < \left(b^\dagger(t_0)e^{(i\omega-\chi)(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{(i\omega-\chi)(t-\tau)}F^\dagger(\tau)d\tau\right) F(t) > \\ &= \int_{t_0}^{t} e^{(i\omega-\chi)(t-\tau)} < F^\dagger(\tau)F(\tau) > d\tau = \chi\bar{n}_\omega\end{aligned} \tag{5.4.11}$$

同样有

$$< F^\dagger(t)b(t) >= \chi\bar{n}_\omega \tag{5.4.12}$$

故 (5.4.10) 式可写为

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}b^\dagger b = -2\chi(b^\dagger b - \bar{n}_\omega) + G \\ &G = b^\dagger F + F^\dagger b - 2\chi\bar{n}_\omega \quad , \qquad < G >= 0\end{aligned} \tag{5.4.13}$$

$$\begin{aligned}< G(t)G(t') > &= < [b^\dagger(t)F(t) + F^\dagger(t)b(t) - 2\chi\bar{n}_\omega][b^\dagger(t')F(t') + F^\dagger(t')b(t') - 2\chi\bar{n}_\omega] > \\ &= < b^\dagger(t)b(t') >< F(t)F^\dagger(t') > + < F^\dagger(t)F(t') >< b(t)b^\dagger(t') > \\ &\quad + < b^\dagger(t)F(t') >< F(t)b^\dagger(t') > + < F^\dagger(t)b(t') >< b(t)F^\dagger(t') > \\ &= \left[2\chi(1+\bar{n}_\omega) < b^\dagger(t)b(t') > + 2\chi\bar{n}_\omega < b(t)b^\dagger(t') >\right]\delta(t-t') \\ &\quad + < b^\dagger(t)F(t') >< F(t)b^\dagger(t') > + < F^\dagger(t)b(t') >< b(t)F^\dagger(t') >\end{aligned} \tag{5.4.14}$$

注意到

$$\begin{aligned}< b^\dagger(t)F(t') > &= \begin{cases} < \left(e^{-\chi(t-t')}b^\dagger(t') + \int_{t'}^{t} e^{-\chi(t-\tau)}F^\dagger(\tau)d\tau\right) F(t') > & , \quad t \geq t' \\ 0 & , \quad t < t' \end{cases} \\ &= \begin{cases} \chi\bar{n}_\omega & , \quad t \geq t' \\ 0 & , \quad t < t' \end{cases}\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

$$\begin{aligned}< F(t)b^\dagger(t') > &= \begin{cases} < F(t)\left(e^{-\chi(t-t')}b^\dagger(t) + \int_{t}^{t'} e^{-\chi(t-\tau)}F^\dagger(\tau)d\tau\right) > & , \quad t' \geq t \\ 0 & , \quad t' < t \end{cases} \\ &= \begin{cases} \chi\bar{(}1 + n_\omega) & , \quad t' \geq t \\ 0 & , \quad t' < t \end{cases}\end{aligned} \tag{5.4.16}$$

故有

$$< b^\dagger(t)F(t') >< F(t)b^\dagger(t') >= \chi^2(1+\bar{n}_\omega)\bar{n}_\omega\delta_{t,t'} \tag{5.4.17}$$

$$\delta_{t,t'} = \begin{cases} 1 & , \quad t = t' \\ 0 & , \quad t \neq t' \end{cases}$$

同样

$$< F^\dagger(t)b(t') >< b(t)F^\dagger(t') >= \chi^2(1+\bar{n}_\omega)\bar{n}_\omega\delta_{t,t'} \tag{5.4.18}$$

于是

$$\begin{aligned} < G(t)G(t') > \; = \; & 2\chi\left((1+\bar{n}_\omega) < b^\dagger(t)b(t') > \right. \\ & \left. + \, \bar{n}_\omega < b(t)b^\dagger(t') > \right)\delta(t-t') \\ & +2\chi^2(1+\bar{n}_\omega)\bar{n}_\omega\delta_{t,t'} - (2\chi n_\omega)^2 \end{aligned} \tag{5.4.19}$$

特别是当热噪音 $\bar{n}_\omega$ 很低时，(5.4.19) 式过渡到

$$< G(t)G(t') > \simeq 2\chi < b^\dagger(t)b(t') > \delta(t-t') \tag{5.4.20}$$

(5.4.13) 和 (5.4.20) 式分别为阻尼情形的光子数 $n = b^\dagger b$ 的变率方程与量子噪音. 同样可求得负阻尼即增益情形的变率方程与量子噪音，即

$$\begin{aligned} & < b^\dagger(t)F(t) + F^\dagger(t)b(t) >= -2\chi\bar{n}_\omega \\ & \frac{d}{dt}b^\dagger b = 2\chi(b^\dagger b - \bar{n}_\omega) + G \\ & G = b^\dagger F + F^\dagger b + 2\chi\bar{n}_\omega \quad , \qquad < G >= 0 \end{aligned} \tag{5.4.21}$$

与 (5.4.13)~(5.4.20) 式的推导相同，结果亦相同.

对于同时存在损耗与增益的单模激光振荡，得运动方程

$$\frac{db}{dt} = \left(-\frac{\omega}{2Q} + g\Delta\right)b + F_1 + F_2 \tag{5.4.22}$$

式中，$\omega/2Q$ 表示损耗；$g\Delta$ 表示粒子反转带来的增益；F_1, F_2 为相应于损耗、增益两个独立的物理过程而引进的两个独立的无规力. 参照 (5.4.5) 式，我们有

$$\begin{aligned} & < F_1^\dagger(t)F_1(t') >= 2\frac{\omega}{2Q}\bar{n}_{1\omega}\delta(t-t') = \frac{\omega}{Q}\bar{n}_{1\omega}\delta(t-t') \\ & < F_2^\dagger(t)F_2(t') >= 2g\Delta\bar{n}_{2\omega}\delta(t-t') \\ & < F_1^\dagger(t)F_2(t') >= 0 \end{aligned} \tag{5.4.23}$$

又令 $n = b^\dagger b$, 则参照 (5.4.13), (5.4.19), (5.4.20) 和 (5.4.21) 诸式，便导出光子数 n 的变率方程

$$\frac{dn}{dt} = \left(-\frac{\omega}{Q} + 2g\Delta\right)n + G_1 + G_2 \tag{5.4.24}$$

$$\begin{aligned} & < G_1(t)G_1(t') >= \frac{\omega}{Q}n\delta(t-t') \\ & < G_2(t)G_2(t') >= 2g\Delta n\delta(t-t') \\ & < G_1(t)G_2(t') >= 0 \end{aligned} \tag{5.4.25}$$

至于反转粒子数 Δ 的变率方程，也可同样写出

$$\frac{d\Delta}{dt} = -\frac{(\Delta - \Delta_0)}{T_1} - 2g\Delta n + \Gamma_s + \Gamma_p - G_2 \tag{5.4.26}$$

$$< \Gamma_s(t)\Gamma_s(t') >= \frac{\Delta}{T_1}\delta(t-t')$$

$$< \Gamma_p(t)\Gamma_p(t') >= \frac{\Delta_0}{T_1}\delta(t-t') \tag{5.4.27}$$

$$< \Gamma_p(t)G_2(t') >=< \Gamma_s(t)G_2(t') >=< \Gamma_s(t)\Gamma_p(t') >= 0$$

(5.4.26) 式中引入 $-G_2$ 是明显的，因有损耗项 $-2g\Delta n$. 这样引进后，保证了 $\frac{d(n+\Delta)}{dt}$ 不受增益与无规力 G_2 的影响. Γ_s, Γ_p 是对自发辐射与光泵引进的无规力，它们是独立的，且分别满足 Poisson 分布

$$\begin{aligned} < (\Delta(t) - \int \frac{\Delta}{T_1}dt')^2 > &= < \int_0^t \Gamma_s(t')dt' \int_0^t \Gamma_s(t'')dt'' > \\ &= \int_0^t \int_0^t \frac{\Delta(t')}{T_1}\delta(t-t')dt'dt'' = \int_0^t \frac{\Delta(t')}{T_1}dt' \end{aligned} \tag{5.4.28}$$

$$< (\Delta_0(t) - \int \frac{\Delta_0}{T_1}dt')^2 >=< \int_0^t \Gamma_p(t')dt' \int_0^t \Gamma_p(t'')dt'' >= \int_0^t \frac{\Delta_0}{T_1}dt' \tag{5.4.29}$$

从 (5.4.25) 式看出，光子分布也具有 Poisson 分布性质，但这是设 $\bar{n}_\omega \to 0$, 即热噪音可略去的情形. 一般的由 (5.4.19) 式确定，并非 Poisson 分布.

5.4.3 白泵浦激光的量子噪音

含量子噪音的激光变率方程 (5.4.24) ~ (5.4.26) 是非线性的，一般采用线性近似方法求解，即在平衡点 (n_s, Δ_s) 附近展开， n_s, Δ_s 满足

$$\begin{aligned} \left(\frac{-\omega}{Q} + 2g\Delta_s\right) n_s &= 0 \\ -\frac{\Delta_s - \Delta_0}{T_1} - 2g\Delta_s n_s &= 0 \end{aligned} \tag{5.4.30}$$

设

$$n = n_s + u \quad , \quad \Delta = \Delta_s + v \tag{5.4.31}$$

式中， u, v 为起伏. 将 (5.4.31) 式代入 (5.4.24), (5.4.26) 式，并略去 u, v 的二级小量，便得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u &= (-\omega/Q + 2g\Delta_s)u + 2gn_s v + G_1 + G_2 \\ &= 2gn_s v + G_1 + G_2 \\ \frac{d}{dt}v &= -\frac{v}{T_1} - 2g\Delta_s u - 2gn_s v + \Gamma_p + \Gamma_s - G_2 \end{aligned} \tag{5.4.32}$$

由 (5.4.30) 式得阈值 $\Delta_s = \frac{\omega}{2gQ}$. 在阈值下 ($\Delta_0 < \Delta_s$, $n_s = 0$), 有

$$\frac{du}{dt} = G_1 + G_2 \tag{5.4.33}$$

辐射为热噪音. 在阈值上 ($\Delta_0 > \Delta_s$), 有

$$n_s = \frac{1}{2gT_1}\left(\frac{\Delta_0}{\Delta_s} - 1\right)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{T_1}\left(\frac{\Delta_0}{\Delta_s} - 1\right)v + G_1 + G_2 \tag{5.4.34}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\Delta_0}{T_1\Delta_s}v - 2g\Delta_s u + \Gamma_p + \Gamma_s - G_2$$

设泵浦 $\frac{\Delta_0}{T_1}$ 为常数，由 (5.4.26) 式得出的谱将是白噪音谱，故称之为白泵浦. 下面就研究这种情形的激光辐射谱.

求 (5.4.34) 式的 Fourier 谱，用 “$\sim$” 来表示，得

$$\begin{aligned} i\Omega\tilde{u} &= \frac{1}{T_1}\left(\frac{\Delta_0}{\Delta_s} - 1\right)\tilde{v} + \tilde{G}_1 + \tilde{G}_2 \\ i\Omega\tilde{v} &= -\frac{\Delta_0}{T_1\Delta_s}\tilde{v} - 2g\Delta_s\tilde{u} + \tilde{\Gamma}_p + \tilde{\Gamma}_s - \tilde{G}_2 \end{aligned} \tag{5.4.35}$$

由此得

$$\tilde{u} = \frac{\left(i\Omega + \frac{\Delta_0}{T_1\Delta_s}\right)(\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2) + \frac{1}{T_1}\left(\frac{\Delta_0}{\Delta_s} - 1\right)(\tilde{\Gamma}_p + \tilde{\Gamma}_s - \tilde{G}_2)}{i\Omega\left(i\Omega + \frac{\Delta_0}{T_1\Delta_s}\right) + 2g\frac{\Delta_0 - \Delta_s}{T_1}} \tag{5.4.36}$$

当光泵浦很强时，$\frac{\Delta_s}{\Delta_0} \ll 1$, $\frac{\Omega T_1\Delta_s}{\Delta_0} \ll 1$,(5.4.35) 式可简化为

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{G}_1 + \tilde{\Gamma}_p + \tilde{\Gamma}_s}{2g\Delta_s + i\Omega} \tag{5.4.37}$$

$$(\tilde{u})^2 = \frac{\tilde{G}_1^2 + \tilde{\Gamma}_p^2 + \tilde{\Gamma}_s^2}{(2g\Delta_s)^2 + (\Omega)^2} \tag{5.4.38}$$

$\tilde{G}_1^2$ 等可用时间相关函数进行计算，应用 (5.4.24) 式，便得

$$< \tilde{G}^2 >= 2\int_{-\infty}^{\infty} < G(\tau)G(0) > e^{-i\Omega\tau}d\tau = \frac{2\omega}{Q}n \simeq \frac{2\omega}{Q}n_s \tag{5.4.39}$$

同样

$$< \tilde{\Gamma}_p^2 >= \frac{2\Delta_0}{T_1} = \frac{2\omega}{Q}n_s \quad , \qquad < \tilde{\Gamma}_s^2 >= \frac{2\Delta_s}{T_1} \tag{5.4.40}$$

由于 $\frac{\Delta_0}{\Delta_s} \gg 1$, 故 $< \tilde{\Gamma}_s^2 >$ 可略去. 由 (5.4.34) 式，可得

$$n_s \simeq \frac{1}{2gT_1}\frac{\Delta_0}{\Delta_s} = \frac{Q\Delta_0}{T_1\omega}, \quad < \tilde{\Gamma}_p^2 >=< \tilde{G}_1^2 >= \frac{2\omega}{Q}n_s \tag{5.4.41}$$

由 (5.4.40), (5.4.41) 式，则 (5.4.38) 式可写为

$$< \tilde{u}^2 >= \frac{\frac{4\omega}{Q}n_s}{\left(\frac{\omega}{Q}\right)^2 + \Omega^2} \tag{5.4.42}$$

若与文献 [11] 进行比较，$\tilde{u}$ 即光子数起伏的 Fourier 谱，用文献 [11] 中的记号表示，便是

$$\tilde{u} = (A_0 + \Delta)^2 - A_0^2 \simeq 2A_0\Delta A \quad , \qquad n_s = A_0^2 \tag{5.4.43}$$

由 (5.4.42) 和 (5.4.43) 式得

$$\Delta A^2 = \frac{\frac{\omega}{Q}}{\left(\frac{\omega}{Q}\right)^2 + \Omega^2} \tag{5.4.44}$$

当泵浦噪音可去掉，即 $\tilde{\Gamma}_p \simeq 0$, 得

$$\Delta A^2 = \frac{\frac{1}{2}\frac{\omega}{Q}}{\left(\frac{\omega}{2Q}\right)^2 + \Omega^2} \tag{5.4.45}$$

(5.4.44) 和 (5.4.45) 式分别与文献 [11] 中 (3.14) 和 (6.5) 式相当.

5.5 降低激光泵浦的量子噪音 [14,15]

影响激光振荡输出的光强起伏的因素很多，其中泵浦的量子噪音是很重要的因素之一. 过去对泵浦抽运主要是用 Poisson 分布来描述，近年来已认识到，如果采用规则抽运的话，可能实现噪音水平比 Poisson 分布为低的亚 Poisson 分布. 实际考察了各种抽运方案后，情况就变得更复杂. 在这一节，我们首先讨论规则泵浦抽运，然后讨论一般的泵浦抽运.

5.5.1 规则泵浦抽运

有很多文章 [10~12] 研究了如何减少泵浦量子噪音，从而降低输出光强的起伏. Golubev 与 Sokolov [13] 已经证明，有规泵浦抽运将导致光的亚 Possion 统计分布，这时光强的起伏将低于散粒噪音水平. 但在他们的分析中假定密度矩阵 u 是个小量，采用了 $\ln(1+u) \simeq u - u^2/2$ 近似. 这一节，我们将给出这一问题的准确解，不需假定密度矩阵 u 是个小量 [14].Golubev 与 Sokolov 的模型是这样的，设 t 时刻辐射场的密度矩阵为 $\rho(t)$, 在与处于激发态的单个原子作用 Δt 时后，密度矩阵发生了 $u\rho(t)$ 的变化，即

$$\rho(t + \Delta t) = (1 + u)\rho(t) \tag{5.5.1}$$

若在 Δt 时间内场与 n 个激发态原子作用，则有

$$\rho(t + \Delta t) = (1 + u)^n \rho(t) \tag{5.5.2}$$

我们假定了各个原子是在相继地与场相互作用. 若泵浦是无规的，即上述 n 不是确定的值，而是服从 Poisson 统计分布，在 Δt 时间内有 n 个原子被抽运到激发态的几率为 $e^{-r\Delta t}(r\Delta t)^n/n!$. 应将这几率乘 (5.5.2) 式右端，并对 n 求和，得

$$\rho(t + \Delta t) = \sum_n e^{-r\Delta t}\frac{(r\Delta t)^n}{n!}(1 + u)^n \rho(t) = e^{r\Delta t u}\rho(t) \tag{5.5.3}$$

对 t 进行微分，便得

$$\dot{\rho}(t) = ru\rho \tag{5.5.4}$$

若将辐射场模式在腔内的损耗包括进去，便得

$$\dot{\rho} = ru\rho + \Lambda\rho \tag{5.5.5}$$

若光泵浦抽运原子数不是按 Poisson 分布那样随机抽运，而是有规则的抽运，在 Δt 时抽运的原子数 n 为一确定的值就是抽运率 r 与抽运时间 Δt 之积，即 $n = r\Delta t$. 代入 (5.5.2) 式，并对 t 微分，便得

$$\dot{\rho} = r\ln(1+u)\rho + \Lambda\rho \tag{5.5.6}$$

在光子数表象，密度矩阵算子 $u\rho$ 与阻尼算子 $\Lambda\rho$ 可参照 (5.3.45) 式写为

$$\begin{aligned} u\rho_n &= \rho_{n-1} - \rho_n \\ \Lambda\rho_n &= C(-n\rho_n + (n+1)\rho_n) \end{aligned} \tag{5.5.7}$$

式中，$C = 2\nu/Q$, 即腔的损耗引起的线宽. 采用下降算子 $d\rho_n = \rho_{n-1}$, 则方程 (5.5.7) 的第一式可写为

$$u\rho_n = (d-1)\rho_n \tag{5.5.8}$$

重复地应用这一关系，便得

$$\begin{aligned} u^2\rho_n &= (d-1)^2\rho_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u^m\rho_m &= (d-1)^m\rho_m \end{aligned} \tag{5.5.9}$$

首先，我们暂不考虑腔的阻尼项，于是在光子表象中的 (5.5.6) 式可写为

$$\dot{\rho}_n = r\ln(1+u)\rho_n \tag{5.5.10}$$

我们引进 $\rho_n(t)$ 的生成函数

$$\sum_n z^n\rho_n(t) = G_0(z,t) \tag{5.5.11}$$

于是有

$$\begin{aligned} \sum_n z^n d\rho_n &= \sum_n z^n\rho_{n-1} = zG_0(z,t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_n z^n d^m\rho_n &= \sum_n z^n\rho_{n-m} = z^m G_0(z,t) \end{aligned} \tag{5.5.12}$$

将 (5.5.10) 式用 z^n 乘，并对 n 求和，得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}G_0(z,t) &= r\ln(1+u)\sum z^n\rho_n(t) \\ &= r\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(d-1)^m}{m}\sum_n z^n\rho_n(t) \\ &= r\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{(z-1)^m}{m}\sum_n z^n\rho_n(t) \\ &= r\ln zG_0(z,t) \end{aligned} \tag{5.5.13}$$

满足初值条件 $G_0(z,0) = 1$ 的 (5.5.13) 式的解为

$$G_0(z,t) = e^{r\ln zt} = z^{rt} \tag{5.5.14}$$

借助生成函数 $G_0(z,t)$, 可很容易地计算出平均光子数 $<n>_0$ 及光子数方差 $<(\Delta n)^2>_0=<n^2>_0-<n>_0^2$, 即

$$<n>_0=\frac{\partial G}{\partial z}|_{z=1}=rt \tag{5.5.15}$$

$$<n(n-1)>_0=\frac{\partial^2 G_0}{\partial z^2}|_{z=1}=rt(rt-1) \tag{5.5.16}$$

亦即光子数方差为

$$<(\Delta n)^2>_0=<n^2>_0-<n>_0^2=0 \tag{5.5.17}$$

实际上，更一般的关系为

$$<n^m>_0-<n>_0^m=0 \quad , \qquad n=1,2,3,\cdots \tag{5.5.18}$$

现在将腔的阻尼项 $\Lambda\rho$ 包括到 (5.5.6) 式中去，便得

$$\dot{\rho}_n=r\ln(1+u)\rho_n+C[-n\rho_n+(n+1)\rho_{n+1}] \tag{5.5.19}$$

引进生成函数 $G(z,t)$

$$G(z,t)=\sum_n z^n\rho_n(t) \tag{5.5.20}$$

同样可导出生成函数所满足的方程

$$\frac{\partial G}{\partial t}=\left[r\ln z+C(1-z)\frac{\partial}{\partial z}\right]G \tag{5.5.21}$$

或写成

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+C(z-1)\frac{\partial}{\partial z}\right]\ln G=r\ln z \tag{5.5.22}$$

故有

$$G(z_0,t)=G_0(z_0)\exp\left(\bar{n}\int_{z_0}^{z}\frac{\ln z}{z-1}dz\right) \tag{5.5.23}$$

式中， $z_0=1+(z-1)e^{-Ct}$, $\bar{n}=r/C$. 设在初始时 $t=0$, 光子数为 $<n>_0$, 很明显 $<n>_0=\dfrac{\partial G_0(z_0)}{\partial z_0}$, 且 $G_0(1)=1$, 则 $t>0$ 时的平均光子数为

$$\begin{aligned}<n> &= \frac{\partial G(z,t)}{\partial t}|_{z\to1}\\ &= \left[(\frac{\partial G_0(z_0)}{\partial z}+n(1-e^{-Ct})\frac{\ln z}{z-1}G_0(z_0)\exp\left(\bar{n}\int_{z_0}^{z}\frac{\ln z}{z-1}dz\right)\right]|_{z\to1}\\ &= <n>_0 e^{-Ct}+\bar{n}(1-e^{-Ct})\end{aligned} \tag{5.5.24}$$

$$\begin{aligned}<n(n-1)> &= \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}|_{z\to1}=\bar{n}(1-e^{-Ct})<n>+<n(n-1)>_0 e^{-2Ct}\\ &\quad +\bar{n}(1-e^{-Ct})<n>_0 e^{-Ct}-\frac{\bar{n}}{2}(1-e^{-Ct})\end{aligned} \tag{5.5.25}$$

方程 (5.5.25) 式可写为

$$\begin{aligned}<n^2>-<n>^2 &= (<n^2>_0-<n>_0^2)e^{-2Ct}\\ &\quad +(1-e^{-Ct})\left(\frac{\bar{n}}{2}+<n>_0 e^{-Ct}\right)\end{aligned} \tag{5.5.26}$$

当 $Ct \to \infty$ 时，方程 (5.5.26) 式给出 $<n^2> - <n>^2 \to \bar{n}/2 = \frac{<n>}{2}$. 这结果与 Golubev, Sokolov 求得的一致. 光子数方差比 Poisson 情形的光子数方差 $<n^2> - <n>^2 = <n>$ 下降了一半，这结果也表明 Golubev, Sokolov 采用的近似 $\ln(1+u) \simeq u - u^2/2$ 并未影响到光子数方差 $<(\Delta n)^2>$. 这是因为有等式

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\ln z}{z-1}\,|_{z\to 1} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z-1-\frac{(z-1)^2}{2}}{z-1}\right)|_{z\to 1} = -\frac{1}{2} \tag{5.5.27}$$

从推导中可看出，近似 $\ln(1+u) \simeq u - u^2/2$ 还未影响方差. 但这个近似会影响高阶方差，例如三阶方差. 这是因为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\ln z}{z-1}\,|_{z\to 1} \neq \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{z-1-\frac{(z-1)^2}{2}}{z-1}\right)|_{z\to 1} \tag{5.5.28}$$

经过复杂计算，当 $Ct \gg 1$ 情况下，我们得出

$$\Delta n = n - <n>$$

$$<(\Delta n)^3> = -\frac{<n>}{2} \qquad \text{(近似解)}$$

$$<(\Delta)^3> = -\frac{<n>}{2} + \frac{2<n>}{3} = \frac{<n>}{6} \qquad \text{(准确解)} \tag{5.5.29}$$

5.5.2 一般泵浦抽运 [15]

除上述规则泵浦抽运外，还有一般泵浦抽运. 这可由方程 (5.5.5) 式的直接推广得出. 方程 (5.5.5) 描述了泵浦抽运按 Poisson 分布再加上腔的阻尼项 $\Lambda\rho$. 方程 (5.5.5) 的推广是

$$\frac{d\rho_n}{dt} = \mu_0(u - \mu_1 u^2 + \mu_2 u^3 + \cdots)\rho_n + \Lambda\rho_n \tag{5.5.30}$$

前一项仍描述泵浦抽运，但不是按 Poisson 分布，我们称这样的过程为一般过程. 当 $\mu_1 = \mu_2 = \cdots = 0$ 时，一般过程便退化为熟知的 Markov 过程. 这时，若暂不讨论腔的阻尼项 $\Lambda\rho$, 则有

$$\frac{d\rho_n}{dt} = \mu_0 u\rho_n = \mu_0(\rho_{n-1} - \rho_n) \tag{5.5.31}$$

因为对于一般的 Markov 过程来说，在时间间隔 $t \to t + \Delta t$ 内，光子产生的几率 $P \propto \Delta t$, 但与 n 及 t 无关，即

$$P(n \to n+1) = \lambda\Delta t \tag{5.5.32}$$

故有

$$\rho_n(t+\Delta t) = \rho_n(t)(1 - \lambda\Delta t) + \rho_{n-1}\lambda\Delta t \tag{5.5.33}$$

当 $\Delta t \to 0$ 时，求极限，我们得

$$\frac{d\rho_n(t)}{dt} = \lambda[\rho_{n-1}(t) - \rho_n(t)] = \lambda u\rho_n(t) \tag{5.5.34}$$

(5.5.34) 式即 (5.5.31) 式.

对于一般过程，在 $t \sim t+\Delta t$ 时间内产生的光子数不仅与 Δt 有关，还与 n, t 有关，与系统曾经历过的历史 $\rho_{n-1}, \rho_{n-2}, \cdots$ 有关. 这就意味着 (5.5.34) 式中的 λ 不是常数. 比较 (5.5.34) 与 (5.5.30) 式，得

$$\lambda = \mu_0(1 - \mu_1 u + \mu_2 u^2 - \cdots) \tag{5.5.35}$$

求解 (5.5.30) 式，先去掉阻尼项 $\Lambda\rho_n$, 并注意到下降算子 u 可表示为通过下降算子 d 来表示，即 $u = d - 1$, 于是有

$$\frac{d\rho_n(t)}{dt} = \mu_0[(d-1) - \mu_1(d-1)^2 + \mu_2(d-1)^3 - \cdots]\rho_n(t) \tag{5.5.36}$$

同样引进生成函数

$$G_0(z,t) = \sum_n z^n \rho_n(t) \tag{5.5.37}$$

像上面一样得出生成函数的微分方程

$$\frac{\partial G_0(z,t)}{\partial t} = \mu_0[(z-1) - \mu_1(z-1)^2 + \cdots]G_0(z,t)$$

$$G_0(z,t) = \exp\left\{\int_0^t \mu_0[(z-1) - \mu_1(z-1)^2 + \cdots]dt\right\} \tag{5.5.38}$$

该式表明在 $t=0$ 时， $G_0(z,0)=1$, 参照 (5.5.37) 式，即 $\rho_0(0)=1$, $\rho_n(0)=0$, $n \geq 1$. 借助于生成函数，可求出

$$< n >_0 = \frac{\partial G_0}{\partial z}|_{z\to 1} = \int_0^t \mu_0(t)dt \tag{5.5.39}$$

$$< n(n-1) >_0 = \frac{\partial^2 G_0}{\partial z^2}|_{z\to 1} = \left(\int_0^t \mu_0(t)dt\right)^2 - 2\int_0^t \mu_0\mu_1 dt \tag{5.5.40}$$

方差为

$$< (\Delta n)^2 > = < n^2 >_0 - < n >_0^2 = \int_0^t \mu_0(1-2\mu_1)dt \geq 0 \tag{5.5.41}$$

由此得

$$\mu_0(1-2\mu_1) \geq 0$$

对 $\mu_0 > 0$ 的情形，我们有

$$\mu_1 \leq \frac{1}{2} \tag{5.5.42}$$

现将腔的阻尼 $\Lambda\rho_n = C[-n\rho_n + (n+1)\rho_{n+1}]n$ 代到 (5.5.36) 式中去，便得

$$\frac{d\rho_n}{dt} = \mu_0(u - \mu_1 u^2 + \mu_2 u^3 - \cdots)\rho_n + C[-n\rho_n + (n+1)\rho_{n+1}] \tag{5.5.43}$$

式中， C 表示谐振腔的线宽. 对应于 (5.5.43) 式的生成函数 $G(z,t)$ 满足的微分方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + C(z-1)\frac{\partial}{\partial z}\right]G(z,t) = \mu_0[(z-1) - \mu_1(z-1)^2 + \mu_2(z-1)^3 - \cdots]G(z,t) \tag{5.5.44}$$

上式的解可直接写为

$$G(z,t)=G_0(z,0)\exp\left\{\int_{z_0}^{z}[a_0-a_1(z-1)+a_2(z-1)^2-\cdots]dz\right\} \tag{5.5.45}$$

式中

$$\begin{aligned}
&z_0=1+(z-1)e^{-Ct}\\
&a_0=\int_{-\infty}^{t}e^{C(t-t')}\mu_0dt'=\frac{\mu_0}{C}\\
&a_1=\int_{-\infty}^{t}e^{C(t-t')}\mu_0\mu_1dt'=\frac{\mu_0\mu_1}{C}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_m=\int_{-\infty}^{t}e^{C(t-t')}\mu_0\mu_mdt'=\frac{\mu_0\mu_m}{C}
\end{aligned} \tag{5.5.46}$$

令

$$a_0=\frac{\mu_0}{C}=\bar{n},\quad a_1=\frac{\mu_0\mu_1}{C}=\bar{n}\mu_1\ ,\quad \cdots,\quad a_m=\frac{\mu_0\mu_m}{C}=\bar{n}\mu_m \tag{5.5.47}$$

代入 (5.5.45) 式便得

$$\begin{aligned}
&G(z,t)=G_0(z_0)\exp\left[\bar{n}\int_{z_0}^{z}\mu(z)dz\right]\\
&\mu(z)=1-\mu_1(z-1)+\mu_2(z-1)^2\cdots
\end{aligned} \tag{5.5.48}$$

由这式子可计算出平均值

$$<n>=\frac{\partial G}{\partial z}|_{z\to1}=<n>_0 e^{-Ct}+\bar{n}(1-e^{-Ct}) \tag{5.5.49}$$

$$\begin{aligned}
<n(n-1)>\ \ =\ \ &\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}|_{z\to1}=\bar{n}(1-e^{-Ct})(<n>-\mu_1)\\
&+<n(n-1)>_0 e^{-2Ct}+\bar{n}(1-e^{-Ct})<n>_0 e^{-Ct}
\end{aligned}$$

及方差

$$\begin{aligned}
&<(\Delta n)^2>=<n^2>-<n>^2\\
&=[<n^2>_0-<n>_0^2]e^{-2Ct}+(1-e^{-Ct})[\bar{n}(1-\mu_1)+<n>_0 e^{-Ct}]
\end{aligned} \tag{5.5.50}$$

当 $Ct\gg1$ 时，由 (5.5.49), (5.5.50) 式得

$$\begin{aligned}
&<n>=\bar{n}\\
&<(\Delta n)^2>=<n^2>-<n>^2=\bar{n}(1-\mu_1)
\end{aligned} \tag{5.5.51}$$

该式表明考虑腔的阻尼后，方差 $<(\Delta n)^2>$ 将比 Poisson 分布的方差降低一因子 $(1-\mu_1)$. 如果将腔的阻尼去掉，(5.5.41) 式表示的方差比 Poisson 分布方差降低一因子 $(1-2\mu)$, 即

$$<(\Delta n)^2>=\bar{n}(1-2\mu) \tag{5.5.52}$$

仔细研究激光振荡的全量子理论，可看出对激光输出的噪音作出贡献的主要有泵浦噪音、自发辐射及真空起伏. 后者通过腔的阻尼项 $\Lambda\rho_n$ 体现出来，而泵浦噪音则由 $\mu(z)$

来体现. 我们上面的做法，实际上是先处理 $\mu(z)$, 然后再加上空起伏 $\Lambda\rho_n$, 并引进参数 C. 对于原子与辐射场系统，若原子被抽运到激发态，有一起伏 $\Delta m = m- < m >$, 则必然反映到产生的光子数起伏 Δn 中来，故有

$$\Delta n = \Delta m \quad , \qquad < (\Delta n)^2 >=< (\Delta m)^2 > \tag{5.5.53}$$

以三能级系统为例 (见图 5.10), 跃迁到激发态的几率 p 与由激发态回到基态的几率 q 之比为

$$\frac{p}{q} = \frac{\rho_{13}B_{13} + \rho_{12}B_{12}}{A_{12} + \rho_{12}B_{21}} = \frac{N_2}{N_1} \tag{5.5.54}$$

故有

$$p = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \quad , \qquad q = \frac{N_1}{N_1 + N_2} \tag{5.5.55}$$

在 $n = (N_1 + N_2)$ 个原子中，有 m 个原子处于激发态， $n - m$ 个处于基态的几率服从二项式分布，其表达式为

$$p_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m} \tag{5.5.56}$$

由此给出

$$\begin{aligned} &< m >= np \\ &< m(m-1) >= n(n-1)p^2 \\ &< (\Delta n)^2 >=< m > (1-p) \\ &< m(m-1)(m-2) >= n(n-1)(n-2)p^3 \end{aligned} \tag{5.5.57}$$

将上面结果分别与 $\frac{\partial G}{\partial t}|_{z\to1}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}|_{z\to1}$, $\frac{\partial^3 G}{\partial t^3}|_{z\to1}, \cdots$ 相对应,便能定出参数 $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots$. 为了求方差，比较 $< (\Delta m)^2 >=< m > (1-p)$ 与 (5.5.52) 式，得 $\mu_1 = p/2$. 对于三能级系统来说，当处于阈值以下时，因 $N_2 \ll (N_1 + N_2)$, $\mu_1 = p/2 \ll 1$, 故 $< (\Delta m)^2 >$ 接近于 Poisson 分布 $< m >$. 但在阈值以上时，我们有 $N_2 \geq N_1$, $\mu_1 = p/2 \geq 1/4$, 故有光子噪音下降因子 $1 - \mu$ 为 $1/2 < 1 - \mu \leq 3/4$(包含真空起伏). 类似地对于图 5.11 所示的四能级系统， $N_4 \simeq 0$, $p = \frac{N_3}{N_1 + N_3} \ll 1, q = \frac{N_1}{N_1 + N_3} \simeq 1$, 故基本上是 Poisson 分布.

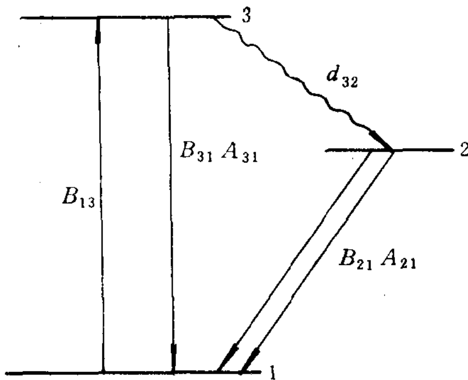


图 5.10 三能级系统

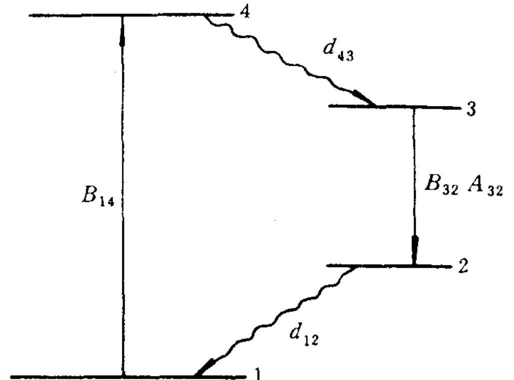


图 5.11 四能级系统

第六章 辐射的相干统计性质

6.1 平衡辐射的统计热力学

我们将平衡辐射分为热平衡辐射与非热平衡辐射．热平衡辐射即黑体辐射，满足 Planck 分布；非热平衡辐射不满足 Planck 分布，但仍为定态，即长时间不发生变化的状态．从这个意义来说，激光就是一种非热平衡辐射．因为它一方面不满足 Planck 分布，另一方面又处于长时间不变化的定态之中．

黑体辐射的研究 [1] 不仅使得 Planck 假定构成黑体辐射的简谐振子的能量取不连续的值 $\mathcal{E}_n = n\varepsilon_0$, Einstein 作出光量子的假设，而且最后导致 Bose 创立一种区别于经典 Maxwell-Boltzman 统计的新的统计，即 Bose-Einstein 量子统计． Planck 遵循 Kirchhoff 定律“封闭黑体内热平衡辐射的性质，仅与黑体的温度有关，与黑体壁的性质无关”，致力于寻求与黑体保持热平衡的辐射能密度 $u(\omega,T)$ 的函数关系．在这以前已经有了适用于长波辐射的 Rayleigh 公式

$$u(\omega,T)d\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}kTd\omega \tag{6.1.1}$$

以及仅适用于短波辐射的 Wein 公式

$$u(\omega,T)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}e^{-\hbar\omega^3/kT}d\omega \tag{6.1.2}$$

通过热力学推论与预测 [1],Planck 找到了既适于长波辐射又适于短波辐射的经验公式

$$u(\omega,T)d\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\frac{d\omega}{e^{\hbar\omega/kT}-1} \tag{6.1.3}$$

但如何从理论上导出 (6.1.3) 式呢？ Planck 采取了如下的步骤．按统计力学，系统处于某一状态的几率 P 与系统的熵 S 之间的 Boltzman 关系为

$$S = k\ln P \tag{6.1.4}$$

式中， k 为 Boltzman 常量．为求出 P, Planck 假定在给定频率 ω 后， n 个相互独立的简谐振子的总能量 $\mathcal{E}_n$ 和熵 S_n 将分别是

$$\mathcal{E}_n = n\bar{\varepsilon} \quad , \quad S_n = ns \tag{6.1.5}$$

式中， $\bar{\varepsilon}$ 为每一简谐振子的平均能量， s 为每一简谐振子的熵．又设总能量 $\mathcal{E}_n$ 只能取某一最小能量 ε_0 的整数倍，而 ε_0 又与频率 ω 成正比，即

$$\mathcal{E}_n = N\varepsilon_0 = N\hbar\omega \tag{6.1.6}$$

于是将 N 份能量 ε_0 在 n 个简谐振子中进行分配的方法数，即系统的几率 P 为

$$P = \frac{(N+n-1)!}{N!(n-1)!} \tag{6.1.7}$$

应用 Stirling 公式 $m! \simeq m^m e^{-m}$, 由 (6.1.4) 和 (6.1.7) 式，便得

$$S = k\ln\frac{(N+n-1)!}{N!(n-1)!} \simeq k[(N+n-1)\ln(N+n-1) - N\ln N - (n-1)\ln(n-1)] \quad (6.1.8)$$

$$\delta S = k[\ln(N+n-1) - \ln N]\delta N = k\ln\left(\frac{N+n-1}{N}\right)\frac{\delta\mathcal{E}_n}{\hbar\omega} \quad (6.1.9)$$

按热力学关系 $\delta S = \dfrac{\delta\mathcal{E}_n}{T}$, 从 (6.1.9) 式便可求出

$$\frac{N}{n} \simeq \frac{N}{n-1} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT)-1} \quad (6.1.10)$$

再由 (6.1.5) 和 (6.1.6) 式即得

$$\bar{\varepsilon} = \frac{N\hbar\omega}{n} = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1} \quad (6.1.11)$$

用频率在 $\omega \sim \omega + d\omega$ 间辐射场的模数 $\dfrac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$ 乘 $\bar{\varepsilon}$ 的表达式 (6.1.11), 便得辐射场能密度 $u(\omega,T)d\omega$[见公式 (6.1.3)], 这就是 1900 年 Planck 给出的黑体辐射能密度推导. 推导中除用到 Boltzman 关系 (6.1.4) 外, 主要给出了计算 P 的方法以及用简谐振子的平均能量 $\bar{\varepsilon}$ 作为每一模式的平均辐射能, 代替 (6.1.1) 式中按能量均分定理确定的每一辐射模式具有的能量 kT. 将辐射场用简谐振子来描写, 从经典场满足的波动方程来看是合理的 [1]. 但经典场的振幅以及场能可连续取任意值, 而简谐振子的能量只能取 ε_0 的整数倍, 即 $\mathcal{E}_n = N\hbar\omega$, 这就是对经典场量子化成了量子场.

一般教科书推导 Planck 公式 [2] 并不采用上述方式, 而是设简谐振子能量是量子化的, 即 $\mathcal{E}_n = n\hbar\omega$, 处于激发态 $\mathcal{E}_n$ 的几率 P_n 按 Boltzman 分布 ($\propto e^{-n\hbar\omega/kT}$), 规一化后为

$$P_n = \frac{e^{-n\hbar\omega/kT}}{\sum_j e^{-j\hbar\omega/kT}} = e^{-n\hbar\omega/kT}(1-e^{-\hbar\omega/kT}) \quad (6.1.12)$$

简谐振子的平均能量为

$$\bar{\varepsilon} = \sum n\hbar\omega P_n = \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/kT)-1} \quad (6.1.13)$$

此即 (6.1.11) 式, 这样求 $\bar{\varepsilon}$ 较为直接, 不需用近似的 Stirling 公式.

将辐射场用简谐振子来描写是波动图象, 但并非经典场的波动, 而是量子化了的. 能否将量子概念进一步发展一下, 认为辐射场本身就是能量 $\varepsilon = \hbar\omega$ 的光量子流或光子流呢? Einstein 光量子学说就是这样认为的, 光子具有能量 $\hbar\omega$、动量 $\hbar\omega/c$. 这样不仅解释了他当时要解释的光电效应, 而且后来对光与物质相互作用的认识也是一很大的推进. 主要表现在他推导 Planck 黑体辐射公式中引进的受激辐射与自发辐射系数 A, B 上. 考虑到与频率为 $\hbar\omega$ 的光子相互作用的原子的两个能态, 即高能态 2 与低能态 1, 由高能态向低能态跃迁便辐射出光子 $\hbar\omega$, 并满足能量守衡关系 $E_2 - E_1 = \hbar\omega$. 由低能态向高能态跃迁便吸收光子 $\hbar\omega$. 由高能态向低能态跃迁的几率为

$$A_{21} + B_{21}u(\omega,T) \quad (6.1.14)$$

A_{21} 为自发辐射系数, 即没有辐射场情况下自发能态跃迁的几率. B_{21} 为受激辐射系数, $B_{21}u(\omega,T)$ 为受激辐射跃迁几率, 即在辐射场作用下, 原子由高能态向低能态跃迁

的几率. 由低能态向高能态跃迁的吸收率为

$$B_{12}u(\omega,T) \tag{6.1.15}$$

受激辐射与吸收均正比于辐射场的能密度 $u(\omega,T)$, 而自发辐射与 $u(\omega,T)$ 无关. 又设处于高能态与低能态的原子数分别为 N_2, N_1, 则总的辐射率为 $[A_{21}+B_{21}u(\omega,T)]N_2$, 总的吸收率为 $B_{12}u(\omega,T)N_1$. 在热平衡情况下，辐射率与吸收率应相等，即

$$[A_{21}+B_{21}u(\omega,T)]N_2 = B_{12}u(\omega,T)N_1 \tag{6.1.16}$$

又设处于高能态原子数 N_2 与处于低能态的原子数 N_1 满足 Boltzman 分布

$$\frac{N_2}{N_1}=\frac{g_2\exp(-E_2/kT)}{g_1\exp(-E_1/kT)}=\frac{g_2}{g_1}\exp(-\hbar\omega/kT) \tag{6.1.17}$$

式中， g_1, g_2 分别为能级数 2, 1 的简并度. 由 (6.1.16) 和 (6.1.17) 式，并取定 $\dfrac{A_{21}}{B_{21}}=\dfrac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}$, $\dfrac{g_1B_{12}}{g_2B_{21}}=1$, 便得

$$u(\omega,T)=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT)-1} \tag{6.1.18}$$

上面对 Planck 公式推导很直观，除了引进 A, B 外，还用了 Bohr 关于原子在能级间跃迁与辐射光子的最基本关系 $E_2-E_1=\hbar\omega$. 比较 Planck 公式两种推导方法，一种是由辐射场的简谐振子模型出发；而另一种则是由原子在能级间跃迁辐射或吸收光子模型出发.

还可进一步设想是否既不需简谐振子模型，也不需考虑原子在能态跃迁，而是直接从光子本身服从的统计规律出发也能得出 Planck 分布呢？ 1924 年， Bose 做的 Planck 分布推导就是这样的. 首先将相空间分为许多体积为 $(2\pi\hbar)^3$ 的单胞，并考虑到光的两个独立的偏振分量，于是在单位体积内，频率在 $\omega\sim\omega+d\omega$ 范围内，有 $zd\omega=\dfrac{\omega^2}{\pi^2c^3}d\omega$ 单胞. 可见，每一单胞就是一个独立的模式. 设在 $\omega\sim\omega+d\omega$ 频率范围内有 N 个光子，将这 N 个光子在 $zd\omega$ 个单胞内分配，求不同的分配数. Bose 在计算不同的分配数时，引进光子不可分辨的概念. 设没有光子的单胞数为 n_0, 有一个光子的单胞数为 n_1, 有两个光子单胞数为 $n_2,\cdots$, 当 n_0, n_1, $n_2,\cdots$ 给定后，分配也就定了. 在 n_i 个单胞内光子的交换不算作新的分配；又设每一种分配有相同的几率，于是总的几率为

$$P=\prod_{d\omega}\frac{z!}{\prod n_i!}\quad,\quad z=\sum n_i \tag{6.1.19}$$

$$E=\sum N\hbar\omega\quad,\quad N=\sum in_i \tag{6.1.20}$$

由 $\delta P=\delta z=\delta E=0$, 我们有

$$\begin{aligned}&\sum(\ln z-\ln n_i)\delta n_i=0\\&\sum\delta n_i=0\quad,\quad\sum\hbar\omega i\delta n_i=0\end{aligned} \tag{6.1.21}$$

应用未知乘子法及规一化条件 $\sum\dfrac{n_i}{z}=1$, 得

$$\frac{n_i}{z}=e^{-i\beta\hbar\omega}(1-e^{-\beta\hbar\omega}) \tag{6.1.22}$$

$$u(\omega,T)=N\hbar\omega=\sum in_i\hbar\omega=z\hbar\omega(e^{\beta\hbar\omega}-1)^{-1} \tag{6.1.23}$$

(6.1.22) 式即前面导出的 (6.1.12) 式. 将 $z=\dfrac{\omega^2}{\pi^2c^3}$ 代入 (6.1.23) 式，便得 (6.1.18) 式，$\beta=1/kT$.

利用 (6.1.12) 式，还可求出光子的简并度 $<n>$ 与光子的均方起伏 $<\Delta n^2>$：

$$<n>=\sum nP_n=1/[\exp(\beta\hbar\omega)-1] \tag{6.1.24}$$

$$<\Delta n^2>=\sum(n-<n>)^2P_n=\sum(n^2-<n>^2)P_n=<n>+<n>^2 \tag{6.1.25}$$

(6.1.25) 式前一项具有粒子起伏的性质，$<(n-\bar{n})^2>=\bar{n}$; 后一项则表现出波动干涉引起的涨落. 因波动干涉使得振幅涨落正比于振幅的平方和，因此涨落就与 $<n>^2$ 成正比. 上面就是依据光子服从的 Bose 统计 (6.1.19) 式推导 Planck 公式的过程. 这个推导，除 (6.1.19) 式外，主要就是 (6.1.21) 式和未知乘子法. 最后求得在热平衡情况下单胞内具有 i 光子的几率 $\rho_i=\dfrac{n_i}{z}=e^{-i\beta\hbar\omega}(1-e^{-\beta\hbar\omega})$, 即 (6.1.22) 式. 如果不是热平衡，(6.1.21) ~ (6.1.22) 式将不能用. 但 (6.1.19) 和 (6.1.20) 式总是成立的. 系统的熵 S 与内能 U 可通过 ρ_i 表示为

$$S=klnP\simeq k\sum_{d\omega}(z\ln z-\sum n_i\ln n_i)=-k\sum_{d\omega}z\sum\rho_i\ln\rho_i=kzsd\omega \tag{6.1.26}$$

$$U=zd\omega\hbar\omega\sum i\rho_i=zd\omega\hbar\omega u$$

式中，s, u 为无量纲的熵密度与内能密度

$$\begin{aligned} u&=<n>=\textstyle\sum i\rho_i \\ s&=-\textstyle\sum\rho_i\ln\rho_i \end{aligned} \tag{6.1.27}$$

取 S, V 为独立变量，U 为 S, V 的函数，则由热力学关系给出平衡辐射的温度 T 与压力 P 的计算公式

$$dU=TdS-pdV \quad , \quad T=(\frac{\partial U}{\partial S})_V \quad , \quad p=-(\frac{\partial U}{\partial V})_S \tag{6.1.28}$$

激光作为一种非热平衡辐射，它与热平衡辐射的关系，以及与各种参量的关系在以后章节中讨论. 关于从热力学关系比较热平衡辐射与非热平衡辐射，参见文献 [3].

6.2 光的相干性

自从 Dirac 提出“光子自干涉”著名论断 [4] 以来，光的干涉，特别是弱光干涉，一直是一个带有基本意义的理论与实践问题. 为了方便，现分成若干问题讨论.

6.2.1 相干条件

经典光学中，当说到两束光叠加产生干涉条纹时，总要求叠加的两束光为同源相干光. 这是因为经典光学中的干涉测量是对干涉场进行长时间的观察，相当于对干涉场作长时间的统计平均. 实际上，被叠加的两束光，不论同源与否，只要观察时间 T 短于两束光频宽 $\Delta\nu$ 的倒数，即 $T<(\Delta\nu)^{-1}$, 就产生干涉条纹. 对 T 时间求平均后的光强 $\bar{I}$ 与被叠加的两束光的强度 I_1, I_2, 频率 ω_1, ω_2 及相位 φ_1, φ_2 间的关系为

$$
\begin{aligned}
\bar{I} &= \frac{1}{T}\int_t^{t+T}[E_1(t') + E_2(t'+\theta x/c)]^2 dt' \\
&= \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\Big\{I_1(t') + I_2(t') + 2\sqrt{I_1(t')I_2(t')} \\
&\quad \times\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t' - \frac{\omega_2\theta x}{c} + \varphi_1(t') - \varphi_2(t')\right]\Big\} dt'
\end{aligned}
\tag{6.2.1}
$$

当 T 很大时，对时间求积，就是对系综求平均. 如果是不同源的光，被积函数中表现双光束干涉的位相差 $\varphi_1(t')-\varphi_2(t')$ 的变化是无规的，求平均后其值为 0. 如果是同源的相干光，则有

$$
\omega_2 = \omega_1 \quad , \quad \varphi_2(t') = \varphi_1(t') \tag{6.2.2}
$$

干涉项的位相为定数 $\omega_2\theta x/c$, 与时间无关，对时间求平均后不为 0. 但当 T 不是很大，对 t 求平均，将不经历系统的各态，而是对部分状态求平均. 在这部分状态的 $\varphi_2(t')-\varphi_1(t')$ 变化不大的情况下， (6.2.1) 式变为

$$
\begin{aligned}
\bar{I} \; &= \; I_1(t) + I_2(t) + 2\sqrt{I_1(t)I_2(t)}\frac{\sin(\omega_2-\omega_1)T/2}{(\omega_2-\omega_1)T/2} \\
&\quad \times\cos\left[(\omega_2-\omega_1)(t+T/2) + \frac{\omega_2\theta x}{c} + \varphi_2(t) - \varphi_1(t)\right]
\end{aligned}
\tag{6.2.3}
$$

由 (6.2.3) 式得出，只要 $T \le \dfrac{2\pi}{|\omega_2-\omega_1|} = \dfrac{1}{|\nu_2-\nu_1|}$, 即使是非同源的两束光干涉，也能看到干涉条纹. 事实上， Forrester 等 [5] 已观察到非相干光源发射的 Zeeman 双线在光阴极表面上产生的拍频调制发射信号，虽然信噪比很低 (约 3×5^{-5}). 能观察到干涉条纹的另一条件，即为在 $T(<(\Delta\nu)^{-1})$ 时间内落到探测面上的光子数应尽可能地多，可表示为

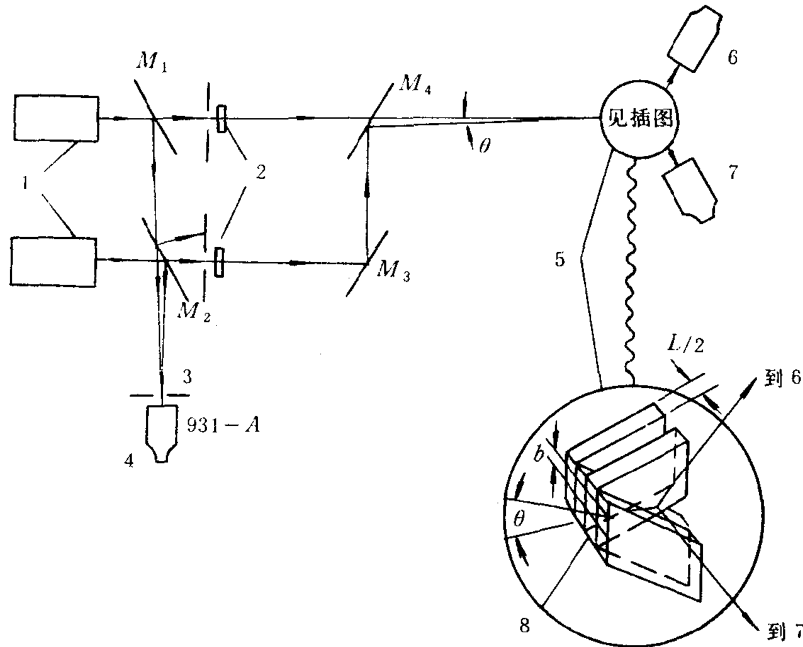


图 6.1　弱光干涉探测示意图

1　激光器，　2　减光片，　3　狭缝，　4　监测光电管

M_1, M_2　分光片，　5　干涉探测器，　6 、7　光电探测器

(参照 Mandel 文献 [9])

光子简并度 $<n> \geqslant 1$. 一般的热辐射光源 $<n> \simeq 10^{-3}$, 要观察到非同源光的干涉或拍频是很困难的. 激光的光子简并度 $<n> \gg 1$, 很有利于观察非同源光的相干效应. 事实上, Javan,Mandel 等分别观察到独立的激光束的干涉与两台独立的激光器输出产生的空间干涉 [6, 7]. 两束独立的红宝石激光的拍频也被观察到 [8].

用两台独立的 He-Ne 激光器进行的弱光干涉实验也是很有意思的 [8, 9]. 图 6.1 给出实验装置简图. 源与探测器之间的渡越时间为 3ns, 而光子的间隔时间约为 150 ns. 粗略地说, 当一个光子被吸收后才会发射第二个光子. 进行一次观察所需的时间为 20 μs. 探测器的量子效率为 7%, 故进行一次观察平均能接收到 10 个光子. 两台独立的 He-Ne 单模激光器输出激光分别通过半透及全反射镜 M_3, M_4, 以互相倾斜成 θ 的角度射到干涉探测器的接收表面上. 因为每次观测到约 10 个光子, 只能用相关接收器进行判别. 接收面用一叠厚为 $L/2$(约等于干涉条纹间隔的一半, $l/2$) 的玻璃片组成, 其中 1, 3, 5 片的光进入探测器 6; 2, 4, 6 片上的光进入探测器 7. 将两探测器上测得的光子数起伏 Δn_1, Δn_2 作相关处理, 其相关系数 r 为

$$r = \frac{<\Delta n_1 \Delta n_2>}{\sqrt{<\Delta n_1^2><\Delta n_2^2>}} \tag{6.2.4}$$

图 6.2 给出 r 与 L/l 的曲线. 由图看出, 当 $L \approx l$ 时, 相关系数 r 为负, 绝对值最大. 这表明一组玻璃片接收到亮纹, 而另一组玻璃片接收到暗纹. $L \ll l$ 时, r 为正, 这表明一个亮纹覆盖在几个玻璃片上, 两个探测器上给出相同的光子计数, 故相关系数为正. 若是 $L \gg l$, 即一个玻璃片上接收到很多干涉条纹, 故相关为 0. 由这实验得出, 不同激光器的输出, 如果不是对系综求平均, 会相干而产生干涉条纹的.

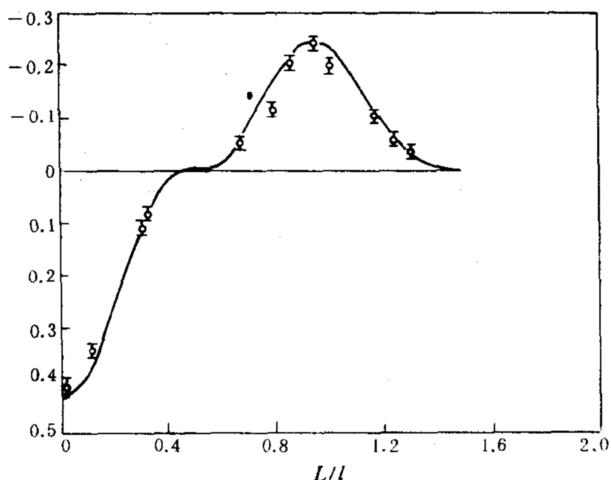


图 6.2 相关系数 r 对 L/l 的变化曲线. 实验中 $\Delta\nu T \simeq 0.6$ (参照文献 [9])

6.2.2 "光子自干涉"与"同态光子干涉"

"光子自干涉"著名论断表明, 每一个光子只能自己发生干涉, 不同光子间的干涉是从来不会发生的 [4]. 文献 [8] 在引用这一论断时, 又补充道: "过去人们在引用这一论断时, 往往误认为不同源的光子是不会相干的". 那么由实验证明的不同激光器发出的光子是可以相干的, 可以产生干涉条纹的, 这也属于"光子自己发生干涉", 而不是"不同光子间的干涉". 这就要求"两台不同的激光器会发出同一光子实现自干涉", 这明显遇到观念上的困难. 为克服这一困难, 将"光子自干涉"理解为包括"同态光子干涉"在内是必要的. 事实上, 同一状态的光子是不可区分的全同粒子. 不论是来自同一发射源, 还是来自不同的发射源, 只要进入同一量子状态后, 就是相干的. 不同光源产生的频率为 ν_1, ν_2 的两束光, 在 $\varphi_2(t') - \varphi_1(t')$ 变化不大的情形下, 可通过限制观察时间 T,

使 $T < (\Delta\nu)^{-1}$, 即 $T\Delta\nu < 1$, 便处于同一量子状态，达到相干，输出相干的拍频信号. 其它的空间相干实验也都是造成同一量子状态的相干条件. 两台独立的红宝石激光器输出的空间相干实验，两台独立的 He-Ne 激光的弱光干涉实验均表明了同一状态的光子是相干的，均能在“同态光子相干涉”意义下得到理解.

6.3 光 探 测 [10]

一个理想的光探测器对描述光强变化和光强空间分布来说是重要的. 这理想的光探测器从微观意义来说可理解为一线度比波长小得多的原子，在受到光子激发后，由基态跃迁到连续态，有很宽的频率响应. 光与原子的电偶极相互作用能可表示为

$$H_I = -\vec{\mu} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) \tag{6.3.1}$$

式中， $\vec{E}(\vec{r}, t)$ 为电场， $\vec{\mu}$ 为原子的偶极矩. 当测到一个光子后，原子由基态跃迁到激发态，而场也发生了变化，即由初态 i 到终态 f. H_I 的矩阵元可写为

$$- < f|\vec{E}(\vec{r}, t)|i > \cdot < e|\vec{\mu}|g > \tag{6.3.2}$$

为方便计，略去矢量记号，将 $\vec{E}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\mu}$ 写作 $E(r, t)\mu$, 将电场 $E(r, t)$ 写为

$$E(r, t) = E^+(\vec{r}, t) + E^-(\vec{r}, t) \tag{6.3.3}$$

$E^+(\vec{r}, t)$, $E^-(\vec{r}, t)$ 分别为正频项与负频项，与 $e^{-i\omega t}$, $e^{i\omega t}$ 成正比. 考虑到能量守恒关系，场强 $E(r, t)$ 中频率 ω 满足 $\hbar\omega \simeq E_e - E_g$ 的分量的贡献是主要的，故 (6.3.2) 式可近似为 $-\mu < f|E^+(r, t)|i >$. 光吸收的跃迁几率为 $-\mu < f|E^+(\vec{r}, t)|i >$ 模量的平方，并对各种可能的末态 f 求和：

$$\begin{aligned} \mu^2 \sum_f | < f|E^+(\vec{r}, t)|i > |^2 &= \mu^2 \sum_f < i|E^-(\vec{r}, t)|f >< f|E^+(\vec{r}, t)|i > \\ &= \mu^2 < i|E^-(\vec{r}, t)E^+(\vec{r}, t)|i > \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

(6.3.4) 式是考虑到各种可能的末态 f 构成一完备的体系 $\sum_f |f >< f| = 1$ 而得出的. 一般来说，光场的初态也不是确切知道的，故还要对初态 i 求统计平均后才是理想探测器的输出，应正比于光强

$$I(r, t) = \mathrm{tr}[\rho E^-(\vec{r}, t)E^+(\vec{r}, t)] \tag{6.3.5}$$

参照 (6.3.4) 式，除一常数因子 μ^2 外，由 (6.3.5) 式定义的光强 $I(r, t)$ 便可看作理想探测器的测量值.

6.4 场的相关函数与场的相干性

理想探测器测量的光场 $I(\vec{r}, t)$ 即光场正频与负频部分的自相关. 将 $(\vec{r}, t)$ 记为 x, 则自相关函数 $G(x, x)$ 可写为

$$I(x) = G(x, x) = \mathrm{tr}\{\rho E^-(x)E^+(x)\} \tag{6.4.1}$$

可是在杨氏干涉实验中，要测定的光强来源于双缝 x_1 与 x_2 处的光振动的叠加. 故有

$$
\begin{aligned}
I &= \mathrm{tr}\{\rho(E^-(x_1)+E^-(x_2))(E^+(x_1)+E^+(x_2))\} \\
&= \mathrm{tr}\{\rho E^-(x_1)E^+(x_1)\} \\
&\quad +\mathrm{tr}\{\rho E^-(x_1)E^+(x_2)\}+\mathrm{tr}\{\rho E^-(x_2)E^+(x_1)\}+\mathrm{tr}\{\rho E^-(x_2)E^+(x_2)\} \\
&= G(x_1,x_1)+G(x_1,x_2)+G(x_2,x_1)+G(x_2,x_2)
\end{aligned} \tag{6.4.2}
$$

参照 (6.4.1) 式定义，第一、四项为 x_1, x_2 点的自相关函数，即 x_1, x_2 点的光强 $I(x_1)$, $I(x_2)$ 恒大于 0, 且与场强 $E(x_1)$, $E(x_2)$ 的位相无关；第二、三项为 (x_1,x_2) 的互相关函数

$$
G(x_i,x_j)=\mathrm{tr}\{\rho E^-(x_i)E^+(x_j)\} \tag{6.4.3}
$$

$G(x_1,x_2)$, $G(x_2,x_1)$ 为共轭复数. $G(x_1,x_2)+G(x_2,x_1)$ 为实数，可为正或负，依赖于叠加的场 $E(x_1)$,$E(x_2)$ 间的相位差. 用光学干涉的术语来说，当位相差为 $2n\pi$ 时，$G(x_1,x_2)+G(x_2,x_1)$ 为正的极大，$I=I_{\max}$. 当 $E(x_1)$ 与 $E(x_2)$ 的位相差为 $(2n+1)\pi$ 时，$G(x_1,x_2)+G(x_2,x_1)$ 为负的极小，$I=I_{\min}$. 用 $I_{\max}$,$I_{\min}$ 作条纹能见度 V

$$
V=\frac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}} \tag{6.4.4}
$$

若

$$
|G(x_1,x_2)|=\sqrt{G(x_1,x_1)G(x_2,x_2)} \tag{6.4.5}
$$

则称为相干场. 这时

$$
\begin{aligned}
G(x_1,x_2) &= \sqrt{G(x_1,x_1)G(x_2,x_2)}\ e^{i\phi} \\
G(x_2,x_1) &= \sqrt{G(x_1,x_1)G(x_2,x_2)}\ e^{-i\phi}
\end{aligned} \tag{6.4.6}
$$

当 $\phi=2n\pi$ 时

$$
I_{\max}=[\sqrt{G(x_1,x_1)}+\sqrt{G(x_2,x_2)}\ ]^2
$$

当 $\phi=(2n+1)\pi$ 时

$$
I_{\min}=(\sqrt{G(x_1,x_1)}-\sqrt{G(x_2,x_2)})^2
$$

$$
V=\frac{2\sqrt{G(x_1,x_1)G(x_2,x_2)}}{G(x_1,x_1)+G(x_2,x_2)} \tag{6.4.7}
$$

特别是当 $G(x_1,x_1)=G(x_2,x_2)$, 能见度 V=1, 干涉条纹明暗对比最强.

一般来说，$G(x_1,x_2)$ 满足 Schwarz 不等式

$$
|G(x_1,x_2)|\leq\sqrt{G(x_1,x_1)G(x_2,x_2)} \tag{6.4.8}
$$

特别是当 $|G(x_1,x_2)|\ll\sqrt{G(x_1,x_1)G(x_2,x_2)}$. 由 (6.4.4) 式看出，$I_{\max}$ 与 $I_{\min}$ 差别很小，明暗对比很弱，$V\simeq 0$, 这就是非相干场情形.

对于满足 (6.4.5) 的相干场，互相关函数 $G(x_1,x_2)$ 有如下的分解式：

$$
G(x_1,x_2)=\mathcal{E}^*(x_2)\mathcal{E}(x_1) \tag{6.4.9}
$$

很明显，这是相干场的充要条件.

由 (6.4.3) 式定义的 $G(x_1,x_2)$ 称为场的一阶相关函数. 它是由单光子吸收探测这一物理过程决定的. 对于理想的宽带探测器，在 $(0,t)$ 时间间隔内探测到一个光子的几率 $p^{(1)}(t)$, 可通过自相关函数 $G(\vec{r},t',\vec{r},t')$ 来描述：

$$p^{(1)}(t)=s\int_0^t dt'G^{(1)}(\vec{r},t',\vec{r},t') \tag{6.4.10}$$

式中， s 为标志探测器灵敏度的常数. 计数率为

$$w^{(1)}(t)=\frac{dp^{(1)}(t)}{dt}=sG^{(1)}(\vec{r},t,\vec{r},t) \tag{6.4.11}$$

表示在 $\vec{r}$ 点 t 时探测到单个光子的计数率. 如果是探测 n 个光子吸收，或更简便些，将实验推广为 n 个理想探测器，分别处于 $(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\cdots,\vec{r}_n)$ 点，每一探测器均备有时间快门，并在 $(t_0,t_1),\cdots,(t_0,t_n)$ 时各探测到一个光子的几率为

$$p^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)=s^n\int_{t_0}^{t_1}dt'_1\cdots\int_{t_0}^{t_n}dt'_n\mathrm{tr}\,[\rho E^-(\vec{r}_1,t'_1)\cdots E^-(\vec{r}_n,t'_n)E^+(\vec{r}_n,t'_n)\cdots E^+(\vec{r}_1,t'_1)] \tag{6.4.12}$$

现定义 n 阶相关函数

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n,y_n,\cdots,y_1)=\mathrm{tr}[\rho E^-(x_1)\cdots E^-(x_n)E^+(y_n)\cdots E^+(y_1)] \tag{6.4.13}$$

则每一探测器均记录得一个光子， n 个探测器记录到 n 个光子的探测率为

$$w^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)=\frac{\partial^{(n)}p^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)}{\partial t_1\cdots\partial t_n}=s^nG^{(n)}(x_1,\cdots,x_n,x_n,\cdots,x_1) \tag{6.4.14}$$

一般来说， n 阶相关函数 $G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n,x_n,\cdots,x_1)$ 并不能分解为 n 个探测器的一阶相关函数 $G^{(1)}(x_j,x_j)$, 即

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n,x_n,\cdots,x_1)\neq\prod_{j=1}^{n}G^{(1)}(x_j,x_j) \tag{6.4.15}$$

故 n 阶探测率 $w^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)$ 也不能表示为 n 个探测器的一阶探测率 $w^{(1)}(t_j)$ 的乘积，即

$$w^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)\neq\prod_{j=1}^{n}w^{(1)}(t_j) \tag{6.4.16}$$

类似于一阶相关函数 $G^{(1)}(x_1,x_2)$ 所满足的分解式 (6.4.9) 式，对于相干场，高阶相关函数也具有相应的分解式

$$G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n,y_n,\cdots,y_1)=\mathcal{E}^*(x_1)\cdots\mathcal{E}^*(x_n)\mathcal{E}(y_n)\cdots\mathcal{E}(y_1) \tag{6.4.17}$$

满足 (6.4.17) 式的场称之为完全相干场. 对于完全相干场，有

$$\begin{aligned}G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n,x_n,\cdots,x_1)&=\prod_{j=1}^{n}G^{(1)}(x_j,x_j)\\ w^{(n)}(t_1,\cdots,t_n)&=\prod_{j=1}^{n}w^{(1)}(t_j)\end{aligned} \tag{6.4.18}$$

6.5 相 干 态

6.5.1 相干态

在上节讨论中，我们看到一个有趣的结果，即完全相干场各阶相关函数所满足的分

解式关系 (6.4.17). 而光学测量又都是与相应的相关函数联系在一起的. 相关函数结构总是场的正频部分在右边，负频部分在左边. 如果所选择的场的状态 $| >$ 恰是正频 $E^+(x)$ 的本征态 [10,11], 即

$$E^+(x)| >= \mathcal{E}(x)| > \tag{6.5.1}$$

则在这样的状态中计算相关函数，恰好保留了相关函数的分解性质. 而相关函数的分解性质 (6.4.17) 又恰是场为完全相干场的充要条件，故称由 (6.5.1) 给出的 $E^+(x)$ 的本征态为相干态， $\mathcal{E}(x)$ 为本征值. 例如

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x,x') &= \operatorname{tr}\{\rho E^-(x)E^+(x')\} =< |E^-(x)E^+(x')| > \\ &= \mathcal{E}^*(x)\mathcal{E}(x') \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1,x_2,x_1',x_2') &= < |E^-(x_1)E^-(x_2)E^+(x_1')E^+(x_2')| > \\ &= \mathcal{E}^*(x_1)\mathcal{E}^*(x_2)\mathcal{E}(x_1')\mathcal{E}(x_2') \end{aligned} \tag{6.5.3}$$

下面将看到量子场的正频部分 $E^+(x)$ 的展开式，包含了各种模式的湮没算子. 将 E^+ 作用在相干态上，相当于从态中湮没掉光子，但仍保持态不变，这个性质表明相干态不可能用有限的光子态的叠加来构成. 为求得相干态用光子态叠加的显式表示，将 $E^+(x)$ 用场的正交规一模式 $u_k(\vec{r})$ 展开是合适的，参照 (5.2.3) 式即

$$E^+(x) = i\sum_k \sqrt{2\pi\hbar\omega_k}a_k u_k(\vec{r})e^{-i\omega_k t} \tag{6.5.4}$$

$$\mathcal{E}(x) = i\sum_k \sqrt{2\pi\hbar\omega_k}\alpha_k u_k(\vec{r})e^{-i\omega_k t} \tag{6.5.5}$$

将 (6.5.5) 代入 (6.5.1) 式，便得相干态为

$$\begin{aligned} &| >= |\{\alpha_k\} >= \prod_k |\alpha_k > \\ &\alpha_k|\alpha_k >= \alpha_k|\alpha_k > \end{aligned} \tag{6.5.6}$$

式中， a_k 为湮没算符， $a_k^\dagger$ 为产生算符. 它们之间满足对易关系

$$\begin{aligned} &[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \\ &[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \end{aligned} \tag{6.5.7}$$

(6.5.7) 式表明，对不同模式 $k \neq k', a_k$, $a_{k'}^\dagger$ 是可对易的. 但对相同模式 $k = k'$, 则 a_k, $a_k^\dagger$ 是不可对易的. 为方便计，我们讨论单模情形. 略去脚标 k, 则 (6.5.6) 式为

$$a|\alpha >= \alpha|\alpha > \tag{6.5.8}$$

将相干态 $|\alpha >$ 用光子数态 $|n >$ 展开. $|n >$ 可表示为

$$|n >= \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|0 > \tag{6.5.9}$$

$|0 >$ 为真空态. 应用对易关系 (6.5.7) 式，易证

$$\begin{aligned} a|n > &= \frac{1}{\sqrt{n!}}aa^\dagger(a^\dagger)^{n-1}|0 > = \frac{1}{\sqrt{n!}}(1+a^\dagger a)(a^\dagger)^{n-1}|0 > \\ &= \frac{n}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^{n-1}|0 > = \sqrt{n}|n-1 > \end{aligned} \tag{6.5.10}$$

应用 (6.5.10) 式不难验证状态

$$|\alpha>=e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n> \tag{6.5.11}$$

满足关系式 (6.5.8), 并且是规一的.

在相干态 $|\alpha>$ 中，观察到 n 个光子的几率 $p(n)$ 满足 Poisson 分布

$$p(n)=\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\exp(-|\alpha|^2) \tag{6.5.12}$$

光子数平均值

$$<n>=\sum np(n)=|\alpha|^2\sum\frac{|\alpha|^{2(n-1)}}{(n-1)!}\exp(-|\alpha|^2)=|\alpha|^2 \tag{6.5.13}$$

$$\begin{aligned}<n^2>=\sum n^2p(n) &= |\alpha|^4\sum\frac{|\alpha|^{2(n-2)}}{(n-2)!}\exp(-|\alpha|^2)+|\alpha|^2\\ &= <n>^2+<n>\end{aligned} \tag{6.5.14}$$

相干态 $|\alpha>$ 还可用位移算子 $D(\alpha)$ 作用在真空态 $|0>$ 上生成，即

$$|\alpha>=D(\alpha)|0>,\quad D(\alpha)=\exp(\alpha a^\dagger-\alpha^*a) \tag{6.5.15}$$

利用 Baker Hausdorff 恒等式 (见附录 A)

$$\exp(A+B)=\exp A\exp B\exp(-\frac{1}{2}[A,B]) \tag{6.5.16}$$

上式成立的条件是 $[A,B]$ 与 A 和 B 都是对易的，即 $[[A,B],A]=[[A,B],B]=0$. 按 (6.5.16) 式，位移算子 $D(\alpha)$ 可写为

$$\begin{aligned}D(\alpha)&=\exp(\alpha a^\dagger)\exp(-\alpha^*a)\exp(-\frac{1}{2}[\alpha a^\dagger,-\alpha^*a])\\ &=\exp(-|\alpha|^2/2)\exp(\alpha a^\dagger)\exp(-\alpha^*a)\end{aligned} \tag{6.5.17}$$

$$D(\alpha)|0>=\exp(-|\alpha|^2/2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n> \tag{6.5.18}$$

相干态是不正交的，因

$$\begin{aligned}&<\alpha|\beta>=\exp\left(-\tfrac{1}{2}|\alpha|^2-\tfrac{1}{2}|\beta|^2\right)\sum_{n,m}\tfrac{\alpha^{*n}\beta^m}{\sqrt{n!m!}}<n|m>\\ &=\exp(\alpha^*\beta-|\alpha|^2/2-|\beta|^2/2)\end{aligned} \tag{6.5.19}$$

而

$$\begin{aligned}|<\alpha|\beta>|^2&=\exp(\alpha\beta^*+\alpha^*\beta-|\alpha|^2-|\beta|^2)\\ &=\exp(-|\alpha-\beta|^2)\end{aligned} \tag{6.5.20}$$

只有当 α, β 的间距 $|\alpha-\beta|$ 增大， $\exp(-|\alpha-\beta|^2)\simeq 0$,$|\alpha>$, $|\beta>$ 才近乎正交.

相干态虽不正交，却是完备的. 完备性主要体现在如下的按单位算子 $|\alpha><\alpha|$ 展开关系上：

$$\int|\alpha><\alpha|\frac{d^2\alpha}{\pi}=1 \tag{6.5.21}$$

(6.5.21) 式右端的 1 为单位算子，而积分是对整个复平面积分的. 令 $\alpha=x+iy=re^{i\theta}$, 则 $d^2\alpha=dxdy=rdrd\theta$. 为证明 (6.5.21) 式，将相干态用粒子数态 $|n>$ 展开式 (6.5.11) 及其复共轭代入，便得

$$\begin{aligned}\int|\alpha><\alpha|\frac{d^2\alpha}{\pi} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{|n><m|}{\sqrt{n!m!}}\int e^{-|\alpha|^2}\alpha^{*m}\alpha^n d^2\alpha \\ &= \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{|n><m|}{\pi\sqrt{n!m!}}\int_0^{\infty} rdre^{-r^2}r^{n+m}\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta}\end{aligned} \tag{6.5.22}$$

注意到

$$\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(n-m)\theta} = 2\pi\delta_{nm} \quad , \quad \int_0^{\infty} d\xi e^{-\xi}\xi^n = n!$$

便得

$$\int|\alpha><\alpha|\frac{d^2\alpha}{\pi} = \sum_0^{\infty}|n><n| = 1 \tag{6.5.23}$$

现在我们来证明已求得的相干态为最小测不准态 (见附录 B), 亦即广义动量及广义坐标满足测不准关系 $\sqrt{<(\Delta p)^2><(\Delta q)^2>} = \hbar/2$,$\Delta p$, Δq 分别为广义动量、广义坐标的测不准量. 对单模电磁场, 广义动量 p 、广义坐标 q 与湮没、产生算子 a 、 $a^{\dagger}$ 的关系如下:

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(a^{\dagger}+a) \quad , \quad p = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(a^{\dagger}-a) \tag{6.5.24}$$

故有

$$\begin{aligned}<q> &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}<\alpha|a+a^{\dagger}|\alpha> = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\alpha+\alpha^*) \\ <p> &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}<\alpha|a^{\dagger}-a|\alpha> = i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\alpha^*-\alpha) \\ <q^2> &= \frac{\hbar}{2\omega}<\alpha|a^{\dagger 2}+a^2+aa^{\dagger}+a^{\dagger}a|\alpha> \\ &= \frac{\hbar}{2\omega}(\alpha^{*2}+\alpha^2+2\alpha^*\alpha+1) \\ <p^2> &= -\frac{\hbar\omega}{2}<\alpha|a^{\dagger 2}+a^2-aa^{\dagger}-a^{\dagger}a|\alpha> \\ &= -\frac{\hbar\omega}{2}(\alpha^{*2}+\alpha^2-2\alpha^*\alpha-1)\end{aligned} \tag{6.5.25}$$

方差为

$$\begin{aligned}&<(\Delta q)^2> = <(q-<q>)^2> = <q^2>-<q>^2 = \frac{\hbar}{2\omega} \\ &<(\Delta p)^2> = <(p-<p>)^2> = <p^2>-<p>^2 = \frac{\hbar\omega}{2}\end{aligned} \tag{6.5.26}$$

由此得 $\sqrt{<(\Delta p)^2><(\Delta q)^2>} = \hbar/2$. 这是测不准关系 $\Delta p\Delta q \geq \hbar/2$ 所能容许的最小值.

6.5.2 阻尼相干态 [12]

上面讨论的相干态是简谐振子湮没算符 a 的本征态. 系统是理想的, 没有阻尼的. 若考虑到阻尼, 则需要解含阻尼及无规力的 Langevin 方程 (5.3.38), 即

$$\frac{da}{dt} = (-i\Omega - \gamma/2)a + F$$
$$\frac{da^\dagger}{dt} = (i\Omega - \gamma/2)a^\dagger + F^\dagger \tag{6.5.27}$$

解为

$$a = a_0 e^{(-i\Omega-\gamma/2)t} + \int_0^t F(t')e^{(-i\Omega-\gamma/2)(t-t')}dt' = a_0 e^{-i\Omega-\gamma/2)t} + \beta$$
$$a^\dagger = a_0^\dagger e^{(i\Omega-\gamma/2)t} + \int_0^t F^\dagger(t')e^{(i\Omega-\gamma/2)(t-t')}dt' = a_0^\dagger e^{(i\Omega-\gamma/2)t} + \beta^\dagger \tag{6.5.28}$$

参照 (6.5.8) 式，a 包括两项，前一项 $a_0 e^{(-i\Omega-\gamma/2)t}$ 只作用在相干态上，并给出数 $\alpha_0 e^{(-i\Omega-\gamma/2)t}$ 或简写为 α; 第二项是作用在热库上的算子 β, 因为它是作用在热库上的无规力 $F(t')$ 构成，由此可得出由阻尼振子定义的相干态，或称阻尼相干态 (用下脚标 d 来标志), 即

$$a|\alpha>_d = (\alpha+\beta)|\alpha>_d$$
$${}_d<\alpha|a^\dagger = (\alpha^* + \beta^\dagger)\ {}_d<\alpha| \tag{6.5.29}$$

算子 a, $a^\dagger$ 作用在 $|\alpha>_d$, ${}_d<\alpha|$ 上，而 β, $\beta^\dagger$ 则作用在热库上， a, $a^\dagger$ 与 β, $\beta^\dagger$ 为可易. 满足定义式 (6.5.29) 的解为

$$|\alpha>_d = e^{\beta a^\dagger}e^{-\beta^\dagger a}|\alpha>$$
$${}_d<\alpha| = <\alpha|e^{\beta^\dagger a}e^{-\beta a^\dagger} \tag{6.5.30}$$

式中， $|\alpha>$ 即通常的相干态 $|\alpha>$.a, $a^\dagger$ 是作用在 $|\alpha>$ 上，但 β, $\beta^\dagger$ 是作用在热库上，不作用在 $|\alpha>$ 上. 注意到 (A10) 式，有

$$e^{-\beta a^\dagger}ae^{\beta a^\dagger} = a - \beta[a^\dagger, a] = a + \beta \tag{6.5.31}$$

故有

$$\begin{aligned} a|\alpha>_d &= ae^{\beta a^\dagger}e^{-\beta^\dagger a}|\alpha> = e^{\beta a^\dagger}(a+\beta)e^{-\beta^\dagger a}|\alpha> \\ &= e^{\beta a^\dagger}(\alpha+\beta)e^{-\beta^\dagger a}|\alpha> = (\alpha+\beta)|\alpha>_d \end{aligned} \tag{6.5.32}$$

$$\begin{aligned} {}_d<\alpha|a^\dagger &= <\alpha|e^{\beta^\dagger a}e^{-\beta a^\dagger}a^\dagger = <\alpha|e^{\beta^\dagger a}a^\dagger e^{-\beta a^\dagger} \\ &= <\alpha|(\alpha^*+\beta^\dagger)e^{\beta^\dagger a}e^{-\beta a^\dagger} = (\alpha^*+\beta^\dagger)\ {}_d<\alpha| \end{aligned} \tag{6.5.33}$$

算子 $O(a^\dagger, a)$ 的期待值为

$$\begin{aligned} {}_d<\alpha|O(a^\dagger,a)|\alpha>_d &= <\alpha|e^{\beta^\dagger a}e^{-\beta a^\dagger}O(a^\dagger,a)e^{\beta a^\dagger}e^{-\beta^\dagger a}|\alpha> \\ &= <\alpha|e^{\beta^\dagger a}O(a^\dagger, a+\beta)e^{-\beta^\dagger a}|\alpha> \\ &= <\alpha|O(a^\dagger+\beta^\dagger, a+\beta)|\alpha> = O(\alpha^*+\beta^\dagger, \alpha+\beta) \end{aligned} \tag{6.5.34}$$

在上式的推导中我们用了 (A15).

由定义 (6.5.30) 式，易于看出阻尼相干态满足规一化条件

$$\begin{aligned} {}_d<\alpha|\alpha>_d &= <\alpha|e^{\beta^\dagger a}e^{-\beta a^\dagger}e^{\beta a^\dagger}e^{-\beta^\dagger a}|\alpha> \\ &= <\alpha|e^{\beta^\dagger a}e^{-\beta^\dagger a}|\alpha> = <\alpha|\alpha> = 1 \end{aligned} \tag{6.5.35}$$

阻尼相干态在计算波包的量子干涉时要用到.

6.5.3 相干态的叠加 [53]

在经典光学中，我们常讨论双光束干涉；在量子光学中，两个波包或两个相干态的干涉与叠加却成了研究的热点 [50~52]. 当两个相干态相距甚远时，由此而产生的叠加态称为宏观叠加态或 Schrödinger 猫态.

首先我们要指出在坐标表象中的波包用粒子数态 $|n>$ 展开后恰是一相干态. 参照文献 [50], 在坐标表象中的波包可写为

$$\begin{aligned}\psi(x,t) = & \frac{\sqrt{\alpha'}}{\pi^{1/4}}\exp\left[-\frac{\alpha'}{2}(x-x_0\cos\Omega t)^2 - i\left(\frac{\Omega}{2}t+\alpha'^2 xx_0\sin\Omega t-\frac{\alpha'^2x_0^2}{4}\sin 2\Omega t\right)\right] \\ = & \exp\left[-\alpha'^2\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x_0^2}{4}\right)-\frac{1}{2}i\omega_c t\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\alpha' x_0}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_c t}\right)^n}{\sqrt{n!}}N_nH_n(\alpha' x) \\ = & \exp\left(-\frac{\alpha^2x_0^2}{4}\right)\sum_n\frac{(\alpha' x_0/\sqrt{2})^n}{\sqrt{n!}}|n>=|\alpha' x_0/\sqrt{2}>\end{aligned} \tag{6.5.36}$$

式中，$|n>=\exp[-i(n+1/2)\omega_c t]N_n\overline{\exp}(-\frac{\alpha'^2x^2}{2})H_n(\alpha x)$. 这表明波包用 $|n>$ 展开后就是以 $\alpha' x_0/\sqrt{2}$ 为参量的相干态 $|\alpha' x_0/\sqrt{2}>$. 下面为书写简单起见，作变换 $\alpha' x\to x,\alpha' x_0\to x_0$, 故有 $\psi(x,t)=|x_0/\sqrt{2}>$.

应指明，这里 $x_0/\sqrt{2}$ 已是无量纲的数，参照 (6.5.4), (6.5.5) 式，它不代表"真正的空间坐标"，而是"规一化的电场振幅 $E_o/\sqrt{\frac{2\Pi\hbar\omega}{V}}$"，亦即"湮没算子 a 的本征值 α"，下同.

设两个相干态所对应的波包 ψ_1,ψ_2 其初始位置处于 $x=\pm x_0$, 波包随时间 t 的演化可写为

$$\begin{aligned}\psi_1(x,t) &= \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x-x_0\cos\Omega t)^2 - i\left(\frac{\Omega}{2}t+xx_0\sin\Omega t-\frac{x_0^2}{4}\sin 2\Omega t\right)\right] \\ \psi_2(x,t) &= \frac{1}{\pi^{1/4}}\exp\left[-\frac{1}{2}(x+x_0\cos\Omega t)^2 - i\left(\frac{\Omega}{2}t-xx_0\sin\Omega t-\frac{x_0^2}{4}\sin 2\Omega t\right)\right]\end{aligned} \tag{6.5.37}$$

由波包 ψ_1,ψ_2 叠加得出

$$\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x,t)+\psi_2(x,t)] \tag{6.5.38}$$

几率密度 $I(x,t)$ 为

$$I(x,t)=|\psi(x,t)|^2=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\theta \tag{6.5.39}$$

式中

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp[-(x-x_0\cos\Omega t)^2] \\ I_2 &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp[-(x+x_0\cos\Omega t)^2] \\ \theta &= 2xx_0\sin\Omega t\end{aligned} \tag{6.5.40}$$

(6.5.39) 式即两个波包叠加后的几率密度 $I(x,t)$ 表示式. 当 t 给定后，该式给出干涉花样随空间的分布. 前两项为背景项，第三项为干涉项，干涉项的大小，在很大程度上取决于两个波包，即 I_1 与 I_2 重叠的程度. 如果 I_1 与 I_2 分得很开的话，干涉项贡献很小，

$I(x,t)$ 就是背景项 I_1 与 I_2 的强度叠加，即经典光学中常说的非相干叠加. 只有在 I_1, I_2 靠得很近，第三项 (即相干项) 贡献很大时，才会有相干叠加在空间表现出明暗条纹. 与经典双光束干涉不一样，由于 $I_1(x,t), I_2(x,t)$ 均是时间的函数，故相干叠加也是在随时间 t 在演化. 图 6.3 给出 $I(x,t)$ 随时间 t 的演化. 我们看到当波包靠得近时，才会有波包干涉条纹，也称之为量子干涉. 当相距很远时，量子干涉条纹消失.

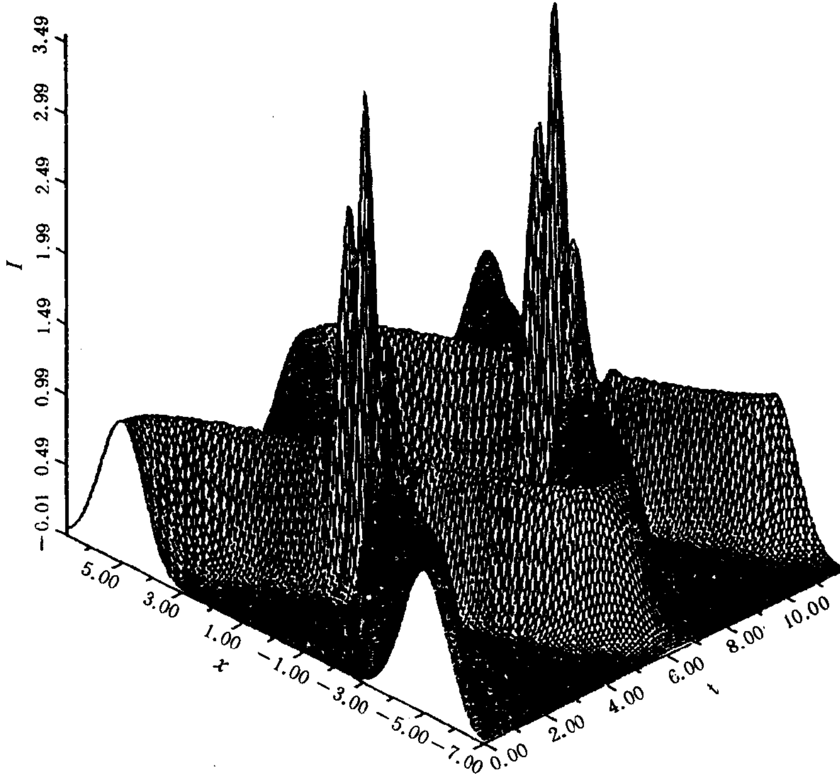


图 6.3 两个波包叠加后产生的干涉花样

现在考虑阻尼 γ 对波包干涉的影响，在弱阻尼情形 $\gamma t \ll 1$, 可应用经典解，求几率密度 $I_c(x,t)$, 因为对易关系的违背不严重. 经典解，即 (6.5.27) 式去掉 $F, F^\dagger$ 的解，$a = a_0 e^{(-i\Omega-\gamma/2)t}, a^\dagger = a_0^\dagger e^{(-i\Omega-\gamma/2)t}$, 亦即 $a_0, a_0^\dagger$ 增加了 $e^{-\gamma t/2}$ 因子，这时

$$I_c(x,t) = I_{1c} + I_{2c} + 2\sqrt{I_{1c}I_{2c}}\cos\theta_c \tag{6.5.41}$$

式中

$$\begin{aligned} I_{1c} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp[-(x - x_0 e^{-\gamma t/2}\cos\Omega t)^2] \\ I_{2c} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp[-(x + x_0 e^{-\gamma t/2}\cos\Omega t)^2] \\ \theta_c &= 2xx_0\exp(-\gamma t/2)\sin\Omega t \end{aligned} \tag{6.5.42}$$

当 γt 增大，上面的经典解不再适用. 应采用 Langevin 方程的解 (6.5.28), 将 $a, a^\dagger$ 写为

$$
\begin{aligned}
a &= (a_0+\tilde{\beta})\exp(-i\Omega t-\gamma t/2), \quad \tilde{\beta} = \int_0^t \exp[(i\Omega+\gamma/2)t']F(t')dt' \\
a^\dagger &= (a_0^\dagger+\tilde{\beta}^\dagger)\exp(i\Omega t-\gamma t/2), \quad \tilde{\beta}^\dagger = \int_0^t \exp[(-i\Omega+\gamma/2)t']F^\dagger(t')dt'
\end{aligned} \tag{6.5.43}
$$

由方程 (6.5.43), 并令 $y_0=0$, 我们得

$$
\begin{aligned}
\bar{x} &= x_0 e^{-\gamma t/2}\cos\Omega t+\Delta_1 e^{-\gamma t/2}\cos\Omega t-\Delta_2 e^{-\gamma t/2}\sin\Omega t \\
\bar{y} &= x_0 e^{-\gamma t/2}\sin\Omega t+\Delta_1 e^{-\gamma t/2}\sin\Omega t+\Delta_2 e^{-\gamma t/2}\cos\Omega t
\end{aligned} \tag{6.5.44}
$$

式中

$$
\bar{x}=\frac{a+a^\dagger}{2}, \qquad \bar{y}=\frac{a-a^\dagger}{-2i}
$$

$$
\Delta_1=\frac{\tilde{\beta}+\tilde{\beta}^\dagger}{2}, \qquad \Delta_2=\frac{\tilde{\beta}-\tilde{\beta}^\dagger}{-2i}
$$

参照 (6.5.42),(6.5.44) 式，得出波包量子干涉的几率密度 I_q

$$
\begin{aligned}
I_q(x,t) &= I_{1q}+I_{2q}+2\sqrt{I_{1q}I_{2q}}\cos\theta_q \\
I_{1q} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp[-(x-\bar{x})^2] \\
I_{2q} &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp[-(x+\bar{x})^2] \\
\theta_q &= 2x\bar{y}
\end{aligned} \tag{6.5.45}
$$

真空起伏 $\Delta_1 e^{-\gamma t/2}$, $\Delta_2 e^{-\gamma t/2}$ 的平均值与方差分别为

$$
\begin{aligned}
<\Delta_1 e^{-\gamma t/2}> &= <\Delta_2 e^{-\gamma t/2}> = 0 \\
<(\Delta_1 e^{-\gamma t/2})^2> &= \frac{e^{-\gamma t}}{4}<(\int_0^t F(t')e^{(i\Omega+\gamma/2)t'}dt'+\int_0^t F^\dagger(t')e^{(-i\Omega+\gamma t/2)t'}dt')^2> \\
&= \frac{1}{2}(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t}) \\
<(\Delta_2 e^{-\gamma t/2})^2> &= \frac{1}{2}(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t})
\end{aligned} \tag{6.5.46}
$$

由方程 (6.5.46), 可直接写出分布函数

$$
\begin{aligned}
f(\Delta_1 e^{-\gamma t/2}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t})}}\exp\left[-\frac{(\Delta_1 e^{-\gamma t/2})^2}{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t})}\right] \\
f(\Delta_2 e^{-\gamma t/2}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t})}}\exp\left[-\frac{(\Delta_2 e^{-\gamma t/2})^2}{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t})}\right]
\end{aligned} \tag{6.5.47}
$$

应用 $f(\Delta_1 e^{-\gamma t/2})$, $f(\Delta_2 e^{-\gamma t/2})$ 及 (6.5.45) 式，可导出几率密度的值

$$
\begin{aligned}
<I_q(x,t)> &= \int\int f(\Delta_1 e^{-\gamma t/2})f(\Delta_2 e^{-\gamma t/2})I_q(x,t)d\Delta_1 e^{-\gamma t/2}d\Delta_2 e^{-\gamma t/2} \\
&= I_1(x,t)+I_2(x,t)+I_3(x,t)
\end{aligned} \tag{6.5.48}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
I_1(x,t) = &\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{1+(n_\omega+1/2)(1-e^{-\gamma t})}} \exp\left[-\frac{(x-x_0e^{-\gamma t/2}\cos\Omega t)^2}{1+(n_\omega+1/2)(1-e^{-\gamma t})}\right] \\
I_2(x,t) = &\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{1+(n_\omega+1/2)(1-e^{-\gamma t})}} \exp\left[-\frac{(x+x_0e^{-\gamma t/2}\cos\Omega t)^2}{1+(n_\omega+1/2)(1-e^{-\gamma t})}\right] \\
I_3(x,t) = &\ \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+(n_\omega+1/2)(1-e^{-\gamma t})}} \exp\left[-[1+(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t})]x^2\right] \\
&\times\exp\left[-\frac{x_0^2e^{-\gamma t}\cos^2\Omega t}{1+(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t})}\right]\cos(2xx_0e^{-\gamma t/2}\sin\Omega t)
\end{aligned} \tag{6.5.49}
$$

上面求平均是对真空态求平均．若真空态为下面 6.8 节讨论的压缩真空态，其压缩度为 $\ln\mu$, 则有

$$
\begin{aligned}
<(\Delta_1e^{-\nu t/2})^2> &= \frac{\mu}{2}(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t}) \\
<(\Delta_2e^{-\nu t/2})^2> &= \frac{1}{2\mu}(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})
\end{aligned} \tag{6.5.50}
$$

相应的分布函数为

$$
\begin{aligned}
f(\Delta_1e^{-\gamma t/2}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t})\mu}}\exp\left[-\frac{(\Delta_1e^{-\gamma t/2})^2}{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t})\mu}\right] \\
f(\Delta_2e^{-\gamma t/2}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t})/\mu}}\exp\left[-\frac{(\Delta_2e^{-\gamma t/2})^2}{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\gamma t})/\mu}\right]
\end{aligned} \tag{6.5.51}
$$

应用 (6.5.51) 式对压缩真空态求平均后的几率密度 $I_s(x,t)$ 为

$$
<I_s(x,t)> = I_{1s}(x,t)+I_{2s}(x,t)+I_{3s}(x,t) \tag{6.5.52}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
I_{1s}(x,t) \quad = &\ \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})(\sin^2\Omega t+\mu^2\cos^2\Omega t)+\mu}} \\
&\times\exp\left[-\frac{\mu(x-x_0e^{-\nu t/2}\cos\Omega t)^2}{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})(\sin^2\Omega t+\mu^2\cos^2\Omega t)+\mu}\right] \\
I_{2s}(x,t) \quad = &\ \frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})(\sin^2\Omega t+\mu^2\cos^2\Omega t)+\mu}} \\
&\times\exp\left[-\frac{\mu(x+x_0e^{-\nu t/2}\cos\Omega t)^2}{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})(\sin^2\Omega t+\mu^2\cos^2\Omega t)+\mu}\right]
\end{aligned} \tag{6.5.53}
$$

$$I_{3s}(x,t) = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\pi}\sqrt{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})(\sin^2\Omega t+\mu^2\cos^2\Omega t)+\mu}}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{x^2\mu[1+(n_\omega+\frac{1}{2})^2(1-e^{-\nu t})^2]}{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})(\sin^2\Omega t+\mu^2\cos^2\Omega t)+\mu}\right\}$$
$$\times\exp\left\{-\frac{x^2(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})(\mu^2+\sin^2\Omega t+\mu^4\cos^2\Omega t)}{(\sin^2\Omega t+\mu^2\cos^2\Omega t)[(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})(\sin^2\Omega t+\mu^2\cos^2\Omega t)+\mu]}\right\}$$
$$\times\exp\left[-\frac{\mu x_0^2 e^{-\nu t}\cos^2\Omega t}{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})(\sin^2\Omega t+\mu^2\cos^2\Omega t)+\mu}\right]$$
$$\times\cos\left\{\frac{[(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})+\mu]2xx_0e^{-\nu t/2}\sin\Omega t}{(n_\omega+\frac{1}{2})(1-e^{-\nu t})(\sin^2\Omega t+\mu^2\cos^2\Omega t)+\mu}\right\}$$

现研究经典干涉 $I_c(x,t)$ 、量子干涉 $I_q(x,t)$ 及压缩真空态干涉 $I_s(x,t)$ 诸结果．首先是经典干涉 $I_c(x,t)$，当 $\gamma t\to\infty$ 时，很明显 I_{1c},I_{2c} 重叠为一个波包 $I_c=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$，干涉条纹消失．考虑到真空起伏后的量子干涉 I_q，参见 (6.5.48) 和 (6.5.49) 式，当 $\gamma t\to\infty$ 时，也不再有干涉条纹．但是当真空态压缩后的量子干涉 $I_s(x,t)$ 却表现出随时间 t 的起伏．图 6.4 给出了压缩态真空情况下 $I_s(x,\ t)$ 随 x，t 而变化的三维图，很明显当 t 很大时，

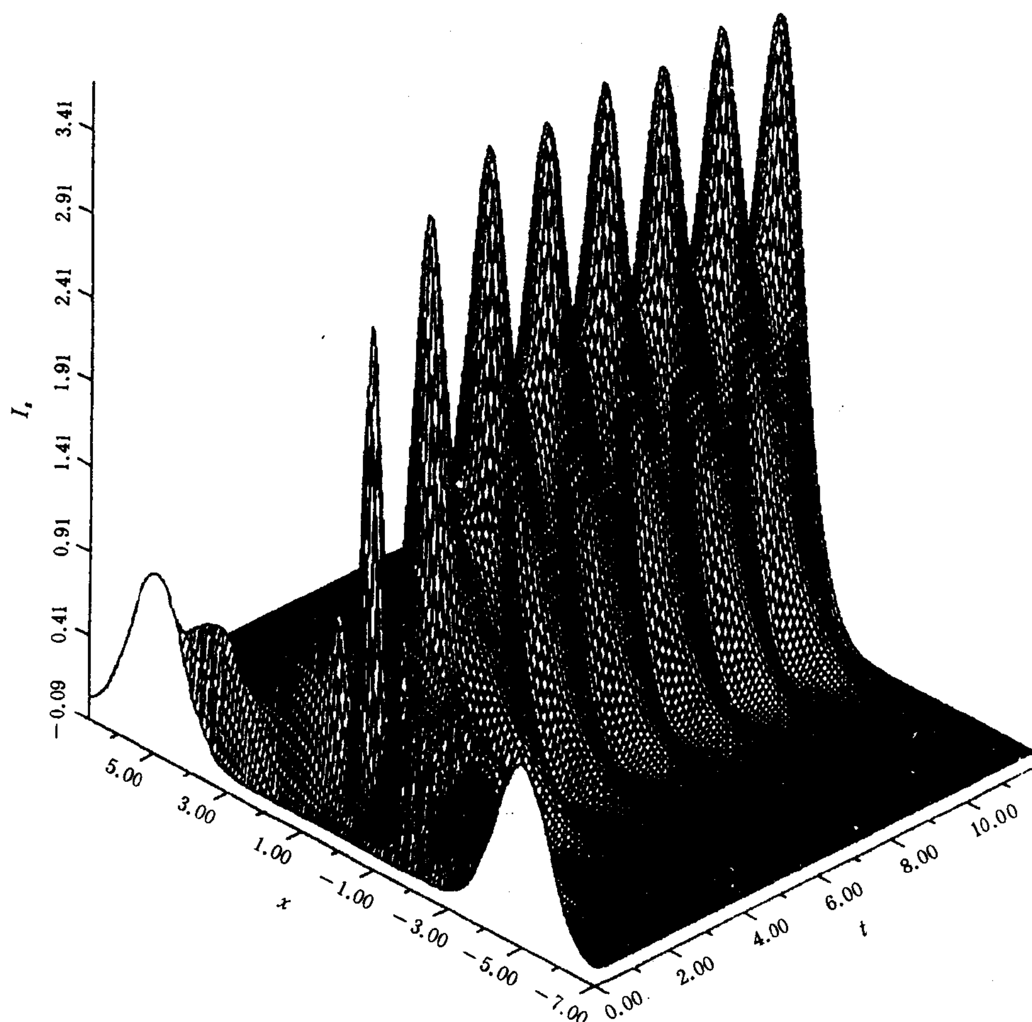


图 6.4 I_s 随 x,t 变化的三维图

$I_s(x,t)$ 随 t 周期变化. 图 6.5 为取 $x_0 = 5.0$ 作 $I_c(x_0,t), I_q(x_0,t), I_s(x_0,t)$ 随 t 的变化曲线，当 t 趋于很大时，I_c, I_q 均不再有起伏，但 I_s 则周期地依赖于时间 t. 若从对称破坏去理解，一般的真空态为各向同性，但压缩真空态则各向同性被破坏. 也许就是由于这种各向同性被破坏才导致 I_s 随时间的起伏.

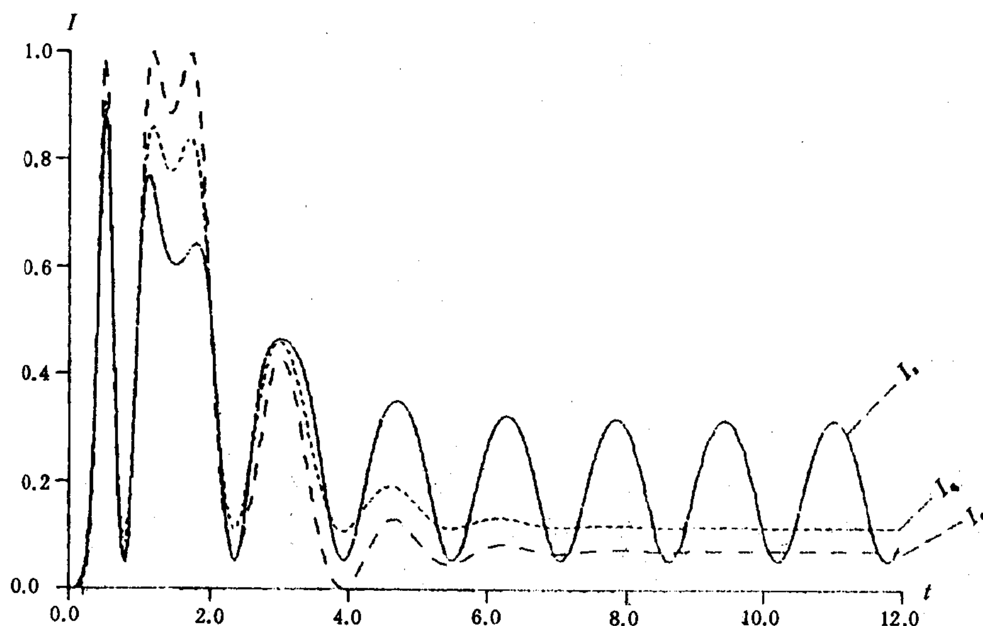


图 6.5 有阻尼情况下，$I_c(x_0,t), I_q(x_0,t), I_s(x_0,t)$ 随 t 的变化曲线

6.6 用相干态的展开

6.6.1 相干态的 P 表示

相干态已构成一完备体系，就可用相干态为基，将任一态函数 $|\psi>$ 进行展开. 应用 (6.5.23) 式将单位算子作用在 $|\psi>$ 上，得

$$|\psi>=\int\frac{d^2\alpha}{\pi}|\alpha><\alpha|\psi>=\int\frac{d^2\alpha}{\pi}<\alpha|\psi>|\alpha> \tag{6.6.1}$$

设

$$|\psi>=\sum_{n'}\psi_{n'}|n'> \tag{6.6.2}$$

应用粒子数态的规一正交关系，得

$$\begin{aligned}<\alpha|\psi> &= e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n\frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}}<n|\sum_{n'}\psi_{n'}|n'> \\ &= e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n\frac{\psi_n\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}}\end{aligned} \tag{6.6.3}$$

式中，$\sum\limits_n\psi_n\alpha^{*n}/\sqrt{n!}$ 为 α^* 的整函数，而指数函数 $e^{-|\alpha|^2/2}$ 则不只是 α^* 的函数，因 $|\alpha|^2=\alpha^*\alpha$. 同样对于算子 T, 两边用单位函数作用，得

$$
\begin{aligned}
T &= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}|\alpha><\alpha|T|\beta><\beta| \\
&= \int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}F(\alpha^*,\beta)\exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}-\frac{|\beta|^2}{2})|\alpha><\beta| \qquad (6.6.4)
\end{aligned}
$$

$$
F(\alpha^*,\beta)=\sum_{n,m}\frac{<n|T|m>\alpha^{*n}\beta^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}=\sum_{n,m}\frac{T_{nm}\alpha^{*n}\beta^m}{\sqrt{n!}\sqrt{m!}}
$$

$F(\alpha^*,\beta)$ 为 α^*, β 的解析函数，其中的指数因子 $e^{-|\alpha|^2/2-|\beta|^2/2}$ 已分离出来. 我们感兴趣的辐射场密度矩阵算符 ρ 也应可以表示为与 (6.6.4) 式相似的形式：

$$
\rho=\int \frac{d^2\alpha}{\pi}\frac{d^2\beta}{\pi}R(\alpha^*,\beta)\exp(-|\alpha|^2/2-|\beta|^2/2)|\alpha><\beta| \qquad (6.6.5)
$$

将密度矩阵算符 ρ 用相干态表示，就使得计算按正规编序排列的算子乘积 (指湮没算子在右，产生算子在左) 的期待值变得很容易，亦即只需将场算符简单地用相应的本征值来代替，便得我们要的期待值. 例如，计算高阶相关函数 (6.4.13) 式，ρ 用 (6.6.5) 式代，便得

$$
\begin{aligned}
&G^{(n)}(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)=\int \mathcal{E}^*(x_1,\{\alpha_k\})\cdots\mathcal{E}^*(x_n,\{\alpha_k\})\times\mathcal{E}(y_1,\{\beta_k\})\cdots\mathcal{E}(y_n,\{\beta_k\}) \\
&R(\{\alpha_k\},\{\beta_k\})\times\exp(-\sum_k|\alpha k|^2-\sum_k|\beta_k|^2)\prod_k\left(\frac{d^2\alpha_k}{\pi}\right)\prod_k\left(\frac{d^2\beta_k}{\pi}\right) \qquad (6.6.6)
\end{aligned}
$$

式中已考虑到多模，模式指标为 k.

密度矩阵 ρ 的表达式 (6.6.5) 式是普遍的，可用来表示场的任意态. 但对有些场来说，可能有更简化的表示. 即将密度矩阵按 $|\alpha><\alpha|$ 展开，而不是按 $|\alpha><\beta|$ 展开. 换言之，我们寻求的是如下对角形的展开：

$$
\begin{aligned}
&\rho=\int d^2\alpha P(\alpha)|\alpha><\alpha| \\
&\int P(\alpha)d^2\alpha=1
\end{aligned} \qquad (6.6.7)
$$

式中，$P(\alpha)$ 为实的权重函数. 我们称 (6.6.7) 为密度矩阵的 P 表示. 权函数 $P(\alpha)$ 为实函数就保证展开式的厄米性质. 又从 $P(\alpha)$ 满足的规一化条件来看，$P(\alpha)$ 具有概率密度性质，不过还不能把 $P(\alpha)$ 看成严格的概率密度，因为 $|\alpha>$ 不构成正交集. 由 $P(\alpha)$ 为正得出密度矩阵 ρ 为正定，但由 ρ 的正定性并不能得出 $P(\alpha)$ 一定不为负. 显然在进行实际计算时，将 $P(\alpha)$ 看成"准概率"是有用的. 例如应用 P 表示求算子函数的迹，即

$$
\mathrm{tr}(\rho b^{\dagger n}b^m)=\int P(\beta)(\beta^*)^n\beta^m d^2\beta \qquad (6.6.8)
$$

一般地

$$
\mathrm{tr}(\rho f_N(b^\dagger,b))=\int P(\beta)f_N(\beta^*,\beta)d^2\beta \qquad (6.6.9)
$$

式中，$f_N(b^\dagger,b)$ 为按正常顺序排列 (b 在 $b^\dagger$ 的右边) 的函数. 类似于求 Fourier 变换，我们求密度矩阵的特征函数 $X(\lambda)$, 其定义为

$$\begin{aligned} X(\lambda) &= \mathrm{tr}[\rho D(\lambda)] = \mathrm{tr}[\rho \exp(\lambda b^\dagger - \lambda^* b)] \\ &= \mathrm{tr}(\rho e^{-\lambda^2/2} e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b}) \\ &= e^{-\lambda^2/2} \int P(\beta) < \beta | e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} | \beta > d^2\beta \\ &= e^{-\lambda^2/2} \int P(\beta) \exp(\lambda\beta^* - \lambda^*\beta) d^2\beta \end{aligned} \tag{6.6.10}$$

上式中位移算子 $D(\lambda)$ 的表示是用了 (6.5.15),(6.5.17) 式. 与 $X(\lambda)$ 相关的还有一种指数算符按正规编序的特征函数 $X_N(\lambda)$

$$\begin{aligned} X_N(\lambda) &= \mathrm{tr}\{\rho \exp(\lambda b^\dagger)\ exp(-\lambda^* b)\} \\ &= \exp(\tfrac{|\lambda|^2}{2}) X(\lambda) \end{aligned} \tag{6.6.11}$$

上式的反变换为

$$P(\beta) = \frac{1}{\pi^2} \int \exp(\lambda^*\beta - \lambda\beta^*) X_N(\lambda) d^2\lambda \tag{6.6.12}$$

若 $X_N(\lambda)$ 是平方可积的，则可证权函数 $P(\beta)$ 也必然是平方可积的. 不过 $X_N(\lambda)$ 不是平方可积的情形也经常碰到.

下面讨论一个有启发性的例子. 测不准关系要求所有的量子态有 $|\Delta q \Delta p| \geq \hbar/2$. 等号成立的态为最小测不准态. 附录 B 中已证明满足如下关系的态 $| >$ 为最小测不准态：

$$(p - < p >)| >= i\mu(q - < q >)| > \tag{6.6.13}$$

由此得 $(\Delta p)^2 = \mu^2(\Delta q)^2$,$\mu$ 可取任意值. 当 $\mu = \omega$ 时，$| >$ 是湮没算符 $b = (2\hbar\omega)^{-1/2}(\omega q + ip)$ 的本征态，即相干态. 一般来说，(6.6.13) 式表明 $| >$ 是 $A(\mu)$ 的本征态. 频率为 μ 的振子的湮没算子 $A(\mu)$ 为

$$A(\mu) = (2\hbar\mu)^{-1/2}(\mu q + ip) = \frac{(\mu\omega)^{-1/2}}{2}[(\mu+\omega)b + (\mu-\omega)b^\dagger] \tag{6.6.14}$$

设 $| >$ 为 $A(\mu)$ 的真空态, $A(\mu)| >= 0$. 应用 (6.5.16) 式求 $| >$ 的 $X_N(\lambda)$ 为

$$\begin{aligned} X_N(\lambda) &= < | \exp(\lambda b^\dagger) \exp(-\lambda^* b) | > \\ &= < | \exp[\lambda(\frac{\omega+\mu}{2\sqrt{\omega\mu}} A^\dagger + \frac{\omega-\mu}{2\sqrt{\omega\mu}} A)] \exp[-\lambda^*(\frac{\omega+\mu}{2\sqrt{\omega\mu}} A + \frac{\omega-\mu}{2\sqrt{\omega\mu}} A^\dagger)] | > \\ &= e^{-|\lambda|^2/2} < | \exp(\frac{\lambda_i\omega + i\lambda_r\mu}{\sqrt{\mu\omega}} A^\dagger + \frac{\lambda_i\omega - i\lambda_r\mu}{\sqrt{\mu\omega}} A) | > \\ &= \exp\left[\frac{(\lambda_i\omega)^2 + (\lambda_r\mu)^2 - \mu\omega(\lambda_r^2 + \lambda_i^2)}{2\mu\omega}\right] \\ &= \exp\left[\frac{\mu-\omega}{2}(\frac{\lambda_r^2}{\omega} - \frac{\lambda_i^2}{\mu})\right] \end{aligned} \tag{6.6.15}$$

对于 $\omega < \mu$, 当 $|\mathrm{Re}\lambda| \to \infty$ 时 $X_N(\lambda)$ 发散；对于 $\omega > \mu$, 当 $|\mathrm{Im}\lambda| \to \infty$ 时 $X_N(\lambda)$ 也发散，于是由 (6.6.12) 式定义的 P 表示 $P(\beta)$ 是不存在的. 除非 $\mu = \omega$, 这时 (6.6.14) 式给出 $A(\omega) = b$,$A(\omega)$ 即 b 的真空态 $| >$ 的 X_N, 可按 (6.5.17),(6.5.18) 求得

$$X_N = < | e^{\lambda b^\dagger} e^{-\lambda^* b} | > = e^{\lambda^2/2} < | D(\lambda) | > = 1$$

6.6.2 W,Q 与 P 分布函数

由于存在测不准关系，量子力学中要给两个互为共轭不可易的量定义一个概率，要比经典力学定义两个或多个量的概率困难得多. 上面讨论的 P 准概率分布函数及其发散的困难就是一个例子. 其实，作为分布函数， Wigner 分布函数出现得最早，简称为 W 分布函数. 后来还有 Q 分布函数.

量子力学密度矩阵理论 (2.5.9) 式表明，算符 A 的期待值 $< A >$ 可通过 $\mathrm{tr}(A\rho)$ 来表示，即 $< A >= \mathrm{tr}(A\rho)$. 设 A, B 为不可易算符，但其期待值 $< A >$, $< B >$ 则是可对易的 c 数. 设我们讨论的共轭算符为坐标 q 与动量 p 时， Wigner 定义的分布函数为

$$\begin{aligned}\widehat{W}(\bar{p},\bar{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int \mathrm{tr}(e^{-i\mu(\bar{p}-p)-i\nu(\bar{q}-q)}\rho)d\mu d\nu \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\int e^{-i\mu\bar{p}-i\nu\bar{q}}\mathrm{tr}(e^{i\mu p+i\nu q}\rho)d\mu d\nu\end{aligned} \tag{6.6.16}$$

$\widehat{W}(\bar{p},\bar{q})$ 就是 p, q 分别取值 $\bar{p}$, $\bar{q}$ 的“概率”. 若不用 p, q, 而是用消灭、产生算符 b, $b^\dagger$

$$q=\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(b^\dagger+b), \quad p=i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(b^\dagger-b) \tag{6.6.17}$$

则 Wigner 分布函数又可表示为

$$\hat{W}(\bar{p},\bar{q})=\frac{1}{2\hbar}W(u,u^*)$$

$$W(u,u^*)=\frac{1}{\pi^2}\int e^{-i\beta u-i\beta^* u^*}\mathrm{tr}(e^{i\beta b+i\beta^* b^\dagger}\rho)d^2\beta \tag{6.6.18}$$

式中

$$\beta=\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\left(\frac{\nu}{\sqrt{\omega}}-i\sqrt{\omega}\mu\right), \quad u=\frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\bar{q}+i\bar{p})$$
$$d^2\beta=d\mathrm{Re}(\beta)d\mathrm{Im}(\beta)$$

应用算子关系

$$e^{i\beta b+i\beta^* b^\dagger}=e^{|\beta|^2/2}e^{i\beta b}e^{i\beta^* b^\dagger}=e^{-|\beta|^2/2}e^{i\beta^* b^\dagger}e^{i\beta b} \tag{6.6.19}$$

便得 $W(u,u^*)$ 的两种表示：

$$\begin{aligned}W(u,u^*) &= \pi^{-2}\int e^{-i\beta u-i\beta^* u^*}\mathrm{tr}(e^{i\beta b}e^{i\beta^* b^\dagger}\rho)e^{|\beta|^2/2}d^2\beta \\ &= \pi^{-2}\int e^{-i\beta u-i\beta^* u^*}\mathrm{tr}(e^{i\beta^* b^\dagger}e^{i\beta b}\rho)e^{-|\beta|^2/2}d^2\beta\end{aligned} \tag{6.6.20}$$

若将式中的因子 $e^{|\beta|^2/2}$, $e^{-|\beta|^2/2}$ 去掉，则得另外两种分布函数：

$$\begin{aligned}P(u,u^*)&=\pi^{-2}\int e^{-i\beta u-i\beta^* u^*}\mathrm{tr}(e^{i\beta^* b^\dagger}e^{i\beta b}\rho)d^2\beta \\ Q(u,u^*)&=\pi^{-2}\int e^{-i\beta u-i\beta^* u^*}\mathrm{tr}(e^{i\beta b}e^{i\beta^* b^\dagger}\rho)d^2\beta\end{aligned} \tag{6.6.21}$$

前一种与 (6.6.12) 式完全相同，即我们在上面讨论过的 P 表示；后一种为 Q 表示.

又由于相干态单位算子为

$$1 = \pi^{-1}\int |\alpha><\alpha| d^2\alpha \tag{6.6.22}$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(e^{i\beta b}e^{i\beta^* b^\dagger}\rho) &= \frac{1}{\pi}\int \mathrm{tr}\{e^{i\beta b}|\alpha><\alpha|e^{i\beta^* b^\dagger}\rho\}d^2\alpha \\ &= \frac{1}{\pi}\int e^{i\beta\alpha+i\beta^*\alpha^*} <\alpha|\rho|\alpha> d^2\alpha\end{aligned} \tag{6.6.23}$$

代入 (6.6.21) 式，得

$$Q(u,u^*) = \frac{1}{\pi} < u|\rho|u^* > \tag{6.6.24}$$

从上面几种分布 $W(u,u^*)$, $P(u,u^*)$, $Q(u,u^*)$ 来看，均涉及系统的密度矩阵 ρ. 只要 ρ 知道了，分布函数也就可以计算了. 现举例如下.

1. 相干混态

设系统处于相干态 $|\alpha>$, $\alpha = |\alpha|e^{i\varphi}$, 振幅 $|\alpha|$ 是完全确定的，而位相 φ 则在 (0, 2π) 内无规分布，这种状态称为相干混态 [11]. 故有

$$\begin{aligned}\rho(a,a^\dagger) &= |\alpha><\alpha| = e^{-|\alpha|^2}\sum_0^\infty\sum_0^\infty \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!}|0><0|\frac{(\alpha^* a)^m}{m!} \\ &= e^{-|\alpha|^2}\sum_{n,m=0}^\infty \frac{(|\alpha|a)^n}{n!}|0><0|\frac{(|\alpha|a^\dagger)^m}{m!}\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\varphi}\frac{d\varphi}{2\pi} \\ &= e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^\infty \frac{(|\alpha|^2)^n}{n!}|n><n|\end{aligned} \tag{6.6.25}$$

于是有系统处于光子数 $|n>$ 态的几率为 Poisson 分布

$$<n|\rho(a,a^\dagger)|n> = e^{-|\alpha|^2}\frac{(|\alpha|^2)^n}{n!} \tag{6.6.26}$$

$$\mathrm{tr}(e^{i\beta^* a^\dagger}e^{i\beta a}\rho) = \mathrm{tr}(e^{-|\alpha|^2}\sum \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} <n|e^{i\beta^* a^\dagger}e^{i\beta a}|n>) \tag{6.6.27}$$

注意到

$$\begin{aligned}e^{i\beta a}|n> &= \sum_{l=0} \frac{(i\beta)^l}{l!}\sqrt{\frac{n!}{(n-l)!}}|n-l> \\ <n|e^{i\beta^* a^\dagger} &= \sum \frac{(i\beta^*)^m}{m!}\sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}}<n-m|\end{aligned} \tag{6.6.28}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(e^{i\beta^* a^\dagger}e^{i\beta a}\rho) &= e^{-|\alpha|^2}\sum_{n=0}^\infty \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\sum_{l=0}^n \frac{(-\beta^2)^l n!}{l!^2(n-l)!} \\ &= e^{-\bar{n}}\sum \frac{\bar{n}^n}{n!^2}L_n(|\beta|^2) = J_0(2\sqrt{\bar{n}}\beta)\end{aligned} \tag{6.6.29}$$

式中， $\bar{n} = |\alpha|^2$.

将 (6.6.29) 式代入 (6.6.20),(6.6.21) 式，便得

$$\begin{aligned}W(u,u^*) &= \pi^{-2}\int e^{-i\beta u-i\beta^* u^*}J_0(2\sqrt{\bar{n}}|\beta|)e^{-|\beta|^2/2}d^2\beta \\ P(u,u^*) &= \pi^{-2}\int e^{-i\beta u-i\beta^* u^*}J_0(2\sqrt{\bar{n}}|\beta|)d^2\beta \\ Q(u,u^*) &= \pi^{-2}\int e^{-i\beta u-i\beta^* u^*}J_0(2\sqrt{\bar{n}}|\beta|)e^{-|\beta|^2}d^2\beta\end{aligned} \tag{6.6.30}$$

注意到

$$
\begin{aligned}
&d^2\beta = d\varphi|\beta|d|\beta| \\
&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i|\beta u|\cos(\theta-\varphi)}d\varphi = J_0(|\beta u|)
\end{aligned}
\tag{6.6.31}
$$

故上面诸式可写为

$$
\begin{aligned}
W(u,u^*) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-|\beta|^2/2}J_0(|u||\beta|)J_0(2\sqrt{\bar{n}}|\beta|)|\beta|d|\beta| \\
P(u,u^*) &= \frac{2}{\pi}\int J_0(|u||\beta|)J_0(2\sqrt{\bar{n}}|\beta|)|\beta|d|\beta| \\
Q(u,u^*) &= \frac{2}{\pi}\int e^{-|\beta|^2}J_0(|u||\beta|)J_0(2\sqrt{\bar{n}}|\beta|)|\beta|d|\beta|
\end{aligned}
\tag{6.6.32}
$$

这三个积分可应用积分表求得 [49]

$$
\int_0^\infty e^{-\rho^2x^2}J_p(\alpha x)J_p(\beta x)xdx = \frac{1}{2\rho^2}e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4\rho^2}}I_p\left(\frac{\alpha\beta}{2\rho^2}\right)
\tag{6.6.33}
$$

$$
\begin{aligned}
W(u,u^*) &= \frac{2}{\pi}e^{-\frac{|u|^2+4\bar{n}}{2}}I_0(2\sqrt{\bar{n}}|u|) \\
P(u,u^*) &= \frac{2}{\pi}\frac{1}{2\rho^2}e^{-\frac{|u|^2+4\bar{n}}{4\rho^2}}I_0\left(\frac{|u|2\sqrt{\bar{n}}}{2\rho^2}\right)|_{\rho\to 0} \\
&= \frac{1}{\pi\rho^2}e^{-\frac{|u|^2+4\bar{n}}{4\rho^2}}\frac{e^{\frac{|u|2\sqrt{\bar{n}}}{2\rho^2}}}{\sqrt{2\pi\frac{|u|\sqrt{\bar{n}}}{\rho^2}}}|_{\rho\to 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi^3|u|\sqrt{\bar{n}}\rho}}e^{-(\frac{|u|-2\sqrt{\bar{n}}}{2\rho})^2}|_{\rho\to 0} \\
Q(u,u^*) &= \frac{1}{\pi}e^{-\frac{|u|^2+4n}{4}}I_0(\sqrt{\bar{n}}|u|)
\end{aligned}
\tag{6.6.34}
$$

当 $\rho\to 0$ 时， $P(u,u^*)$ 是一个 δ 函数.

2. 光子数态 $|n>$, $\rho=|n><n|$

$$
\mathrm{tr}(e^{i\beta^* a^\dagger}e^{i\beta a}|n><n|) = \sum_{l=0}^{n}\frac{(-\beta^2)^l n!}{(l!)^2(n-l)!} = L_n(|\beta|^2)
\tag{6.6.35}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
W(u,u^*) = &\ \pi^{-2}\int e^{-i\beta-i\beta^*u^*}L_n(|\beta|^2)e^{-|\beta|^2/2}d^2\beta \\
= &\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty J_0(|u||\beta|)L_n(|\beta|^2)e^{-|\beta|^2/2}|\beta|d|\beta| \\
P(u,u^*) = &\ \pi^{-2}\int e^{-i\beta-i\beta^*u^*}L_n(|\beta|^2)d^2\beta \\
= &\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty J_0(|u||\beta|)L_n(|\beta|^2)|\beta|d|\beta| \\
Q(u,u^*) = &\ \pi^{-2}\int e^{-i\beta-i\beta^*u^*}L_n(|\beta|^2)e^{-|\beta|^2}d^2\beta \\
= &\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty J_0(|u||\beta|)L_n(|\beta|^2)e^{-|\beta|^2}|\beta|d|\beta|
\end{aligned}
\tag{6.6.36}
$$

参照积分表 [49], 有

$$
\int_0^\infty xe^{-\frac{\alpha x^2}{2}}L_n\left(\frac{\beta x^2}{2}\right)J_0(xy)dx = \frac{(\alpha-\beta)^n}{\alpha^{n+1}}e^{-\frac{y^2}{2\alpha}}L_n\left[\frac{\beta y^2}{2\alpha(\beta-\alpha)}\right]
\tag{6.6.37}
$$

$$W(u,u^*)=\frac{2}{\pi}\frac{(1-2)^n}{1^{n+1}}e^{-u^2/2}L_n\left[\frac{2u^2}{2\times 1(2-1)}\right]$$
$$P(u,u^*)=\frac{2}{\pi}\frac{(\alpha-2)^n}{\alpha^{n+1}}e^{-u^2/\alpha}L_n\left[\frac{2u^2}{2\alpha(2-\alpha)}\right]|_{\alpha\to 0} \tag{6.6.38}$$
$$Q(u,u^*)=\frac{2}{\pi}\frac{(\alpha-\beta)^n}{2^{n+1}}e^{-u^2/4}L_n\left[\frac{u^2}{2(\beta-\alpha)}\right]|_{(\beta-\alpha)\to 0}$$

由上式看到,当 n 为奇数时光子数态的 W“几率”分布函数当 $W(u,u^*)=-\frac{2}{\pi}e^{-u^2/2}L_n[y^2]$ 竟是负的. 可见, W 也不是一个好的“几率”分布函数.

6.7 光子的二阶相关函数、群聚与反群聚效应

6.7.1 光场分布的二阶相关测量

综上所述，在半经典理论中光场是作为服从 Maxwell 方程的经典场来看待的. 正频部分 $E^+(x)$ 与负频部分 $E^-(x)$ 可易. 但从量子场观点来看 (参照 (6.5.4) 式), 正频部分 $E^+(x)$ 与负频部分 $E^-(x)$ 已通过湮没与产生算符 a_k, $a_{k'}^\dagger$ 来展开，而 a_k, $a_{k'}^\dagger$ 又满足 Boson 算子对易关系 $[a_k,a_{k'}^\dagger]=\delta_{k,k'}$. 当 $k=k'$ 时， a_k 与 $a_{k'}^+$ 是不可对易的. 基于这个对易关系，算子 a_k, $a_{k'}^\dagger$ 还满足在附录 A 中给出的许多 Boson 算子的代数关系. 但问题是场的量子特性如何从实验观测上得到反映？如何区别经典场与量子场？经典光学的振幅干涉实验属一阶相关测量，它是不能解决这些问题的. 只有联系到二阶相关测量反映场的统计起伏性质的实验才有可能解决这一问题. 这就是 Hanbury–Brown 与 Twiss(1949) 的强度干涉，亦即光子符合计数实验 [13](见图 6.6).

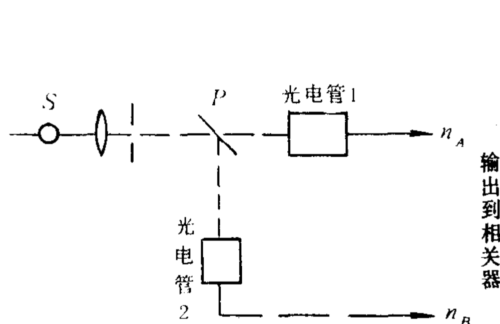


图 6.6 强度干涉实验原理示意图

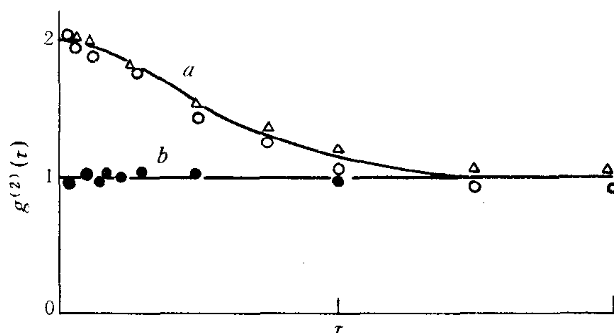


图 6.7 黑体辐射源 a 与激光源 b 的二阶相关测量

(参照 Areechi 等 [14])

图 6.6 中，由光源 S 发出的光束经分束器 P 分作光强相等的两束，分别用光电倍增管 1, 2 接收并进行计数，产生一个一个的光子信号输出. 将这些输出接到相关器上，就发现光子的到达并非完全无规的，而是存在如图 6.7 曲线 a 所示的群聚效应. 横坐标为光束 1 相对于光束 2 的延迟时间. 纵坐标为光电倍增管 1, 2 上的相关计数或称为光子符合计数. 用二阶相关函数来表示，便是

$$g^2(\tau)=\frac{<n_1n_2>}{\bar{n}^2} \tag{6.7.1}$$
$$\bar{n}=<n_1>=<n_2>$$

式中，$n_1(t)$, $n_2(t+\tau)$ 分别为光电倍增管 1, 2 上在 t, $t+\tau$ 时记录到的光子数，延迟时间为 τ. 只有在 $n_1(t)$, $n_2(t+\tau)$ 均不为 0 时，$n_1(t)n_2(t+\tau)$ 才不为 0, 故称为符合计数. 将 $n_1(t)n_2(t+\tau)$ 对观察时间 t 求统计平均，用 $< \ >$ 表示，然后用 $\bar{n}^2$ 除，进行规一化，就作为经典的二阶相关函数 $g^2(\tau)$ 的定义. 这里的光子数 $n(t)$ 可理解为与光强成正比的量，而 $I(t)=E^-(t)E^+(t)$,$E^-(t)$ 与 $E^+(t)$ 是可以对易的. 如果用黑体辐射作为光源 S, 便得曲线 a, 这曲线表明当光束 1, 2 到达光源面的相对延迟时间 τ 减少时，$g(\tau)$ 增加；当 $\tau\to 0$ 时，$g^2(\tau)\to 2$; 但当 τ 增大时，$g^2(\tau)$ 由 2 逐渐下降到 1, 趋向于不相关. 这种 τ 变小，相关变大，趋向同时到达的现象就是光子的群聚效应. 如果用激光的单模输出作为光源做同样实验，则得曲线 b[13, 14]. 这又表明激光光源的光子 n_1, n_2 是完全不相关的，故 $g^2(\tau)$ 近于 1. 同样，图 6.8 为对少数钠原子的共振荧光光源作光子相关测量 [14~17]. 当 τ 很小时，$g^2(\tau)$ 为 0, 亦即光子的二阶相关函数为 0. 这表明光子趋向不同时到达，与图 6.7 曲线 a 的情形完全相反，故称之为反群聚. 图 6.7 中 a, b 的群聚与不群聚均可用经典光场理论进行解释；但图 6.8 中的反群聚，则只能用量子理论，即非经典光场来解释. 为简单起见，设入射到图 6.6 中光电倍增管 1, 2 上的光束的相对延迟时间为 $\tau=0$. 从经典理论来看在光电倍增管 1, 2 上观察到的光信号同时到达或符合计数的几率 $\propto I(t)I(t+\tau)\to I^2(t)$, 考虑到光信号的强度 $I(t)$ 与光子数 $n(t)$ 成正比，故二阶相关函数 $g^2(\tau)$ 又可写为

$$g^2(\tau)|_{\tau\to 0}=< I^2(t) > / < I(t) >^2 \tag{6.7.2}$$

对于单模输出的激光，因服从 Poisson 分布 $< I^2(t) >=< I(t) >^2$, 故有

$$g^2(\tau)|_{\tau\to 0}=1 \tag{6.7.3}$$

对于黑体辐射混沌光，将证明有 $< I^2(t) >= 2 < I(t) >^2$, 故有

$$g^2(\tau)|_{\tau\to 0}=2 \tag{6.7.4}$$

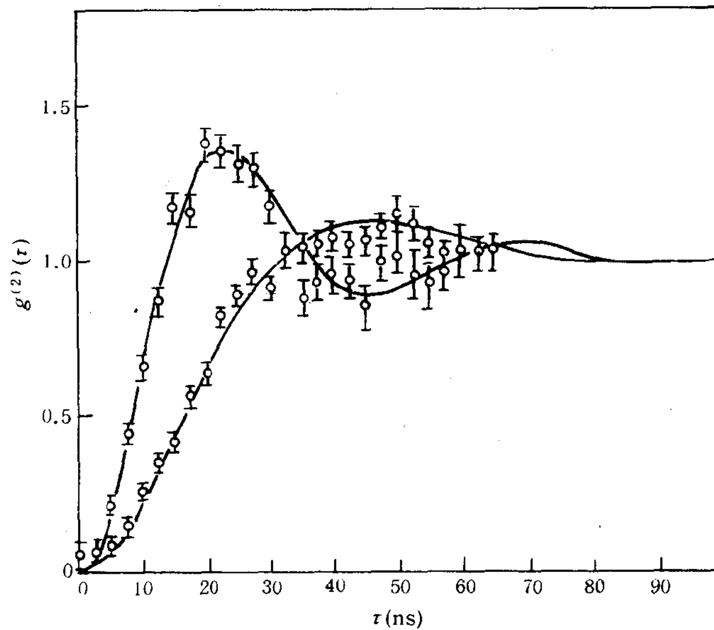


图 6.8 光子相关测量曲线

(• — — $\Omega/\gamma\simeq 2.2$; ∘ — — $\Omega/\gamma=1.1$. 实线为理论曲线)

(参照 Dangenais [16])

这样 (6.7.3),(6.7.4) 式就给出图 6.7 曲线 a 、b 当 $\tau \to 0$ 时，二阶相关 $g^2(\tau)$ 分别趋近于 2 与 1 的解释．但不能用经典理论解释图 6.9 中当 $\tau \to 0$, $g^2(\tau) \to 0$ 对单个或少数钠原子共振荧光的光子相关测量结果．经典理论断言，光束到达分束器后，一半走入光电倍增管 1, 另一半走入光电倍增管 2, 不大可能实现二阶相关 $g^2(\tau)|_{\tau\to 0} = \dfrac{< n_1(t)n_2(t) >}{\bar{n}^2} = 0$, $\bar{n} =< n_1(t) >=< n_2(t) >$. 而量子理论则断言，原子由激发态跃迁到基态，辐射出一个光子，这个光子到达分束器后，要么透过分束器走入倍增管 1, 要么反射走入倍增管 2, 不可能光子的一半走入 1, 而另一半走入 2. 另一方面，因原子已跃迁到基态，不可在极短时间内再辐射第二个光子．如光子数 n_1, n_2 按表 6.1 方式分配，就可能实现反群聚、无群聚或群聚．

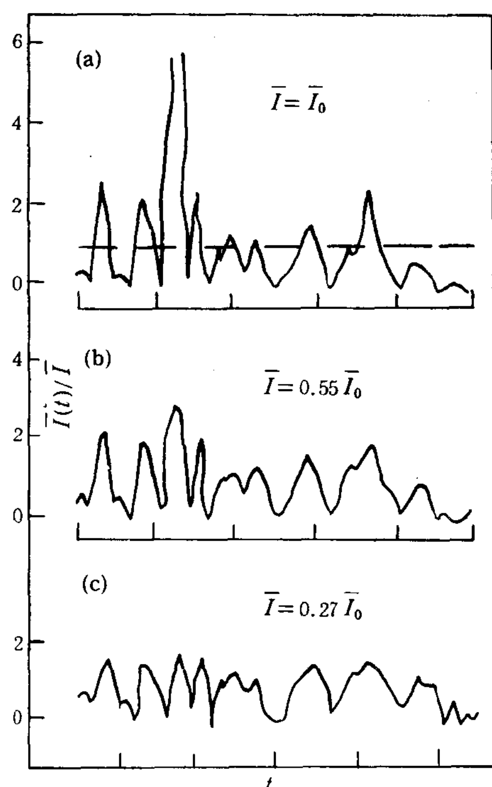


图 6.9 (a) 混沌光的强度起伏；(b),(c) 经双光子吸收后的强度起伏

表 6.1

No	n_1	n_2	$\bar{n}$	$< n_1 n_2 >$	g^2	
1	1	0	1/2	0	0	反群聚
	0	1				
2	2	0	1	1/2	1/2	反群聚
	1	1				
	1	1				
	0	2				
3	2	1	1	1	1	无群聚
	1	1				
	0	1				
4	2	2	1	4/3	4/3	群聚
	1	0				
	0	1				

现在我们讨论通过双光子吸收实现反群聚的途径 (见图 6.9)．很明显，经双光子吸收后，尖峰被削平．这是因为双光子吸收几率正比于 I^2, 混沌光中尖峰处产生双光子吸收几率最大，而低凹处几率很小．尖峰处正是产生光子群聚或光子符合的地方．如果将这些削掉则显然得出无群聚或反群聚的光子分布．由于双光子吸收，二阶相关函数下降为图 6.10 所示 [17]. 除双光子吸收外，二次谐波及共振荧光均能产生反群聚．

6.7.2 经典光场与非经典光场

(6.7.1) 式定义的二阶相关函数 $g^2(\tau)$ 中涉及的求统计平均 $<\ >$ 是按经典统计对时间 t 求平均，而不是按量子统计对量子态求平均．如图 6.6 所示的平稳随机光源 S 经狭缝及分束器分束后得 $I(t)$, $I(t+\tau)$, 分别入射到光电倍增管 1,2 上，τ 为相对延迟时间，于是

$$g^2(\tau) = \frac{< I(t)I(t+\tau) >}{< I(t) >^2} = \frac{< I(0)I(\tau) >}{\bar{I}^2}, \quad \bar{I} =< I(t) > \tag{6.7.5}$$

一方面，按 Hardy 不等式 $< I^2(0) > \geq < I(0) >^2$, 便得

$$g^2(0) \geq 1 \tag{6.7.6}$$

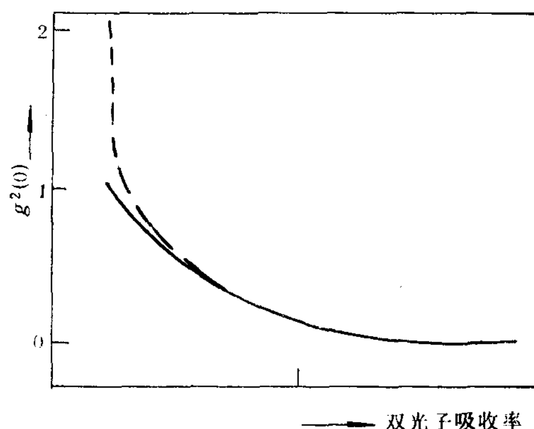


图 6.10 双光子吸收对二阶相关函数的影响 (参照文献 [17])

--- 初始为混沌光，—— 初始为相干光

另一方面，按 Schwarz 不等式 $<I^2(0)><I^2(\tau)>\geq<I(0)I(\tau)>^2$, 便得

$$g^2(0)\geq g^2(\tau) \tag{6.7.7}$$

不等式 (6.7.6) 和 (6.7.7) 可看作经典场与非经典场的判据. 凡满足 (6.7.6) 和 (6.7.7) 不等式的为经典场，否则为非经典场. 图 6.7 和图 6.8 中绘出了热辐射场 (混沌光场)、相干光场及钠原子荧光场的二阶相关函数测量. 前两种光场分别满足 Planck 分布与 Poisson 分布. 在涉及二阶相关函数所表现的统计起伏中，这两种场的量子行为是不明显的，可用满足 Maxwell 方程的波动方法来处理. 下面将证明这两种场的二阶相关函数 $g^2(\tau)$ 也满足 (6.7.6), (6.7.7) 式，故为经典场. 但对后一种荧光场，其量子特征是很明显的，不能用经典场方法来处理. 因图 6.8 的二阶相关违背上面不等式，故属非经典场.

现对热辐射与相干光两种经典场的二阶相关函数 $g^2(\tau)$ 进行计算. 参照 (6.1.25) 式，可求黑体辐射的光子起伏为

$$\overline{\Delta n^2}=\overline{n^2}-\bar{n}^2=\bar{n}+\bar{n}^2 \tag{6.7.8}$$

这是一个状态内的光子起伏. 如果是两个互相独立的状态，分别设为“1”与“2”，则两个状态的光子起伏为

$$\overline{(\Delta n_1+\Delta n_2)^2}=\overline{\Delta n_1^2}+\overline{\Delta n_2^2}+2\overline{\Delta n_1\Delta n_2}$$

两个状态的起伏 Δn_1, Δn_2 也是独立的，故有

$$\overline{(\Delta n_1+\Delta n_2)^2}=\overline{\Delta n_1^2}+\overline{\Delta n_2^2} \tag{6.7.9}$$

由 (6.7.8) 和 (6.7.9) 式，并设 $\bar{n}_1\simeq\bar{n}_2\simeq\bar{n}/2$, $h\nu_1\simeq h\nu_2$, 则

$$\overline{\Delta n^2}=\bar{n}+\bar{n}^2/2,\ n=n_1+n_2 \tag{6.7.10}$$

将 (6.7.10) 式推广到 N 个相近的状态，即

$$h\nu_1\simeq h\nu_2\cdots\simeq h\nu_N,\ \bar{n_1}\simeq\bar{n_2}\cdots\simeq\bar{n}/N$$

则有

$$\overline{\Delta n^2} = \bar{n} + \frac{\bar{n}^2}{N} \tag{6.7.11}$$
$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_N$$

(6.7.8) 和 (6.7.11) 式右端两项有着不同的物理意义. 第一项表现光的粒子性, 因为粒子起伏满足 $\overline{\Delta n^2} = \bar{n}$; 第二项表现光的波动性, 因为波动干涉使得振幅的涨落正比于振幅的平方和. 这样就得到光子的涨落与光子的平方成正比, 即

$$\begin{aligned}
\bar{n} &= \overline{\sum a_j^* e^{i(wt+\varphi_j)} \sum a_k e^{-i(wt+\varphi_k)}} = \sum a_j^2 \\
\overline{\Delta n^2} &= \overline{n^2} - \bar{n}^2 \\
&= \overline{(\sum a_j^* e^{i(wt+\varphi_j)})^2 \times (\sum a_k e^{-i(wt+\varphi_k)})^2} - (\sum a_j^2)^2 \\
&= \overline{(\sum a_j^2 + \sum_{j\neq} \sum_k a_j^* a_k e^{i(\varphi_j - \varphi_k)})^2} - (\sum a_j^2)^2 \\
&= \sum_{j\neq} \sum_k a_j^2 a_k^2 \simeq (\sum a_j^2)^2 = \bar{n}^2
\end{aligned} \tag{6.7.12}$$

现将 (6.7.11) 式应用于图 6.6 所示的光子符合计数实验. 进入光电倍增管 1,2 的光子用 n_A, n_B 来表示, 于是有

$$n(t) = n_A(t) + n_B(t),\ \Delta n(t) = \Delta n_A(t) + \Delta n_B(t)$$

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta n^2} &= \bar{n}_A + \bar{n}_B + \frac{(\bar{n}_A + \bar{n}_B)^2}{N} \\
&= \bar{n}_A + \frac{\bar{n}_A^2}{N} + \bar{n}_B + \frac{\bar{n}_B^2}{N} + 2\frac{\bar{n}_A \bar{n}_B}{N}
\end{aligned} \tag{6.7.13}$$

另一方面

$$\overline{\Delta n^2} = \overline{\Delta n_A^2} + \overline{\Delta n_B^2} + 2\overline{\Delta n_A \Delta n_B} \tag{6.7.14}$$

比较 (6.7.13) 与 (6.7.14) 式, 便得

$$\overline{\Delta n_A \Delta n_B} = \frac{\bar{n}_A \bar{n}_B}{N} \tag{6.7.15}$$

与前面的独立状态的 $\overline{\Delta n_1 \Delta n_2} = 0$ 不一样, 这里的 Δn_A, Δn_B 不是独立的, 而是存在由 (6.7.15) 式所表示的相关性. 注意到 (6.7.15) 式中的 Δn_A, Δn_B 为同时的, 即 $\overline{\Delta n_A(t)\Delta n_B(t)} = \frac{\bar{n}_A \bar{n}_B}{N}$. 对于有延时 τ 的情形

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta n_A(t+\tau)\Delta n_B(t)} &= \overline{\Delta n_A(t)\Delta n_B(t)} \left| \int_0^\infty S(\nu, \nu_0) e^{i\nu\tau} d\nu \right|^2 \\
& \int_0^\infty S(\nu, \nu_0) d\nu = 1
\end{aligned} \tag{6.7.16}$$

式中, $S(\nu, \nu_0)$ 为规一化的线型函数. 由 (6.7.15) 式, 便得

$$\overline{\Delta n_A(t+\tau)\Delta n_B(t)} = \frac{\bar{n}_A \bar{n}_B}{N} \left| \int_0^\infty S(\nu, \nu_0) e^{i\nu\tau} d\nu \right|^2 \tag{6.7.17}$$

当取定谱线形状 $S(\nu, \nu_0) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma/2}{(\gamma/2)^2 + (\nu - \nu_0)^2}$, 则得 $\int_0^\infty S(\nu, \nu_0) e^{i\nu\tau} d\nu \simeq e^{-\gamma\tau/2}$, 二阶

相关函数则为

$$g^2(\tau)=\frac{\overline{(\bar{n}_A+\Delta n_A)(\bar{n}_B+\Delta n_B)}}{\bar{n}_A\bar{n}_B}=\frac{\overline{\Delta n_A(t+\tau)\Delta n_B(t)}}{\bar{n}_A\bar{n}_B}+1=1+e^{-\gamma\tau}/N \tag{6.7.18}$$

对服从 Poisson 分布的单模激光，(6.7.8) 式应换为

$$\overline{\Delta n^2}=\bar{n}$$

应用同样分析方法，得

$$\begin{aligned}&\overline{\Delta n_A(t)\Delta n_B(t)}=0\\&g^2(\tau)=1\end{aligned} \tag{6.7.19}$$

由 (6.7.18) 和 (6.7.19) 式给出的 $g^2(\tau)$ 明显满足不等式 (6.7.6) 和 (6.7.7), 故为经典场. 而且当 $\tau\to 0$ 时，(6.7.18) 和 (6.7.19) 式便过渡到前面讨论中已用到的 (6.7.4) 和 (6.7.3) 式.

上面讨论了两种经典场及其二阶相关函数 $g^2(\tau)$. 对于非经典场就要用量子二阶相关函数来描述. 参照高阶相关函数定义 (6.4.17) 式，量子的规一化的二阶相关函数 $g^2(\tau)$ 可定义为 (量子场的二阶相关函数仍用 $g^2(\tau)$ 表示)

$$g^2(\tau)=\frac{<E^-(0)E^-(\tau)E^+(\tau)E^+(0)>}{<E^-E^+>^2} \tag{6.7.20}$$

式中求平均是指对量子态求平均，而且 E^+ 与 E^- 是不可对易的. 特别是对于单模场情形，展开 (6.5.4) 式只需取其中的一项，于是上式可简化为

$$\begin{aligned}g^2(\tau)&=\frac{<a^\dagger a^\dagger aa>}{<a^\dagger a>^2}=\frac{<a^\dagger(aa^\dagger-1)a>}{<a^\dagger a>^2}\\&=\frac{<n_1(n_1-1)>}{\bar{n}_1^2}\end{aligned} \tag{6.7.21}$$

式中，n_1 为单模的光子数，$\bar{n}_1$ 为单模光子数的平均值. 最简单的情形是处于本征值为 n_1 的光子数态，有

$$g^2(\tau)=\frac{n_1-1}{n_1} \tag{6.7.22}$$

上式对于所有的 τ 均成立. 这显然与不等式 (6.7.6) 违背，故光子数态为非经典场. 虽然光子数态为非经典场，但前面讨论的经典场可用光子数态的几率分布来描述. 例如光子数按 Poisson 分布的场为经典场，具有光子数 n_1 的几率为

$$P_{n_1}=\bar{n}_1^{n_1}e^{-\bar{n}_1}/n_1! \tag{6.7.23}$$

由此求出光子数 n_1 的均方值

$$\overline{n_1^2}=\sum n_1^2P_{n_1}=\bar{n}_1^2+\bar{n}_1$$

即

$$\overline{\Delta n_1^2}=\bar{n}_1 \tag{6.7.24}$$

此即用来导出 $g^2(\tau)=1$ 的关系式. 按 (6.7.21) 式，有

$$g^2(\tau) = \frac{< \bar{n}_1^2 + (\Delta n_1)^2 - n_1 >}{\bar{n}_1^2} = 1$$

又因混沌光场的光子数几率分布为

$$P_{n_1} = \bar{n}_1^{n_1}/(1+\bar{n}_1)^{1+n_1} \tag{6.7.25}$$

由此可导出

$$\overline{n_1^2} = \sum n_1^2 P_{n_1} = 2\bar{n}_1^2 + \bar{n}_1 \tag{6.7.26}$$

这与关系式 (6.7.8) 相同.

6.7.3 原子共振荧光场的二阶相关函数分析

已知光子数态 $|n_1>$ 为非经典光场，而原子的共振荧光表现出反群聚，当 $\tau \to 0$, $g(\tau) \to 0$. 这是图 6.8 钠原子共振荧光的实验结果，也容易从原子的发光过程得到理解. 因原子发射一个光子后，已跃迁到基态，不可能再发射第二个光子，给出光子符合计数，除非当 $\tau \neq 0$, 原子又重新回到激发态，发射第二个光子， $g^2(\tau)$ 才不为 0.

对二能级原子共振荧光，辐射场的量子二阶相关函数可由下式计算：

$$g^2(t) = \frac{< E^-(0)E^-(t)E^+(t)E^+(0) >}{< E^-(\infty)E^+(\infty) >^2}$$

考虑到原子跃迁辐射荧光的物理过程，场算符可通过原子的上升与下降算符表示为 [15]

$$\begin{aligned} E^+(\vec{r},t) &= f(\vec{r})\sigma^-(t-\vec{r}/c), \quad \sigma^- = |1><2| \\ E^-(\vec{r},t) &= f^*(\vec{r})\sigma^+(t-\vec{r}/c), \quad \sigma^+ = |2><1| \end{aligned} \tag{6.7.27}$$

式中， $f(\vec{r})$, $f^*(\vec{r})$ 为 c 数，于是有

$$g^2(t) = \frac{< \sigma^+(0)\sigma^+(t)\sigma^-(t)\sigma^-(0) >}{< \sigma^+(\infty)\sigma^-(\infty) >^2} \tag{6.7.28}$$

(6.7.28) 式的分子涉及双时相关函数. 但可应用 Lax 的量子回归定理 [18] 使之变为单时相关函数的计算. 这个定理表明，若

$$< \hat{A}(t) >= \sum_i \alpha_i(t) < \hat{A}_i(0) >$$

则

$$< \hat{B}(0)\hat{A}(t)\hat{C}(0) >= \sum_i \alpha_i(t) < \hat{B}(0)\hat{A}_i(0)\hat{C}(0) > \tag{6.7.29}$$

式中， $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ 为算子.

通过解二能级原子的 Bloch 方程，可得

$$\begin{aligned} < \sigma^+(t)\sigma^-(t) >= \ & \alpha_1(t) + \alpha_2(t) < \sigma^+(0) > \\ & +\alpha_3(t) < \sigma^-(0) > +\alpha_4(t) < \sigma^+(0)\sigma^-(0) > \end{aligned} \tag{6.7.30}$$

通常我们关心的是系统经过长时间演化后到达的稳态解，不依赖于初期，即

$$< \sigma^+(\infty)\sigma^-(\infty) >= \alpha_1(\infty), \ \alpha_2(\infty) = \alpha_3(\infty) = \alpha_4(\infty) = 0 \tag{6.7.31}$$

将 (6.7.30) 式代入 (6.7.29) 式，便得

$$< \sigma^+(0)\sigma^+(t)\sigma^-(t)\sigma^-(0) >= \alpha_1(t) < \sigma^+(0)\sigma^-(0) > \tag{6.7.32}$$

为求得 $\alpha_1(t)$, 可解 $\rho_{22}(t) =< \sigma^+(t)\sigma^-(t) >$ 的变率方程

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = R - 2\gamma\rho_{22} \tag{6.7.33}$$

式中， R 为光泵抽率， 2γ 为阻尼，易得出

$$\rho_{22}(t) = R/2\gamma[1 - \exp(-2\gamma t)] + \rho_{22}(0)e^{-2\gamma t} \tag{6.7.34}$$

比较 (6.7.30), (6.7.34) 及 (6.7.28) 式，得

$$\begin{aligned} &\alpha_1(t) = R/2\gamma[1 - e^{-2\gamma t}] \\ &g^2(t) = 1 - e^{-2\gamma t} \end{aligned} \tag{6.7.35}$$

一般说来，为求得 $\rho_{22}(t)$ 的准确解，应解在外场驱动下二能级原子满足的 Bloch 方程

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho_{22}}{dt} = i\Omega/2(\rho_{21} - \rho_{12}) - 2\gamma\rho_{22} \\ &\frac{d\rho_{21}}{dt} = -(\gamma' + i\Delta)\rho_{21} + i\Omega(\rho_{22} - \rho_{11}) \\ &\rho_{11} + \rho_{22} = 1, \ \rho_{12} = \rho_{21}^* \end{aligned} \tag{6.7.36}$$

当光泵功率不高， Rabi 频率 Ω 不大，且略去碰撞加宽， $\gamma = \gamma'$, 满足初始条件 $\rho_{22}(0) = \rho_{12}(0) = \rho_{21}(0) = 0$ 精确到 Ω^2 的解为

$$\begin{aligned} &\rho_{22}(t) = \frac{\Omega^2/4}{\Delta^2 + \gamma^2}[1 + \exp(-2\gamma t) - 2\cos\Delta t\exp(-\gamma t)] \\ &\Delta = \omega_0 - \omega \end{aligned} \tag{6.7.37}$$

Δ 为光泵频率相对于原子跃迁频率的失谐．由 (6.7.28) 式得

$$g^2(t) = 1 + \exp(-2\gamma t) - 2\cos\Delta t\exp(-\gamma t) \tag{6.7.38}$$

若光泵抽运频率与原子频率为共振，即 $\Delta = \omega_0 - \omega = 0$, 则有 (见图 6.11)

$$g^2(t) = [1 - \exp(-\gamma t)]^2 \tag{6.7.39}$$

(6.7.38) 和 (6.7.39) 式的 $g^2(t)$ 为单原子辐射的二阶相关函数．若为多原子辐射，参照定义 (6.7.28), 可推广为 [15, 19]

$$G^2(t) = \frac{\sum\limits_{ijkl} < \sigma_i^+(0)\sigma_j^+(t)\sigma_k^-(t)\sigma_l^-(0) >}{(\sum\limits_{ij} < \sigma_i^+(\infty)\sigma_j^-(\infty) >)^2} \tag{6.7.40}$$

考虑到

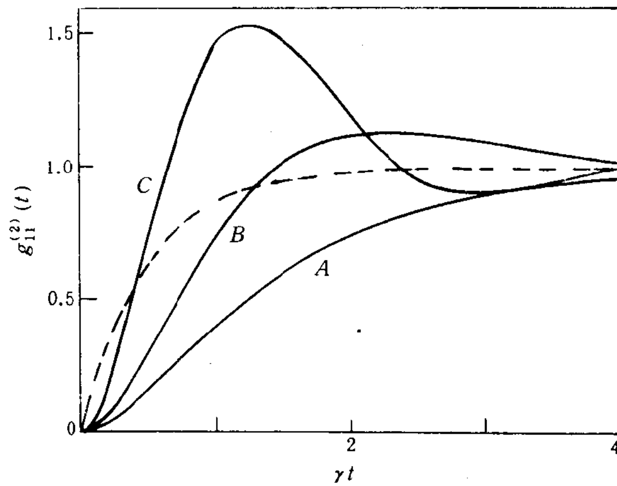


图 6.11 $g^2(t)$ 随 t 的变化曲线. 虚线为变率方程解
(实线 $A: \Delta=0$, $B: \Delta=\gamma$, $C: \Delta=2\gamma$)
(参照 Loudon [15])

$$\sum_{ijkl} < \sigma_i^+(0)\sigma_j^+(t)\sigma_k^-(t)\sigma_l^-(0) >= N < \sigma^+(0)\sigma^+(t)\sigma^-(t)\sigma^-(0) >$$
$$+N(N-1)\{< \sigma^+(0)\sigma^-(t) >< \sigma^+(t)\sigma^-(0) > + < \sigma^+(0)\sigma^-(0) >< \sigma^+(t)\sigma^-(t) >\}$$
$$\sum_{ij} < \sigma_i^+(0)\sigma_j^-(t) >= N < \sigma^+(0)\sigma^-(t) > \tag{6.7.41}$$

上式右边为单原子的相关函数, N 为原子数. 将 (6.7.41) 代入 (6.7.40) 式, 便得

$$G^2(t) = [g^2(t) + (N-1)(|g^1(t)|^2 + 1)]/N \tag{6.7.42}$$

$g^2(t)$, $g^1(t)$ 分别为单原子的二阶、一阶相关函数. N 个原子的一阶相关函数 $G^1(t)$ 与单原子同, 即

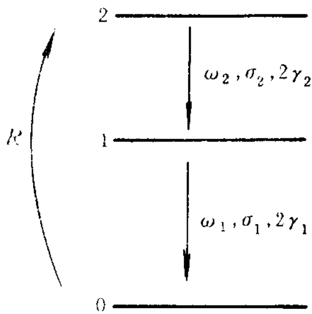


图 6.12 三能级原子级联辐射示意图

$$G^1(t) = g^1(t) = \frac{< \sigma^+(0)\sigma^-(t) >}{< \sigma^+(\infty)\sigma^-(\infty) >} \tag{6.7.43}$$

应用上面解变率方程求单原子相关函数及公式 (6.7.41), 便可计算多原子三能级级联辐射的相关函数, 并与实验结果进行比较.

图 6.12 所示三能级原子基态被抽运到激发态 2 后, 产生级联辐射 ω_2 跃迁到能态 1, 再产生 ω_1 辐射, 跃迁到基态 0. 各能级布居数变率方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_{22}}{dt} &= R - 2\gamma_2\rho_{22} \\ \frac{d\rho_{11}}{dt} &= 2\gamma_2\rho_{22} - 2\gamma_1\rho_{11} \\ \frac{d\rho_{00}}{dt} &= -R + 2\gamma_1\rho_{11} \end{aligned} \tag{6.7.44}$$

解为

$$\rho_{22}(t) = (\rho_{22}(0) - R/2\gamma_2)\exp(-2\gamma_2 t) + R/2\gamma_2 \tag{6.7.45}$$

$$\rho_{11}(t) = (\rho_{11}(0) - R/2\gamma_1)\exp(-2\gamma_1 t) + R/2\gamma_1 \\ -(2\gamma_2\rho_{22}(0) - R)[\exp(-2\gamma_1 t) - \exp(-2\gamma_2 t)]/2(\gamma_1 - \gamma_2) \tag{6.7.46}$$

定义

$$g_{ij}^2(t) = \frac{< \sigma_j^+(0)\sigma_i^+(t)\sigma_i^-(t)\sigma_j^-(0) >}{< \sigma_i^+(\infty)\sigma_i^-(\infty) >< \sigma_j^+(\infty)\sigma_j^-(\infty) >}, \ i, \ j = 1, \ 2 \tag{6.7.47}$$

参照上面量子回归理论方法，便得

$$\begin{aligned} g_{22}^2(t) &= g_{21}^2(t) = 1 - \exp(-2\gamma_2 t) \\ g_{11}^2(t) &= \{\gamma_1[1 - \exp(-2\gamma_2 t)] \\ &\quad -\gamma_2[1 - \exp(-2\gamma_1 t)]\}/(\gamma_1 - \gamma_2) \\ g_{12}^2(t) &= g_{11}^2(t) + (2\gamma_1/R)\exp(-2\gamma_1 t) \end{aligned} \tag{6.7.48}$$

又根据实验情况略去 (6.7.42) 式一阶相关函数的影响，当 $N \gg 1$, 于是可取近似

$$\begin{aligned} G_{ij}^2(t) &= g_{ij}^2(t)/N + 1 \\ G_{22}^2(t) &= G_{21}^2(t) = G_{11}^2(t) \simeq 1 \\ G_{12}^2(t) &\simeq \frac{2\gamma_1}{RN}\exp(-2\gamma_1 t) + 1 \end{aligned} \tag{6.7.49}$$

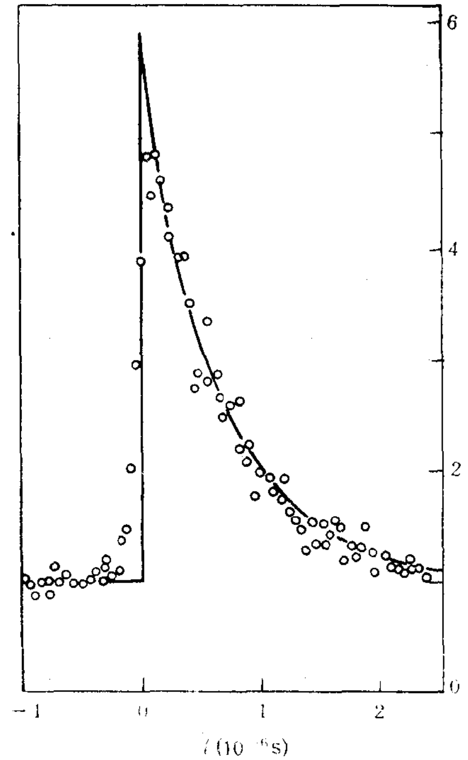


图 6.13 Hg 原子三能级级联辐射相关测量曲线

(参照 Clauser, Loudon [19, 15])

图 6.13 为 Clauser 对 Hg 原子级联辐射做的二阶相关测量. $t > 0$ 的函数按 $[G_{12}^2(t)]^2$ 给出， $t < 0$ 按 $[G_{21}^2(-t)]^2$ 给出，点为实验测量结果， $\frac{2\gamma_1}{RN} = 1.42$. 注意上面按 (6.7.47) 式定义的 $g_{12}^2(t)$ 与 $g_{21}^2(t)$ 是不一样的. $g_{12}^2(t)$ 指先辐射 ω_2 光子， t 时后辐射 ω_1 光子的相关符合计数；$g_{21}^2(t)$ 指先辐 ω_1 光子， t 时后辐射 ω_2 光子的符合计数.

6.8 压缩态光场

6.8.1 光量子起伏给光学精密测量带来的限制

光信号振幅与相位的起伏，给光学测量精度带来影响. 产生光信号起伏的原因，有外在环境，如气流的扰动引起的，也有光学元件不稳引起的，还有许多人为的因素. 当这些环境与人为因素得以克服后，最终还剩下一种带有实质性的光量子起伏或真空场起伏. 对于模体积为 V, 频率为 ω 的单模场，真空场电压起伏 $\mathcal{E} = (\hbar\omega/2\varepsilon_0 V)^{1/2}$, 能量起伏为 $\hbar\omega/2$. 这就构成了影响光学测量精度的量子极限. 下面以 Michelson 干测仪量为例来说明这个问题 [20, 21].

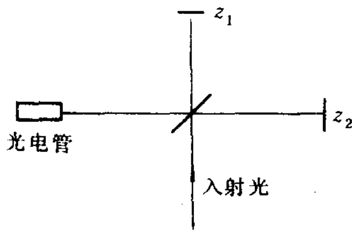


图 6.14 Michelson 干涉测量简图

如图 6.14 所示，用 Michelson 干涉仪测量镜面位置 z_1 与 z_2 的差 $\Delta z = z_1 - z_2$, 只能准确到标准量子极限 S.Q.L. 而到达极限 S.Q.L 的两镜面差

$$(\Delta z)_{\text{S.Q.L}} = (2\hbar\tau/m)^{1/2} \tag{6.8.1}$$

式中，τ 为观测时间，m 为整个干涉仪的质量. 影响精度的有两个方面，其一为光子计数；另一为辐射压力. 设激光的平均功率为 P, 在测量时射入干涉仪的平均光子数 N 为

$$N = P\tau/\hbar\omega \tag{6.8.2}$$

由于激光服从 Poisson 分布 $\Delta N \simeq N^{1/2}$, 导致波面位相差 ϕ 的测量精度 $\Delta\phi$ 按 $\Delta\phi\Delta N \simeq 1$ 为

$$\Delta\phi \simeq N^{-1/2} \tag{6.8.3}$$

于是因光子计数误差引起的 z 的测不准量为

$$(\Delta z)_{pc} = \frac{c}{2b\omega}\Delta\phi \simeq \frac{\lambda}{4\pi b}N^{-1/2} \tag{6.8.4}$$

式中，b 为光子在干涉仪内来回的次数. 此外，辐射压力作用于干涉仪端面也会影响端面位置 z 的精确测量，主要因为干涉仪两臂的辐射压力起伏是不相关的，对两臂的动量将产生 $\Delta p = \frac{2\hbar\omega}{c}bN^{1/2}$ 的影响，而对位移的影响为

$$(\Delta z)_{rp} = \frac{\Delta p\tau}{2m} \simeq \frac{\hbar\omega b}{c}\frac{\tau}{m}N^{1/2} \tag{6.8.5}$$

改变激光输出功率 P(或 N), 使得总的误差

$$\Delta z = \sqrt{(\Delta z)^2_{pc} + (\Delta z)^2_{rp}} \tag{6.8.6}$$

为最小，将 (6.8.4) 和 (6.8.5) 式代入 (6.8.6) 式，求极值便得

$$\Delta z = (\Delta z)_{\text{S.Q.L}} = (\frac{2\hbar\tau}{m})^{1/2} \tag{6.8.7}$$

最佳输出功率为

$$P_{\text{opt}} = \frac{1}{2}\frac{mc^2}{\omega b^2\tau^2} \simeq 8\times 10^3\text{W} \tag{6.8.8}$$

在得出上面数值结果时，已根据实际技术可能实现情况，取了 $b = 200$, $m \simeq 10^5$g, $\tau \simeq 2\times 10^{-3}$s, $\omega \simeq 4\times 10^{15}\text{s}^{-1}$(相当于 5000Å).$8\times 10^3$W 稳频输出，要求很高. 为降低激光输出功率，以实现 $(\Delta z)_{\text{S.Q.L}}$, 可使 $(\Delta z)_{pc}$ 相当于位置测定精度 Δx, 压缩 e^{-r} 倍；而 $(\Delta z)_{rp}$ 相当于动量测定精度 Δp, 增大 e^r 倍. 这样并不违背测不准关系 $\Delta xe^{-r}\Delta pe^r = \Delta x\Delta p = \hbar/2$, 但达到了 $(\Delta z)_{\text{S.Q.L}}$ 的最佳平均光子数，最佳输出功率 P_{opt} 已为原来的 e^{-2r} 倍，即

$$P_{\text{opt}} = 8\times 10^3 \times e^{-2r}\text{W} \tag{6.8.9}$$

这种做法的物理实质是，原来的两种误差 Δx, Δp, 前一种为光电流的散粒效应，占比重大，是主要的；而后一种辐射压力占比重小，是次要的. 故提高对前一种的测量精

度，降低对后一种的测量精度，以较低的 $P_{\rm opt}$ 实现 $(\Delta z)_{\rm S.Q.L}$. 具有这种性质的光 ($\Delta x \to \Delta x e^{-r}$, $\Delta p \to \Delta p e^{r}$) 称为压缩态光. 如何实现 (或产生) 这种压缩态光，是提高光学测量精度关键所在.

6.8.2 正交压缩态 [22~27, 31~44]

压缩态的通常定义不是通过 $\Delta x \to \Delta x e^{-r}$, $\Delta p \to \Delta p e^{r}$ 来表述，因 x 与 p 的因次不一样. 我们要取因次相同且与 x, p 相当的一对共轭量来定义光的压缩态. 参照 (6.5.24) 式，选择下面的量是合适的：

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(a+a^\dagger) = (\omega/2\hbar)^{1/2} q \\ Y &= \frac{1}{2i}(a-a^\dagger) = (2\hbar\omega)^{-1/2} p \end{aligned} \tag{6.8.10}$$

除了常数因子外，X, Y 分别代表坐标 q 与动量 p;X, Y 具有相同因次，且具有对易关系

$$[X,Y] = i/2 \tag{6.8.11}$$

利用测不准关系 (B10), 由 (6.8.11) 式，得

$$(\Delta X)^2(\Delta Y)^2 \geq 1/16 \tag{6.8.12}$$

对于相干态

$$\begin{aligned} (\Delta X)^2 &= <\alpha|\frac{(a+a^\dagger)^2}{4}|\alpha> - <\alpha|\frac{a+a^\dagger}{2}|\alpha>^2 \\ &= \frac{1}{4}(\alpha^2+\alpha^{*2}+2|\alpha^2|+1) - \frac{1}{4}(\alpha+\alpha^*)^2 = \frac{1}{4} \\ (\Delta Y)^2 &= -\frac{1}{4}(\alpha^2+\alpha^{*2}-2|\alpha|^2-1) + \frac{1}{4}(\alpha-\alpha^*)^2 = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{6.8.13}$$

对于真空态

$$\begin{aligned} (\Delta X)^2 &= <0|(\frac{a+a^\dagger}{2})^2|0> - <0|\frac{a+a^\dagger}{2}|0>^2 = \frac{1}{4} \\ (\Delta Y)^2 &= <0|(\frac{a-a^\dagger}{2i})^2|0> - <0|\frac{a-a^\dagger}{2i}|0>^2 = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{6.8.14}$$

图 6.15 给出相干态的均方误差 $<|\Delta X^2|>^{1/2}$, $<|\Delta Y^2|>^{1/2}$, 其误差圆表示场强 E 的测量误差. 参照 (6.5.5) 式，得

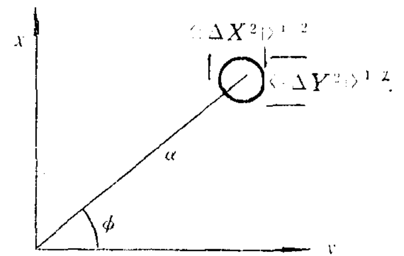


图 6.15 相干态的均方误差 $<|\Delta X^2|>^{1/2}$, $<|\Delta Y^2|>^{1/2}$

$$\begin{aligned} E(x) &= E^+(x)+E^-(x) = i\sqrt{2\pi\hbar\omega}u(r)(ae^{-i\omega t}+a^\dagger e^{i\omega t}) \\ &= i2\sqrt{2\pi\hbar\omega}u(r)(X\cos\omega t - iY\sin\omega t) \end{aligned} \tag{6.8.15}$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}(\Delta E(x))^2 &= 2\hbar\omega u^2(r)(\Delta X^2\cos^2\omega t + \Delta Y^2 \sin^2\omega t) \\ &= \hbar(\omega/2)u^2(r) \end{aligned} \tag{6.8.16}$$

将相干态 $|\alpha>$ 表示为

$$|\alpha >= D(\alpha)|0 >, \ D(\alpha) = \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a) \tag{6.8.17}$$

应用位移算子性质

$$\begin{aligned} D^{-1}(\alpha) a D(\alpha) &= a + \alpha \\ D^{-1}(\alpha) a^\dagger D(\alpha) &= a^\dagger + \alpha^* \end{aligned} \tag{6.8.18}$$

可得

$$\begin{aligned} D^{-1}(\alpha) X D(\alpha) &= X + \mathrm{Re}\alpha \\ D^{-1}(\alpha) Y D(\alpha) &= Y + \mathrm{Im}\alpha \end{aligned} \tag{6.8.19}$$

由 (6.8.19) 式看出，经位移算子作用后，X, Y 分别平移至 $X + \mathrm{Re}\alpha$, $Y + \mathrm{Im}\alpha$. 但误差圆没有变化，因

$$\Delta X = \Delta(X + \mathrm{Re}\alpha), \ \Delta Y = \Delta(Y + \mathrm{Im}\alpha)$$

参照上面干涉测量实验中的分析及 (6.8.10), (6.8.13), (6.8.14) 式，可得出压缩态的定义如下：

$$\begin{aligned} <(\Delta X_s)^2> &= \frac{1}{4}\exp(-2s) \\ <(\Delta Y_s)^2> &= \frac{1}{4}\exp(2s) \end{aligned} \tag{6.8.20}$$

当压缩态参量 $s = 0$, 便回到相干态或真空态的方差，否则便是压缩态的均方差. 相对于这样一个均方差，X, Y 应经历了一个压缩变换

$$\begin{aligned} X \to X_s &= X\exp(-s) \\ Y \to Y_s &= Y\exp(s) \end{aligned} \tag{6.8.21}$$

参照 (6.8.10) 式，对应的湮没与产生算符的变换如下：

$$\begin{aligned} a_s &= a\cosh s - a^\dagger \sinh s \\ a_s^\dagger &= a^\dagger \cosh s - a\sinh s \end{aligned} \tag{6.8.22}$$

新的压缩态算子满足如下的对易关系：

$$[X_s, Y_s] = \frac{i}{2} \quad , \qquad [a_s, a_s^\dagger] = 1 \tag{6.8.23}$$

变换后的哈密顿量为

$$H = \hbar\omega\left(a_s^\dagger a_s + \frac{1}{2}\right) \tag{6.8.24}$$

“准”粒子数态 $|n_s>$ 满足

$$a_s^\dagger a_s |n_s >= n_s |n_s > \tag{6.8.25}$$

也可写出压缩态空间的相干态

$$\begin{aligned} |\alpha_s &>= D_s(\alpha)|0_s > \\ D_s(\alpha) &= \exp(\alpha a_s^\dagger - \alpha^* a_s) \end{aligned} \tag{6.8.26}$$

经位移算子 $D_s^{-1}(\alpha)$, $D_s(\alpha)$ 的作用后，类似于 (6.8.19) 式，有

$$
\begin{aligned}
X_s &\to D^{-1}(\alpha)X_sD(\alpha) = X_s + \mathrm{Re}\alpha \\
Y_s &\to D^{-1}(\alpha)Y_sD(\alpha) = Y_s + \mathrm{Im}\alpha
\end{aligned}
\tag{6.8.27}
$$

故表现 X_s, Y_s 平面内的误差椭圆在经受平移后不发生变化.

更一般的压缩态变换，可通过引进么正变换算子 $S(\zeta)$

$$
S(\zeta) = \exp\left(\frac{1}{2}\zeta^* a^2 - \frac{1}{2}\zeta a^{\dagger 2}\right)
\tag{6.8.28}
$$

来实现，式中 ζ 称为压缩参量

$$
\zeta = se^{i\theta}, \quad 0 \le s < \infty,\ 0 \le \theta \le 2\pi
\tag{6.8.29}
$$

经压缩变换后，图 6.15 所示的相干态误差圆便变成了图 6.16 所示的压缩态的误差椭圆.

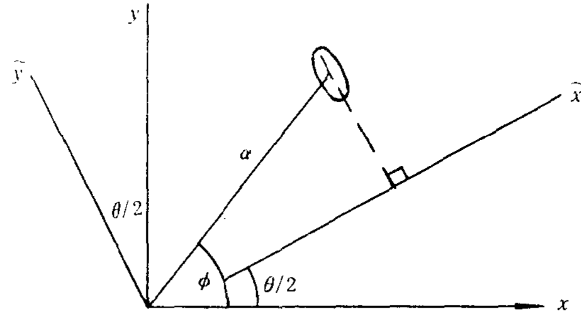


图 6.16　压缩态均方误差椭圆

压缩态变换使得 a, $a^\dagger$ 变为 a_s, $a_s^\dagger$:

$$
\begin{aligned}
a_s &= S^{-1}(\zeta)aS(\zeta) = a\cosh s - a^\dagger e^{i\theta}\sinh s \\
a_s^\dagger &= S^{-1}(\zeta)a^\dagger S(\zeta) = a^\dagger\cosh s - ae^{-i\theta}\sinh s
\end{aligned}
\tag{6.8.30}
$$

引进算子 $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, 有

$$
a = (\tilde{X} + i\tilde{Y})e^{i\theta/2} \quad , \quad a^\dagger = (\tilde{X} - i\tilde{Y})e^{-i\theta/2}
\tag{6.8.31}
$$

于是 (6.8.30) 的第一式可写为

$$
\begin{aligned}
S^{-1}(\tilde{X} + i\tilde{Y})S &= (\tilde{X} + i\tilde{Y})(e^s + e^{-s})/2 - (\tilde{X} - i\tilde{Y})(e^s - e^{-s})/2 \\
&= \tilde{X}e^{-s} + i\tilde{Y}e^s
\end{aligned}
\tag{6.8.32}
$$

这就是图 6.16 所表明的，经过压缩变换后，压缩变换前的 $\tilde{X}$ 被压缩为 $\tilde{X}e^{-s}$; 而变换前的 $\tilde{Y}$ 被伸长为 $\tilde{Y}e^s$, 亦即

$$
\begin{aligned}
\tilde{X}_s &= S^{-1}\tilde{X}S = \tilde{X}e^{-s} \\
\tilde{Y}_s &= S^{-1}\tilde{Y}S = \tilde{Y}e^s
\end{aligned}
\tag{6.8.33}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Delta\tilde{X}_s)^2 &= (\Delta\tilde{X})^2e^{-2s} = \frac{1}{4}e^{-2s} \\
(\Delta\tilde{Y}_s)^2 &= (\Delta\tilde{Y})^2e^{2s} = \frac{1}{4}e^{+2s}
\end{aligned}
\tag{6.8.34}
$$

由于平移作用 ((6.8.27) 式) 及误差椭圆不变的性质，(6.8.34) 式的压缩就可看成压缩真空态 $|0_s>$ 的压缩. 亦即压缩真空态不再是各向同性，而是沿 $\tilde{X}$ 方向被压缩，沿 $\tilde{Y}$ 被伸长. 实际上由 (6.8.33) 式还能得出压缩真空态 $|0_s>$ 与真空态间的关系. 用 S 作用在真

空态 $|0>$ 上，便得压缩真空态 $|0_s>$；再通过平移算子 $D(\alpha)$ 的作用，得一般的压缩态 $|\alpha,\zeta>$：

$$|0_s>=S(\zeta)|0>, \quad <0_s|=<0|S^{-1} \tag{6.8.35}$$

$$|\alpha,\zeta>=D(\alpha)S(\zeta)|0>=D(\alpha)|0_s> \tag{6.8.36}$$

(6.8.36) 式可作为压缩态又一种定义方式，即先压缩真空态，再平移，如图 6.17 所示. 若将 (6.8.36) 写为

$$|\alpha,\zeta>=D(\alpha)S(\zeta)D^{-1}(\alpha)D(\alpha)|0>=U(\zeta)D(\alpha)|0> \tag{6.8.37}$$

$$U(\zeta,\alpha)=D(\alpha)S(\alpha)D^{-1}(\alpha) \tag{6.8.38}$$

(6.8.37) 可解释为先平移，再用 $U(\zeta)$ 压缩得到所需的压缩态，其过程如图 6.18 所表明的那样.

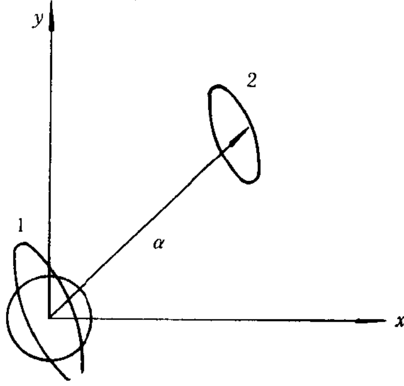


图 6.17 压缩态的几何表示 (先压缩)

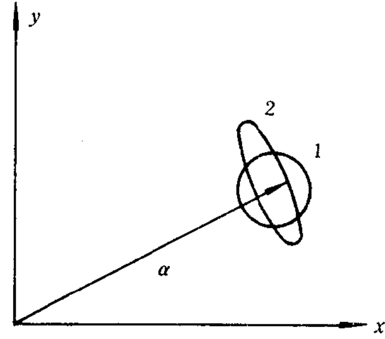


图 6.18 压缩态的几何表示 (先平移)

现应用压缩态的定义式 (6.8.36) 计算 a 等的期待值

$$\begin{aligned} <a> &= <0_s|D^{-1}(\alpha)aD(\alpha)|0_s>=<0_s|\alpha+a|0_s> \\ &= <0|S^{-1}(\alpha+a)S|0>=<0|\alpha+a_s|0> \end{aligned} \tag{6.8.39}$$

用 (6.8.30) 式代入，便得

$$<a>=\alpha \tag{6.8.40}$$

$$\begin{aligned} <n>=<a^\dagger a> &= <0_s|D^{-1}(\alpha)a^\dagger D(\alpha)D^{-1}(\alpha)aD(\alpha)|0_s> \\ &= <0_s|(\alpha^*+a^\dagger)(\alpha+a)|0_s> \\ &= <0|(\alpha^*+a_s^\dagger)(\alpha+a_s)|0> \end{aligned} \tag{6.8.41}$$

将 a_s，$a_s^\dagger$ 用 (6.8.30) 式代入，便得平均光子数

$$<n>=<a^\dagger a>=|\alpha|^2+\sinh^2 s \tag{6.8.42}$$

上式第二项为压缩真空态的贡献. 同样可计算

$$<aa>=\alpha^2-e^{i\theta}\sinh s\cosh s, \quad <a^\dagger a^\dagger>=\alpha^{*2}-e^{-i\theta}\sinh s\cosh s \tag{6.8.43}$$

由 (6.8.40) 式，得

$$\begin{aligned} <X> &=<\frac{a+a^\dagger}{2}>=\frac{1}{2}(\alpha+\alpha^*)=\mathrm{Re}\alpha \\ <Y> &=<\frac{a-a^\dagger}{2i}>=\frac{1}{2i}(\alpha-\alpha^*)=\mathrm{Im}\alpha \end{aligned} \tag{6.8.44}$$

$$
\begin{aligned}
<(\Delta X)^2> &= \frac{1}{4}<|(a+a^\dagger)^2|>-\frac{1}{2}<|a+a^\dagger|>^2 \\
&= \frac{1}{4}<0_s|(\alpha+\alpha^*+a+a^\dagger)^2|0_s>-\frac{1}{4}(\alpha+\alpha^*)^2 \\
&= \frac{1}{4}(e^{-2s}\cos^2\theta/2+e^{2s}\sin^2\theta/2)
\end{aligned} \tag{6.8.45}
$$

$$
<(\Delta Y)^2>=\frac{1}{4}(e^{-2s}\sin^2\theta/2+e^{2s}\cos^2\theta/2) \tag{6.8.46}
$$

当 $\cos\theta>\tanh s$, 由 (6.8.45) 式得知实现了 X 的压缩. 同样由 (6.8.46) 式得知，当 $\cos\theta<-\tanh s$, 实现了 Y 的压缩. (6.8.36) 式又表明，压缩态 $|\alpha,\zeta>$ 即以 $|0_s>$ 为真空态的相干态. 它还可用压缩态的位移算符 D_s 表示为

$$
\begin{aligned}
|\alpha,\zeta> &= D(\alpha)|0_s>=\exp[\alpha a^\dagger-\alpha^* a]|0_s> \\
&= \exp[(\cosh s\alpha-\sinh se^{i\theta}\alpha^*)a_s^\dagger-(\cosh s\alpha^*-\sinh se^{-i\theta}\alpha)]a_s|0_s> \\
&= D_s(\cosh s\alpha-\sinh se^{i\theta}\alpha^*)|0_s> \\
&= |(\cosh s\alpha-\sinh se^{i\theta}\alpha^*)_s>
\end{aligned} \tag{6.8.47}
$$

故有

$$
a_s|\alpha,\zeta>=(\cosh s\alpha-\sinh se^{i\theta}\alpha^*)|\alpha,\zeta> \tag{6.8.48}
$$

亦即 $|\alpha,\zeta>$ 是 $a_s=\cosh sa-\sinh se^{i\theta}a^\dagger$ 的本征态，本征值为 $\cosh s\alpha-\sinh se^{i\theta}\alpha^*$. 参照 (6.8.20) 式，压缩态也是最小测不准态的一种，而且不存在正定的 P 表示.

这里我们虽然证明了由 (6.8.36) 式定义的 $|\alpha,\zeta>$ 为最小测不准态，但这只是压缩态的一种. 更一般来说，只要其中的一个分量表现出压缩，例如 $<|\Delta X^2|>^{1/2}<1/2$, 它与共轭分量 $<|\Delta Y^2|>^{1/2}$ 的乘积可大于或等于真空起伏 1/4, 故压缩态不一定是最小测不准态.

6.8.3 振幅压缩态 [25~27]

现求压缩真空态的粒子数测不准. 粒子数测定误差的均方值为

$$
\begin{aligned}
<(\Delta n)^2> &= \sum_{i=0}^{2}<0_s|n|i_s><i_s|n|0_s>-<0_s|n|0_s>^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2}<0_s|n|i_s><i_s|n|0_s> \\
&= \sum_{i=1}^{2}|<0_s|(\alpha^*+a^\dagger)(\alpha+a)|i_s>|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{2}|<0_s|(\alpha^*+\cosh sa_s^\dagger+\sinh se^{-i\theta}a_s)(\alpha+\cosh sa_s+\sinh se^{i\theta}a_s^\dagger|i_s>|^2) \\
&= |\sqrt{2}\sinh s\cosh se^{-i\theta}|^2+|\alpha\sinh se^{-i\theta}-\alpha^*\cosh s|^2 \\
&= |\alpha|^2(\cosh^2 s+\sinh^2 s)-\cosh s\sinh s(\alpha^{*2}e^{i\theta}+\alpha^2e^{-i\theta})+2\cosh^2 s\sinh^2 s \\
&= |\alpha|^2[e^{-2s}\cos^2(\phi-\theta/2)+e^{2s}\sin^2(\phi-\theta/2)]+2\cosh^2 s\sinh^2 s
\end{aligned} \tag{6.8.49}
$$

当 $|\alpha|=0$ 时，参照 (6.8.42), (6.8.49) 式，压缩真空态的光子数起伏的平均值及 Q 参量为

$$\begin{aligned}&<n>=\sinh^2 s\\&<\Delta n^2>=2\sinh^2 s\cosh^2 s=2<n>(<n>+1)\end{aligned}\tag{6.8.50}$$

$$g^2(0)=\frac{<(\Delta n)^2>+<n>^2-<n>}{<n>^2}=3+\frac{1}{<n>}\tag{6.8.51}$$

$$Q=\frac{<(\Delta n)^2>-<n>}{<n>}=2<n>+1\tag{6.8.52}$$

故压缩真空态表现出群聚 ($g^2(0)>1$) 与超 Poisson($Q>0$). 实际的压缩光源产生的就是这种压缩真空态. 但在零拍探测中，为了探测压缩光源的压缩度，又将一较强的相干光分量叠加到被探测的压缩态光场上. 这就使得 $<n>=|\alpha|^2+\sinh s^2$ 中 $|\alpha|^2$ 的贡献远超过 $\sinh s^2$ 的贡献. 当 $|\alpha|^2\gg\exp(s)$ 时， (6.8.49) 式又可写为

$$<(\Delta n)^2>\simeq|\alpha|^2[e^{-2s}\cos^2(\phi-\theta/2)+e^{2s}\sin^2(\phi-\theta/2)]\tag{6.8.53}$$

相应地 Q 参量为

$$\begin{aligned}Q&=(e^{-2s}-1)\cos^2(\phi-\theta/2)+(e^{2s}-1)\sin^2(\phi-\theta/2)\\&=|\alpha|^2(g^2(0)-1)\end{aligned}\tag{6.8.54}$$

当 $\cos(2\phi-\theta)>\tanh s$ 时， $Q<0$, $g^2(0)-1<0$, 即同时实现亚 Poisson 与反群聚. 故在零拍测量中加进去的相干光信号已改变了压缩光的统计性质，使之由超 Poisson 与群聚变为亚 Poisson 与反群聚，这是非经典场所具有的性质. 由 (6.8.54) 式，当 $\phi=\theta/2$ 时，Q 具有极小值：

$$Q_{\min}=|\alpha|^2(g^2(0)-1)_{\min}=e^{-2s}-1\tag{6.8.55}$$

当 $\phi=\theta/2+\pi/2$,Q 具有极大值：

$$Q_{\max}=|\alpha|^2(g^2(0)-1)_{\max}=e^{2s}-1\tag{6.8.56}$$

在 $<(\Delta n)^2>$ 的强相干场近似式 (6.8.53) 的基础上，依靠几何直觉，即误差椭圆在原点的张角，可定义 α 的位相 ϕ 的测不准 $\Delta\phi$ 为与 α 矢量为垂直方向的误差 $<(\Delta n)^2>_V^{1/2}$ 在原点张角的一半，即

$$|\Delta\phi|=\frac{<(\Delta n)^2>_V^{1/2}}{2<n>}=\frac{\sqrt{e^{-2s}\sin^2(\phi-\theta/2)+e^{2s}\cos^2(\phi-\theta/2)}}{2|\alpha|}\tag{6.8.57}$$

由 (6.8.53), (6.8.57) 式，得

$$<(\Delta n)^2>^{1/2}\Delta\phi\simeq\frac{1}{2}\quad,\quad\phi=\theta/2,\quad\phi=\theta/2+\pi/2\tag{6.8.58}$$

现在让我们回到 (6.8.42) 式

$$<n>=|\alpha|^2+\sinh^2 s=\bar{X}^2+\bar{Y}^2+\sinh^2 s\tag{6.8.59}$$

为得到理想压缩 $s\to\infty$, 平均光子数光能也应是无限大，这就给理想压缩的实现增加了困难. 亦即要求的压缩愈高，激光能也愈大，故无论如何也不能实现理想压缩. 但 (6.8.58)

式则是另外一种情形．当 $<(\Delta n)^2>^{1/2}$ 很小时，$\Delta\phi$ 将很大，使测不准关系得以满足．而相位噪音 $\Delta\varphi$ 的增大，并不需要增加平均光子数 $<n>$，亦即不需要增加激光能量，故从这个意义来说，粒子数态也称之为振幅压缩态，$<(\Delta n)^2>$ 的减小不受正交压缩态那样的限制．设 $\nu=\sinh s$，在 $<n>>\nu^2\gg 1$ 的情况下，由 (6.8.49) 式可得

$$\begin{aligned}<(\Delta n)^2> &= (<n>-\nu^2)(\sqrt{1+\nu^2}-\nu)^2+2\nu^2(1+\nu^2)\\ &\simeq (<n>-\nu^2)/4\nu^2+2\nu^2(1+\nu^2)\end{aligned} \tag{6.8.60}$$

将此式对 ν^2 求极值，得

$$<(\Delta n)^2>_{\min}\simeq<n>^{2/3} \quad , \qquad <n>=16\nu^2\gg 1 \tag{6.8.61}$$

当 $<n>$ 给定后，$<(\Delta n)^2_{\min}>$ 不能比 $<n>^{2/3}$ 更小．由此得出最佳的信噪比为

$$(\mathrm{SNR}_s)_{\min}=\frac{<n>^2}{<(\Delta n)^2>}=<n>^{4/3} \tag{6.8.62}$$

这个信噪比要比相干光场的信噪比 $\mathrm{SNR}_{cs}=<n>$ 大很多．

6.8.4 压缩态的光子数分布

为求得压缩态的光子数分布，先将压缩态 $|\beta>_s$ 按相干态 $|\alpha>$ 展开得

$$|\beta>_s=\sum<\alpha|\beta>_s|\alpha> \tag{6.8.63}$$

又将压缩态 $|\beta>_s$ 按粒子数态 $|n>$ 展开得

$$|\beta>_s=\sum<n|\beta>_s|n> \tag{6.8.64}$$

我们先求 $<\alpha|\beta>_s$，再应用关系式

$$<\alpha|\beta>_s=\sum<\alpha|n><n|\beta>_s \tag{6.8.65}$$

求 $<n|\beta>_s$．因已知相干态在粒子数态 $|n>$ 中展开的系数 $<\alpha|n>$

$$<\alpha|n>=e^{-|\alpha|^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \tag{6.8.66}$$

由于 $|\beta>_s$ 是压缩态中的相干态，所以有

$$b|\beta>_s=\beta|\beta>_s, \quad , \quad b=\cosh s a+\sinh s e^{i\theta}a^\dagger=\mu a+\nu a^\dagger \tag{6.8.67}$$

又因

$$\begin{aligned}<\alpha|a &= e^{-\alpha\alpha^*/2}<0|e^{\alpha^* a}a\\ &= e^{-\alpha\alpha^*/2}\frac{\partial}{\partial\alpha^*}(<0|e^{\alpha^* a})\end{aligned} \tag{6.8.68}$$

$$<\alpha|a=\left(\alpha/2+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)<\alpha| \tag{6.8.69}$$

故有

$$<\alpha|\mu a+\nu a^\dagger|\beta>_s=\beta<\alpha|\beta>_s \tag{6.8.70}$$

即

$$[\mu\left(\alpha/2+\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)+\nu\alpha^*]<\alpha|\beta>_s=\beta<\alpha|\beta>_s \tag{6.8.71}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}<\alpha|\beta>_s=\left(\frac{\beta}{\mu}-\frac{\alpha}{2}-\frac{\nu\alpha^*}{\mu}\right)<\alpha|\beta>_s \tag{6.8.72}$$

解 (6.8.72) 式，得

$$<\alpha|\beta>_s=\exp\left(\frac{\alpha^*\beta}{\mu}-\frac{1}{2}|\alpha|^2-\frac{\nu\alpha^{*2}}{2\mu}+f(\beta^*,\beta)\right) \tag{6.8.73}$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}{}_s<\beta|b|\alpha> &= \left(\beta/2+\frac{\partial}{\partial\beta^*}\right)\ {}_s<\beta|\alpha> \\ &= \left(\mu\alpha+\frac{\nu\alpha^*}{2}+\nu\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)_s<\beta|\alpha>\end{aligned} \tag{6.8.74}$$

将 ${}_s<\beta|\alpha>=(<\alpha|\beta>_s)^*$ 代入上式，并注意 $|\mu|^2-|\nu|^2=1$, 便得

$$\begin{aligned}&\frac{\beta}{2}+\frac{\alpha}{\mu^*}+\frac{\partial f}{\partial\beta^*}=\mu\alpha+\frac{\nu\beta^*}{\mu^*}-\frac{|\nu|^2\alpha}{\mu^*}\\ &f=-\frac{|\beta|^2}{2}+\frac{\nu\beta^{*2}}{2\mu^*}\end{aligned} \tag{6.8.75}$$

代入 $<\alpha|\beta>_s$ 的表达式

$$<\alpha|\beta>_s=\mu^{-1/2}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}-\frac{|\beta|^2}{2}+\frac{\nu\beta^{*2}}{2\mu^*}+\frac{\alpha^*\beta}{\mu^*}-\frac{\nu}{2\mu}\alpha^{*2}\right) \tag{6.8.76}$$

注意到因子

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{\alpha^*\beta}{\mu^*}-\frac{\nu}{2\mu^*}\alpha^{*2}\right) &= \exp[2\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\mu^*}}\alpha^*\right)\frac{\beta}{\sqrt{2\mu^*\nu}}-\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\mu^*}}\alpha^*\right)^2] \\ &= \sum_n\frac{H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu^*\nu}}\right)\left(\sqrt{\frac{\nu}{2\mu^*}}\alpha^*\right)^n}{n!}\end{aligned} \tag{6.8.77}$$

而 (6.8.76) 式右端的系数 $\mu^{-1/2}$ 是由于规一化而引进的， $\int|<\alpha|\beta>_s|^2\frac{d^2\alpha}{\pi}=1$, 故有 $<\alpha|\beta>_s$ 的如下展开：

$$<\alpha|\beta>_s=\sum\frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}}e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{n!\mu}}(\frac{\nu}{2\mu^*})^{n/2}H_n(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu^*\nu}})e^{-|\beta|^2/2+\frac{\nu\beta^{*2}}{2\mu^*}}$$

即

$$<n|\beta>_s=\frac{1}{\sqrt{n!\mu}}(\frac{\nu}{2\mu^*})^{n/2}H_n(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu^*\nu}})e^{-|\beta|^2/2+\frac{\nu\beta^{*2}}{2\mu^*}} \tag{6.8.78}$$

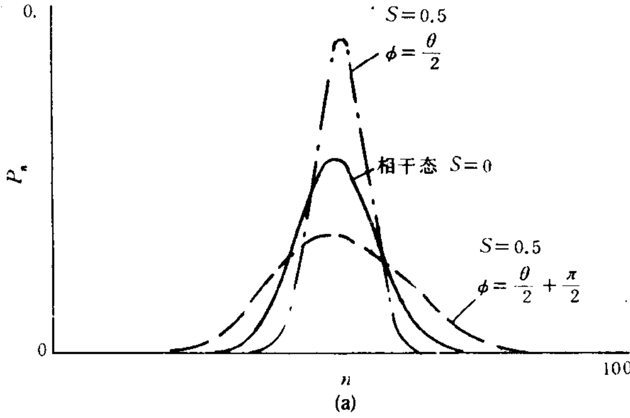
参照 (6.8.78) 式，便得在压缩态 $|\alpha,\zeta>$ 中光子数的分布几率 P_n 为 [27]

$$\begin{aligned}P_n= &\ |<n|\alpha,\zeta>^2| \\ <n|\alpha,\zeta>= &\ (n!\cosh s)^{-1/2}\left[\frac{1}{2}\exp(i\theta)\tanh s\right]^{n/2} \\ &\times\exp\left\{-\frac{1}{2}[|\alpha|^2+\alpha^{*2}e^{i\theta}\tanh s]\right\}H_n\left\{\frac{\alpha+\alpha^*e^{i\theta}\tanh s}{(2\exp(i\theta)\tanh s)^{1/2}}\right\}\end{aligned} \tag{6.8.79}$$

式中， $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, 当 $|\alpha|$ 很大时， $|\alpha| \gg e^{2s}$, $< n > \simeq |\alpha|^2$, 上式与以强场均方差 $< \Delta n^2 >$((6.8.53) 式给出) 的高斯分布

$$P_n = \exp(-(n - |\alpha|^2)^2/2 < \Delta n^2 >)/(2\pi < (\Delta n)^2 >)^{1/2} \tag{6.8.80}$$

很接近. 图 6.19(a) 给出相干光 $|\alpha|^2 = 49$, $s = 0$(实线 —) 、压缩态光 $s = 0.5, \phi = \theta/2$(点划线 -·-·) 与 $\phi = \theta/2 + \pi/2$(虚线 − − −) 的准确解的曲线；图 6.19(b) 给出 P_n 的近似分布曲线，二者差别很小 [28]. 由图 6.19 及 (6.8.55), (6.8.56) 式易于看出，当 $\phi = \theta/2$ 时， P_n 分布比相干光分布集中，但 $\phi = \theta/2 + \pi/2$ 时， P_n 比相干光分布弥散. 前者对应于反群聚、亚 Poisson 分布；后者则对应于超 Poisson 分布. 对于理想的光子数态， $P_n = \delta(n - n_0)$. 故前者是向光子数态靠近，后者则是远离了.



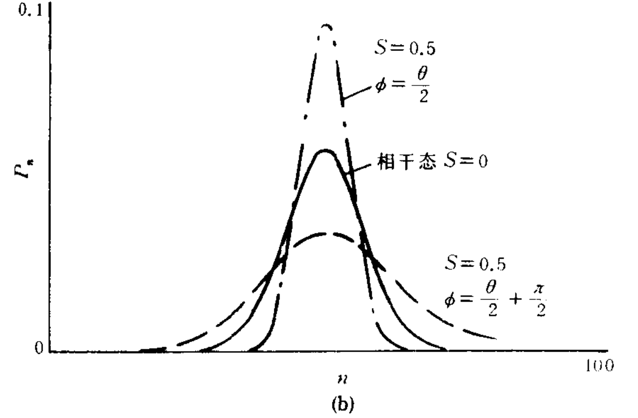


图 6.19 (a) 压缩态光子数分布的准确解； (b) 压缩态光子数分布的近似解

(参照文献 [27])

6.8.5 最小粒子数相位测不准态 [29]

上面我们虽然在强相干场近似式 (6.8.53) 的基础上， 并从直觉出发定义了位相测不准 $\Delta\varphi$, 得出有普遍意义的测不准关系 $\Delta n \Delta\varphi \geq 1/2$. 但严格引进位相算子还是困难的 [28~30]. 将算子 $a, a^\dagger$ 按经典方式分解为

$$a^\dagger = \sqrt{n} e^{-i\phi}, \quad a = e^{i\phi}\sqrt{n} \tag{6.8.81}$$

这里 ϕ 与 $\sqrt{n}$ 均为算子. 先姑且认为这样定义的算子是存在的，于是将 $aa^\dagger - a^\dagger a = 1$ 关系代以 (6.8.81) 式，便得

$$e^{i\phi} n e^{-i\phi} - \sqrt{n} e^{-i\phi} e^{i\phi} \sqrt{n} = 1 \tag{6.8.82}$$

设 $e^{-i\phi}$, $e^{i\phi}$ 满足 $e^{-i\phi} \cdot e^{i\phi} = 1$, 则

$$e^{i\phi} n - n e^{i\phi} = e^{i\phi} \tag{6.8.83}$$

显然若 n, ϕ 满足下面对易关系：

$$\phi n - n\phi = -i \tag{6.8.84}$$

则 (6.8.83) 式成立. 由 (6.8.84) 式得测不准关系 (6.8.58) 式

$$\Delta n \Delta\phi \geq \frac{1}{2} \tag{6.8.85}$$

这样做的困难是，将算子 $e^{i\phi}$, $e^{-i\phi}$ 按 (6.8.81) 式来表示为 $a\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}a^\dagger$. 在粒子数表象中，对于真空场来说 $\sqrt{n}\to 0$, 于是 $e^{i\phi}$, $e^{-i\phi}$ 将遇到发散困难. 比较好的做法应是，将 $a^\dagger, a$ 按下式分解：

$$a^\dagger = E_+(a^\dagger a+1)^{1/2} \quad , \qquad a=(a^\dagger a+1)^{1/2}E_- \tag{6.8.86}$$

将 (6.8.86) 式与原定义 (6.8.81) 式比较，用 $(a^\dagger a+1)^{1/2}$ 代替 $\sqrt{n}=\sqrt{a^\dagger a}$, 真空场的发散困难也就避免了. 另一方面用算子 E_+, E_- 代替 $e^{-i\phi}$, $e^{i\phi}$, 也不要求 $E_+E_-=1$, 这样由定义式 (6.8.86) 式得

$$E_+ = a^\dagger(a^\dagger a+1)^{-1/2} \quad , \qquad E_-=(a^\dagger a+1)^{-1/2}a \tag{6.8.87}$$

并定义

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2i}(E_- - E_+) \qquad (\text{相当于}\sin\varphi) \\ C &= \frac{1}{2}(E_- + E_+) \qquad (\text{相当于}\cos\varphi) \end{aligned} \tag{6.8.88}$$

易于证明 $n=a^\dagger a$, S, C 之间满足如下对易关系：

$$[n,S]=iC, \qquad [n,C]=-iS \tag{6.8.89}$$

故有测不准关系为

$$\begin{aligned} (\Delta n)^2(\Delta S)^2 &\geq \frac{1}{4}<C>^2 \\ (\Delta n)^2(\Delta C)^2 &\geq \frac{1}{4}<S>^2 \end{aligned} \tag{6.8.90}$$

由此得

$$U=(\Delta n)^2\frac{(\Delta S)^2+(\Delta C)^2}{<C>^2+<S>^2}\geq\frac{1}{4} \tag{6.8.91}$$

将上述关系应用于研究粒子数态 $|n>$ 的位相测不准. 首先

$$E_\pm|n>=|n\pm 1> \tag{6.8.92}$$

故有

$$\begin{aligned} (C)^2 &= \frac{1}{4}<n|E_+^2+E_+E_-+E_-E_++E_-^2|n>=\frac{1}{2} \\ (S)^2 &= \frac{-1}{4}<n|E_+^2-E_+E_--E_-E_++E_-^2|n>=\frac{1}{2} \end{aligned} \tag{6.8.93}$$

将这些结果与经典场结果相比较，假设 φ 在 $(0,2\pi)$ 内均匀分布，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\frac{1}{2} \tag{6.8.94}$$

与 (6.8.93) 式相当. 这就表明，对于粒子数态 $|n>$ 来说，φ 可在 $(0,2\pi)$ 间任意取值；而 C, S 可在 $(-1,1)$ 间任意取值，亦即当粒子数 n 给定后，相位是完全不确定的. 但对于相干态 $|\alpha>$, 则是另一种情形. 由 S 的定义 (6.8.88), 则 $|\alpha>$ 用 $|n>$ 展开，易于计算出

$$\begin{aligned} <\alpha|S^2|\alpha> &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{-N}-\frac{1}{2}e^{-N}N(1-2\xi)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^n}{n!\,[(n+1)(n+2)]^{1/2}} \\ \xi &= \frac{(\text{Im}\alpha)^2}{[(\text{Re}\alpha)^2+(\text{Im}\alpha)^2]}, \qquad N=|\alpha|^2 \end{aligned} \tag{6.8.95}$$

$<\alpha|C^2|\alpha>$ 有同样结果，只需以 $1-\xi$ 代替 (6.8.95) 式中的 ξ, 故有

$$<\alpha|C^2+S^2|\alpha>=1-\frac{1}{2}e^{-N} \tag{6.8.96}$$

当 N 很大时，上式趋近于经典场结果 $\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$; 但当 N 很小时，上式又趋近于 1/2, 明显偏离于经典场结果.

图 6.20 给出 U 随 N 的变化曲线. 这曲线表明，对于相干态来说，$1/2\geq U\geq 1/4$. 只有当 (6.8.90) 式的两个等式均成立，才会有 (6.8.91) 等式 $U=\frac{1}{4}$ 成立. 若定义 (6.8.90) 两等式均成立的态为最小粒子数相位测不准态，由图 6.20 易见，相干态虽属最小测不准态，但还不是粒子数相位最小测不准态. 只有当 N 很大，$U\to 1/4$, 相干态才趋近粒子数相位最小测不准态所要求的 $U=1/4$.

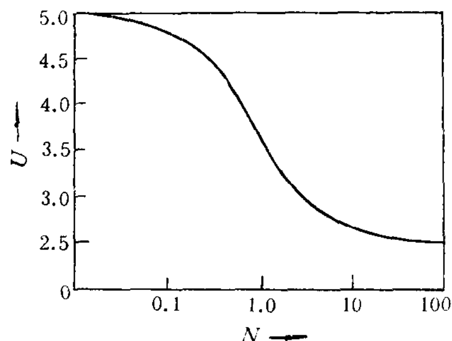


图 6.20　U 随 N 的变化曲线 (取自文献 [29])

粒子数相位测不准态 (NUS) 、压缩态 (SS) 由于在光通信、信息处理、精密测量与原子光谱等方面的可能应用，故显得很重要. 实现压缩态的标志是零拍探测的输出电流噪音低于相应的真空场起伏电流. 而实现 NUS 则是观察振幅压缩态，即光子计数探测的电流噪音低于散粒效应的电流噪音，表现为亚 Poisson 分布的电流噪音. 这些还要在非经典光场探测中讨论. SS 与 NUS 的相同处在于它们均属于非经典光场，不存在正定的密度矩阵 $P(\alpha)$ 表象，不可能通过相干态 (CS) 的叠加来实现. 虽然当 $N\to\infty$ 时，CS 的 $U\to 1/4$, 但对有限的 N 来说，CS 与 NUS 是明显区别开来的. 前者存在 P 表象为经典场，后者不存在 P 表象为非经典场.

6.9　非经典光场的探测

6.9.1　强度差的零拍探测技术

设想包括压缩态光在内的非经典光已经得到，接下来的问题是如何探测. 通常采用强度差的零拍探测技术. 如图 6.22 所示，将压缩态光 S_S 与相干光 C_S 投射到半反分束器上，压缩态光 E_S 与相干光 E_{LO} 可分别表示为

$$\begin{aligned}E_S&=\frac{a+a^\dagger}{2}\cos\omega t+\frac{-i(a-a^\dagger)}{2}\sin\omega t\\E_{LO}&=\frac{b+b^\dagger}{2}\cos\omega t+\frac{-i(b-b^\dagger)}{2}\sin\omega t\end{aligned} \tag{6.9.1}$$

在探测器 D_A, D_B 上探测到的光分别为

$$\begin{aligned}E_A&=\frac{1}{\sqrt{2}}(E_S-E_{LO})\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a^\dagger-b^\dagger}{2}e^{i\omega t}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a-b}{2}e^{-i\omega t}\end{aligned} \tag{6.9.2}$$

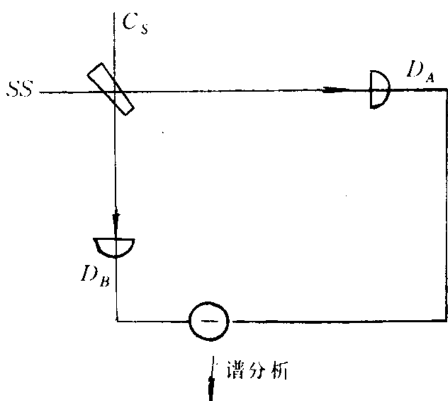


图 6.21　强度差的零拍探测

$$\begin{aligned} E_B &= \frac{1}{\sqrt{2}}(E_S + E_{LO}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a^\dagger + b^\dagger}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{a+b}{2}e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

E_{LO} 前负号“－”的引进，是因为全反射在介质的外面 (由空气到玻璃).E_B 中无负号，是因为全反射发生在内面 (由玻璃到空气，不产生 π 位相变化). 由探测器 D_A, D_B 出来的电流 i_A, i_B 经减法器“－”输出差拍信号 $i_A - i_B$, 进入谱分析器. 这一步非常重要，其作用为 E_{LO}, E_S 的噪音相抵，而 E_{LO} 与 E_S 的拍保留. 由 (6.9.2) 式

$$\begin{aligned} i_A - i_B &= a_A^\dagger a_A - a_B^\dagger a_B = \frac{1}{8}[(a^\dagger - b^\dagger)(a-b) - (a^\dagger + b^\dagger)(a+b)] \\ &= -\frac{1}{4}(a^\dagger b + b^\dagger a) \end{aligned} \tag{6.9.3}$$

注意到 E_{LO} 为相干态 $< b > = < b^\dagger > = 2\tilde{\beta}$, 故有

$$\begin{aligned} &< i_A - i_B > = -\frac{2\tilde{\beta}}{4} < a^\dagger + a > = -\tilde{\beta} < X > \\ &< (i_A - i_B)^2 > = \frac{1}{16} < (a^\dagger b + b^\dagger a)(a^\dagger b + b^\dagger a) > = \tilde{\beta}^2 < X^2 > \\ &< (\Delta(i_A - i_B))^2 > = \tilde{\beta}^2 < X^2 > - \tilde{\beta}^2 < X >^2 = \tilde{\beta}^2 < (\Delta X)^2 > \end{aligned} \tag{6.9.4}$$

由 (6.9.4) 式看到，由差电流保留下来的，即为我们感兴趣的 $X = \dfrac{a + a^\dagger}{2}$ 分量的噪音. 又若相干光 E_{LO} 相对于压缩态光发生 $\pi/2$ 相移，即 $b \to ib$, $b^\dagger \to -ib^\dagger$, 则同样可证

$$\begin{aligned} &< i_A - i_B > = \tilde{\beta} < \frac{-i(a - a^\dagger)}{2} > = \tilde{\beta} < Y > \\ &< (i_A - i_B)^2 > = \tilde{\beta}^2 < Y^2 > \end{aligned} \tag{6.9.5}$$

故有

$$< (\Delta(i_A - i_B))^2 > = \tilde{\beta}^2 < (\Delta Y)^2 > \tag{6.9.6}$$

于是发生 $\pi/2$ 相移后，保留的不再是 $< (\Delta X)^2 >$ 分量，而是 $< (\Delta Y)^2 >$, 即我们感兴趣的另一分量的噪音均方值. 当连续改变相干光 E_{LO} 的位相时，有时零拍后的噪音电流比 S.Q.L 噪音电流高，因 $< (\Delta Y)^2 > >$ 1/4; 有时又比 S.Q.L 噪音电流低，因 $< (\Delta X)^2 > <$ 1/4. 这样，就实现了压缩态观测 $< (\Delta X)^2 > = \frac{1}{4}e^{-2s}$, $< (\Delta Y)^2 > = \frac{1}{4}e^{2s}$.

6.9.2　当探测效率 $\eta \neq 1$ 的零拍探测 [27]

探测方法有零拍探测 (参考光 E_{LO} 的频率与压缩态光 E_S 的频率为相等) 与差拍探测 (E_{LO} 的频率与 E_S 的频率相异). 上面是指探测效率 $\eta = 1$ 的零拍探测. 如果 $\eta \neq 1$, 还需要作仔细分析. 先考虑压缩态光经分束后由于损耗等原因，仅有 $\eta < 1$ 的效率被探测器所探测. 于是探测器上光的湮没算子 d 与入射光的湮没算子 a 之间存在如下关系：

$$d = \eta^{1/2}a + (1-\eta)^{1/2}a_v \tag{6.9.7}$$

式中，a_v 为在分束过程中由于损耗而导致的真空起伏算子的影响. 按 (6.9.7) 式，d, $d^\dagger$ 仍满足 Boson 算子对易关系 $[d,d^\dagger]=1$, 而且

$$\begin{aligned} &< d^\dagger d >= \eta < a^\dagger a >= \eta < n > \\ &< d^\dagger d^\dagger dd >= \eta^2 < a^\dagger a^\dagger aa >= \eta^2 < n(n-1) > \end{aligned} \tag{6.9.8}$$

于是在光探测器上接收到的光子平均数及均方差值分别为

$$< m >=< d^\dagger d >= \eta < a^\dagger a >= \eta < n > \tag{6.9.9}$$

$$\begin{aligned} < (\Delta m)^2 > &= < d^\dagger d d^\dagger d > - < m >^2 \\ &= \eta^2 < (\Delta n)^2 > + \eta(1-\eta) < n > \end{aligned} \tag{6.9.10}$$

式中，$< (\Delta n)^2 >$, $< n >$ 分别由 (6.8.42), (6.8.49) 式给出. 对于 $|\alpha|^2 \gg \sinh^2 s$ 情形，有

$$\begin{aligned} < m > &\simeq \eta|\alpha|^2 \\ < (\Delta m)^2 > &\simeq \eta|\alpha|^2\{1+\eta[\exp(-2s)\cos^2(\phi-\theta/2) \\ &\quad + \exp(2s)\sin^2(\phi-\theta/2)-1]\} \end{aligned} \tag{6.9.11}$$

上式括号 { } 内的第一项即通常的相干探测的散粒噪音；而第二项按前面对 (6.8.54) 式的分析，当满足 $\cos(2\phi-\theta) > \tanh s$ 反聚束条件时为负，即 $< (\Delta m)^2 >$ 为亚 Poisson 分布.

为消除 (6.9.11) 式中的散粒噪音，就得用图 6.21 所示的减电流，即平衡差拍方法. 参照 (6.9.11) 式，并考虑到探测器量子效率 η, 输出的差光子 m_{12} 的平均值及均方值分别为

$$\begin{aligned} &< m_{12} >= 2\eta|\alpha_L| < E(\chi) > \\ &< (\Delta m_{12})^2 >= \eta|\alpha_L|^2\{1+\eta[4 < (\Delta E(\chi))^2 > -1]\} \end{aligned} \tag{6.9.12}$$

式中

$$\begin{aligned} &< E(\chi) >= \alpha\cos(\chi-\theta/2) \\ &< (\Delta E(\chi))^2 >= \frac{1}{4}[\exp(-2s)\cos^2(\chi-\theta/2)+\exp(2s)\sin^2(\chi-\theta/2)] \end{aligned} \tag{6.9.13}$$

由 $\chi = \dfrac{\pi}{2}+\phi_L$, 可通过 ϕ_L 调节，当 $\chi-\theta/2=0$ 时，压缩态光场有极大值 $< E(\theta/2) >= \alpha$, 而均方差值有极小值 $< (\Delta E(\theta/2))^2 >= \dfrac{1}{4}\exp(-2s)$. 这就是平衡差拍探测所达到的最佳工作状况.

6.9.3 压缩态光的全息探测 [31]

上面介绍了零拍探测压缩态光方法. 这种方法属光电子学方法. 实际上，用光学全息方法也能达到探测压缩态光的目的.

如图 6.22 所示，压缩态光 E_S 与参考的相干态光 E_{LO} 通过分析器后被记录在全息片 H_1 与 H_2 上. H_1 为负片，H_2 为正片. 又设 $H_1(H_2)$ 沿 $x(x')$ 方向移动，在 $H_1(H_2)$ 上的信号场将由下面的场算符确定：

$$\begin{gathered} e_1 = ta - ra_L, \quad e_2 = ra + ta_L \\ \arg t = \arg r \end{gathered} \tag{6.9.14}$$

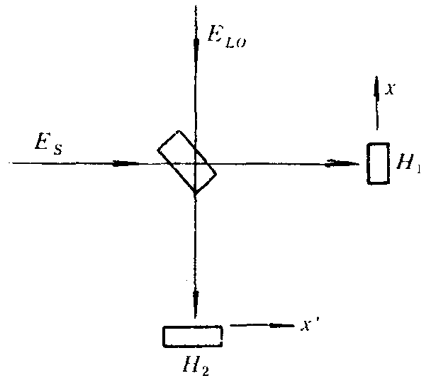


图 6.22 压缩态光的全息记录

(取自 Tan Weisi 等 [31])

式中，t, r 为分束器的透射与反射系数．a 为输入的压缩光算子被叠加在参考的相干态光 a_L 上．于是负片 H_1 上的平均光强为

$$< I_1 >=< e_1^\dagger e_1 >= |r|^2|\alpha_L|^2 + |t|^2 < a^\dagger a > -2|r||t||\alpha_L| < E(\chi) > \quad (6.9.15)$$

式中

$$< E(\chi) >=< \frac{1}{2}[\exp(-i\phi_L/2)a^\dagger + \exp(i\phi_L/2)a] >$$
$$\phi_L/2 = -\arg\alpha_L \quad (6.9.16)$$

设输入的压缩态光 E_S 与参考的相干光 E_{LO} 有相同的频率，于是由 (6.9.15) 式定义的 I_1 与时间无关．相似地，在正片 H_2 上的平均光强为

$$< I_2 >=< e_2^\dagger e_2 >= |t|^2|\alpha_L|^2 + |r|^2 < a^\dagger a > +2|r||t||\alpha_L| < E(\chi) > \quad (6.9.17)$$

因对负片、正片的分析是类似的，下面主要讨论负片 H_1. 将负片 H_1 上的平均光强 $< I_1 >$ 代入全息振幅透过率公式中，我们得

$$T_1 = (I_1\tau)^{\Gamma/2} = [|r|^2|\alpha_L|^2 + |t|^2 < a^\dagger a > -2|r||t||\alpha_L| < E(\chi) >]^{\Gamma/2}\tau^{\Gamma/2} \quad (6.9.18)$$

式中，τ 为曝光时间．(6.9.18) 式最后一项包含了压缩态光信息记录为：

$$2|r||t||\alpha_L| < E(\chi) >= |r||t| < a^\dagger a_L + aa_L^\dagger > \quad (6.9.19)$$

式中，$a^\dagger a_L$ 表示全息象，$aa_L^\dagger$ 表示孪生象．设参考光的振幅 α_L 很强，则 (6.9.18) 可近似地写为

$$T_1 \simeq (|r||\alpha_L|\tau^{1/2})^\Gamma[1 - \Gamma\frac{|t| < E(\chi) >}{|r||\alpha_L|}] \quad (6.9.20)$$

这样压缩态光的信息已被全息记录下来了．现讨论第 2 步即全息重构，将压缩态光信息检测出来．如图 6.23 所示，用相干态的参考光 E'_{LO} 通过负片 H_1, 其复数振幅输出为

$$\begin{aligned} < W' >=< a'_L T > &\simeq \alpha'_L(|r||\alpha_L|\tau^{1/2})^\Gamma(1 - 2\eta' < E(\chi) >) \\ \eta' &= \Gamma\frac{|t|}{|r||\alpha_L|} \end{aligned} \quad (6.9.21)$$

压缩态的 X 分量 $(a^\dagger a_L + aa_L^\dagger)$ 很容易从背景噪音中分离出来，只需将图 6.23 的 F

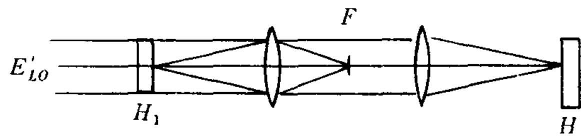


图 6.23 全息探测装置示意图 (取自 [31])

处，用黑斑将零级衍射谱挡掉就可以了．当背景去掉后，在负片 H′ 上的强度分布 I' 为算子 $W'W'^{\dagger}$ 所决定，即

$$
\begin{aligned}
W'W'^{\dagger} &= \eta^2 a_L'^{\dagger} a_L' (a_L^{\dagger} a + a^{\dagger} a_L)(a_L^{\dagger} a + a^{\dagger} a_L) \\
\eta &= \eta'(|r||t|\tau^{1/2})^{\Gamma}
\end{aligned} \tag{6.9.22}
$$

平均强度 $< I' >$ 及均方值 $< I'^2 >$ 分别为

$$
< I' > = < W'W'^{\dagger} > = \eta^2 |\alpha_L'|^2 [4|\alpha_L|^2 < E^2(\chi) > + < a^{\dagger} a >] \tag{6.9.23}
$$

$$
\begin{aligned}
< I'^2 > &= < W'W'^{\dagger} W'W'^{\dagger} > = \eta^4 < (a_L'^{\dagger 2} a_L'^2 + a_L'^{\dagger} a_L') \\
&\times [16(a_L^{\dagger 2} a_L^2 + a_L^{\dagger} a_L) E^4(\chi) + 8 a_L^{\dagger} a_L a^{\dagger} a E^2(\chi)] + a^{\dagger 2} a^2 + a^{\dagger} a >
\end{aligned} \tag{6.9.24}
$$

注意到 $< E^4(\chi) > = < [\Delta E^2(\chi)]^2 > + < E^2(\chi) >^2$，并应用 (6.9.23) 和 (6.9.24) 式，便得

$$
\begin{aligned}
&< (\Delta I')^2 > = < I'^2 > - < I' >^2 = \eta^4 |\alpha_L' \alpha_L|^4 \{16 \left(1 + \frac{1}{|\alpha_L|^2}\right) \\
&\times \left(1 + \frac{1}{|\alpha_L'|^2}\right) < [\Delta E^2(\chi)]^2 > + 16 \left(1 + \frac{1}{|\alpha_L|^2}\right) \frac{< E^2(\chi) >^2}{|\alpha_L'|^2} + 16 \frac{< E^2(\chi) >^2}{|\alpha_L|^2} \\
&+ \frac{< [\Delta(a^{\dagger} a)]^2 >}{|\alpha_L|^4} + \frac{8 < a^{\dagger} a >< E^2(\chi) >}{|\alpha_L'|^2 |\alpha_L|^2} + \frac{< (a^{\dagger} a)^2 >}{|\alpha_L'|^2 |\alpha_L|^2}\}
\end{aligned} \tag{6.9.25}
$$

当参考的相干光很强并满足下式：

$$
\frac{1}{|\alpha_L|^2} \ll 1, \quad \frac{< a^{\dagger} a >}{|\alpha_L|^2} \ll 1, \quad \frac{< E^2(\chi) >}{|\alpha'|^2} \ll 1 \tag{6.9.26}
$$

则方程 (6.9.25) 式可简化为

$$
< (\Delta I')^2 > = 16 \eta^4 |\alpha_L'|^4 |\alpha_L|^4 < [\Delta E^2(\chi)]^2 > \tag{6.9.27}
$$

设压缩态光算符 a, $a^{\dagger}$ 与相干态算符 b, $b^{\dagger}$ 间的关系为

$$
\begin{aligned}
a &= \cosh s b + \operatorname{sh} s e^{-i\theta} b^{\dagger} \\
a^{\dagger} &= \cosh s b^{\dagger} + \operatorname{sh} s e^{i\theta} b
\end{aligned} \tag{6.9.28}
$$

则由 (6.9.16) 式定义的 $E(\chi)$ 可表示为

$$
E(\chi) = \frac{1}{2}[e^s \cos(\phi_L/2 + \theta/2)\tilde{x} - e^{-s} \sin(\phi_L/2 + \theta/2)\tilde{y}] \tag{6.9.29}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\tilde{x} &= \frac{1}{2}(b^{\dagger} e^{i\theta/2} + b e^{-i\theta/2}) = 1/2(\tilde{b}^{\dagger} + \tilde{b}) \\
\tilde{y} &= \frac{i}{2}(b^{\dagger} e^{i\theta/2} - b e^{-i\theta/2}) = i/2(\tilde{b}^{\dagger} - \tilde{b})
\end{aligned} \tag{6.9.30}
$$

当 $\phi_L/2 + \theta/2 = -\pi/2$ 时，方程 (6.9.29) 式变为

$$
E(\chi) = \frac{1}{2} e^{-s} \tilde{y} \tag{6.9.31}
$$

方程 (6.9.27) 式变为

$$< (\Delta I')^2 >_{\min} = \eta'^4 |\alpha'_L \alpha_L|^4 e^{-4s} < (\Delta \tilde{y}^2)^2 > \tag{6.9.32}$$

按 $\tilde{y}$ 的定义 (6.9.30), 得

$$\begin{aligned} < \tilde{y}^2 > &= - < (\frac{\tilde{b} - \tilde{b}^\dagger}{4})^2 > = -(\frac{\beta - \beta^*}{2})^2 + 1/4 \\ < (\Delta \tilde{y}^2)^2 > &= < \tilde{y}^4 > - < \tilde{y}^2 >^2 \\ &= 1/16 < (\tilde{b} - \tilde{b}^\dagger)(\tilde{b} - \tilde{b}^\dagger)(\tilde{b} - \tilde{b}^\dagger)(\tilde{b} - \tilde{b}^\dagger) > - < \tilde{y}^2 >^2 \\ &= 1/8[1 - 2(\beta - \beta^*)^2] \quad . \end{aligned} \tag{6.9.33}$$

最小强度方差为

$$< (\Delta I')^2 >_{\min} = \frac{\eta^4}{8} |\alpha'_L|^4 |\alpha_L|^4 [1 - 2(\beta - \beta^*)^2] e^{-4s} \tag{6.9.34}$$

用同样方式可求得当 $\phi_L/2 + \theta/2 = 0$ 情形下的最大强度方差为

$$< (\Delta I')^2 >_{\max} = 4\eta^2 |\alpha'^4| |\alpha_L|^2 e^{4s} \tag{6.9.35}$$

故调节 E_{LO} 的相角 ϕ_L, 可使在 H' 上光强的方差在 $< (\Delta I')^2 >_{\min}$ 与 $< (\Delta I')^2 >_{\max}$ 之间变化.

根据全息片运动的速度 v 及全息片的空间分辨率 Δx, 可估算出压缩光信号可分辨的频率 $\Delta f = f^2 \dfrac{\Delta x}{v}$, 取 $\Delta x = 0.3 \times 10^{-4}$cm, $v = 3 \times 10^3$cm/s, $f = 10^5$Hz, 则得 $\Delta f = 100$Hz.

6.10 压缩态光的产生和放大

6.10.1 简并参量放大 (简并四波混频) 产生压缩态光的原理与实验结果 [32~34]

压缩态光场，经上面的讨论与分析，可理解为压缩态算子 a, $a^\dagger$ 的本征态. 而 a, $a^\dagger$ 又可通过场的湮没、产生算子 b, $b^\dagger$ 表述如下：

$$\begin{aligned} &a = \mu b + \nu b^\dagger, \quad a^\dagger = \mu b^\dagger + \nu^* b \\ &\mu = \cosh r, \quad \nu = \sinh r e^{-i\phi} \end{aligned} \tag{6.10.1}$$

而 b, $b^\dagger$ 的本征态即相干态. 但由上式表明的 b, $b^\dagger$ 的线性叠加后的 a, $a^\dagger$ 的本征态在物理上是如何实现的呢？非线性光学中的简并参量放大 (或简并四波混频) 已为我们提供了这种实现压缩态光的物理过程，只需对这一过程做一些初步的讨论就知道了. 在这两个非线性过程中，算子 a, $a^\dagger$ 满足如下方程 (简化了的):

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\gamma a + \epsilon a^\dagger \\ \frac{da^\dagger}{dt} &= -\gamma a^\dagger + \epsilon^* a \end{aligned} \tag{6.10.2}$$

式中， γ 为阻尼， ϵ 为泵浦波与非线性参量的乘积 (见图 6.24).

简并参量放大过程中，分子或原子体系在信号光 $a^\dagger e^{i\omega t}$ 的作用下，吸收一个频率为 2ω 的泵浦光子，并辐射出信号波光子与一个参量波光子，频率均为 ω, 故为简并的. 对于简并四波混频来说，便是同时吸收两个频率为 ω 的泵浦光子，并辐射出频率为 ω 的信

号光与参量光．这一由泵浦光转化为信号光就是方程 (6.10.2) 第 2 项所描述的．方程

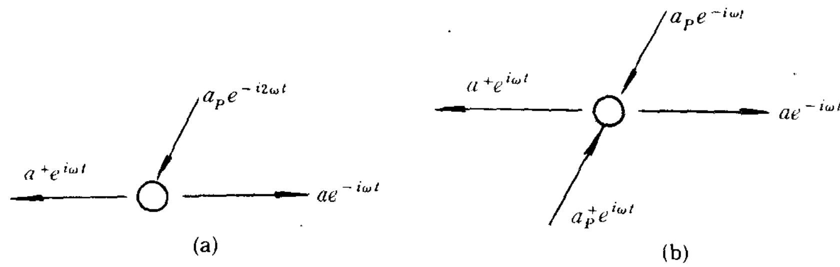


图 6.24 简并参量放大 (a) 与简并四波频 (b) 相互作用用图

(6.10.2) 去掉损耗项后，即简并参量放大方程 (2.2.22)，现参照 (2.2.23) 便得 (6.10.2) 的解．故输入信号光 $(a_0, a_0^\dagger)$ 经简并参量介质作用后为

$$
\begin{aligned}
a &= (a_0 \cosh\sqrt{\epsilon\epsilon^*}t + a_0^\dagger\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon^*}}\sinh\sqrt{\epsilon\epsilon^*}t)e^{-\gamma t} \\
a^\dagger &= (a_0^\dagger \cosh\sqrt{\epsilon\epsilon^*}t + a_0\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon^*}}\sinh\sqrt{\epsilon\epsilon^*}t)e^{-\gamma t}
\end{aligned} \tag{6.10.3}
$$

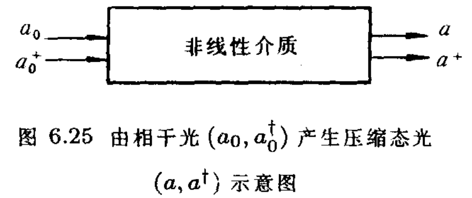


图 6.25 由相干光 $(a_0, a_0^\dagger)$ 产生压缩态光 $(a, a^\dagger)$ 示意图

将 (6.10.3) 式与 (6.10.1) 式比较，并略去衰减因子 $e^{-\gamma t}$，则得 $\mu = \cosh\sqrt{\epsilon\epsilon^*}t$, $\nu = \sinh\sqrt{\epsilon\epsilon^*}t$,$r = \sqrt{\epsilon\epsilon^*}t$. 这样，(6.10.3) 式恰表明一输入的相干态光 $(a_0, a_0^\dagger)$ 经非线性介质后，便得到压缩态输出光 $(a, a^\dagger)$. 其压缩度为 $r = \sqrt{\epsilon\epsilon^*}t$，正比于二阶非线性系数 χ^2(简并参量放大) 或 χ^3(简并四波混频)、泵浦功率、与相互作用时间 t.

到目前为止，通过四波混频与简并参量放大实现压缩态光均有实验结果报道，但以简并参量放大获得的压缩度较高，且理论与实验很好符合 [34]. 这里主要介绍简并参量放大实验结果，由此可以看到实现压缩的要求还是很高的．首先泵浦光的频率 ω_p 应是稳定的．由下转换产生的信号光与参量光的频率应是简并的，或接近于简并的，即一个泵浦光子 $\omega_p \to \omega_p/2 + \delta$, $\omega_p/2 - \delta$, δ 为一小量．已经报道，实现压缩态光装置 [34]，也并不是一个参量放大，而是一个振荡器 (见图 6.26). 腔对泵浦光 ω_p、参量光与信号光 $\omega_p/2 + \delta$, $\omega_p/2 - \delta$ 均为共振．工作条件接近于阈值，但在阈值以下．这样有较好的选模，也保证了模的稳定性．因为在阈值以上工作时，易产生多模，易出现激光振荡中振荡频率的跳跃现象．在阈值以下工作，即使是多模，但总是接近简并 $\omega = \omega_p/2$ 的模占优势．其行为可用单模理论来近似．如图 6.26 所示，产生 0.53μ 泵光是一个由工作物质 Nd:YAG 激励的环形激光器． $Ba_2NaNb_5O_{15}$ 为倍频晶体．泵浦光的频率稳定为 1MHz，线宽 100kHz，由于 ω 光、2ω 光的偏振互相正交，在输出端置检偏器，0.53μ 的光输入光参量振荡器．1.06μ 作为参量光进入检测系统．用 0.53μ 光泵浦参量振荡器，振荡器内有 MgO:$LiNbO_3$ 非线性晶体实现参量转换，并工作于相位匹配温度 98°C.M 对 0.53μ, 1.06μ 的透过率分别为 3.5% 和 0.06%.M' 对 0.53μ, 1.06μ 的透过率分别为 4.3% 和 7.3%. 由 M' 输出的压缩态光 E_S 经检偏后进入零拍探测器，与由泵浦光来的 E_{LO} 光在分束处汇合．光二极管 1,2 输出电流 i_1, i_2 之差 $\Delta i(t) = i_1(t) - i_2(t)$，进入谱分析器，其谱密度 $\Phi(\nu,\theta)$ 为

$$
\Phi(\nu,\theta) = \int < \Delta i(t)\Delta i(t+\tau) > e^{-i\nu\tau}d\tau(Q_1 i_1 + Q_2 i_2)[1 + \rho T_0 \beta\eta^2 S(\Omega,\theta)] \tag{6.10.4}
$$

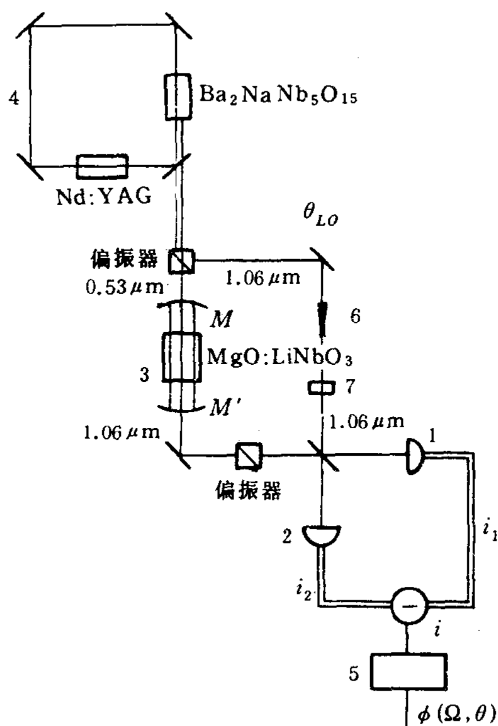


图 6.26 产生压缩态光的实验原理图
1,2 光二极管； 3 光参量振荡器 $MgO:LiNbO_3$； 4 环形激光器； 5 谱分析器； 6 参考光 (Local 振荡)； 7 滤光片
(参照 Wu, L.A. [34])

式中，Q_1, Q_2 分别为探测器 1,2 每一光脉冲产生的总的电荷数； ρ, T_0, β, η^2 为由腔的损耗与探测器的量子效率等确定的参量； $\Omega=\nu/\gamma$, γ 为方程 (6.10.2) 式中的阻尼系数； θ 为参考的相干态光 E_{LO} 相对于压缩态光的相位延迟. 当压缩度 $r=0$ 的噪声水平为

$$\Phi(r,\theta)|_{r=0}=Q_1i_1+Q_2i_2$$

于是得规一化的噪音水平

$$R(\nu,\theta)=\frac{\Phi(\nu,\theta)}{<Q_1i_1+Q_2i_2>}=1+\rho T_0\beta\eta^2S(\Omega,\theta) \tag{6.10.5}$$

在探测实验中，用电压 $V(\theta)$ 来表示噪音电压水平. 图 6.27 所示为 $V(\theta)$ 随 θ 的变化曲线. 图中曲线 i 为光参量振荡输出亦即压缩态光被挡掉，仅剩下参考相干光一路的噪音 V_0, 不随 θ 变化. 曲线 ii 为加上光参量振荡的输出亦即压缩态光后 $V(\theta)$ 随 θ 的变化. 明显看出，压缩态光的噪音水平随 θ 做周期性的变化，最低处的噪音功率要比真空场噪音功率减少约 61%. 曲线 iii 为放大器噪音水平 V_A 接近于图的底端，很小. 在曲线 i～ iii 中， $\nu/2\pi$=1.6MHz. 曲线 iv 为测量零拍探测中一臂的直流光电流输出，可看成真空起伏电压 V_0 与 $V(\theta)$ 中直流分量的叠加. 曲线 iv 的值介于 $i\sim ii$ 之间，与 V_0, $V(\theta)$ 迥异.

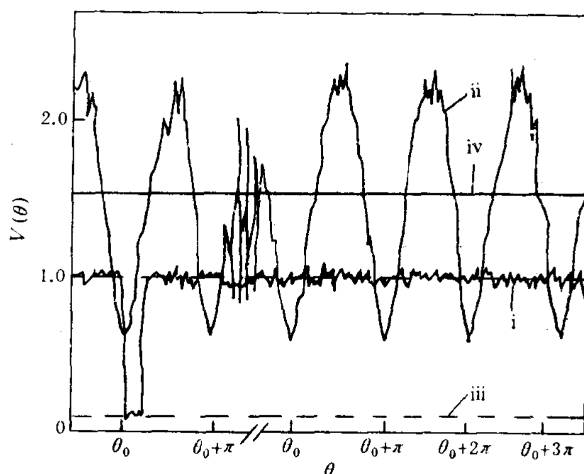


图 6.27 噪音电压水平 $V(\theta)$ 随参考激光相角 θ 的变化曲线
(参照 [34])

根据图 6.27 中的 V_0, $V(\theta)$, V_A, 可得出

$$R(\nu,\theta)=\frac{V^2(\theta)-V_A^2}{V_0^2-V_A^2} \tag{6.10.6}$$

用图 6.27 中的 V_0, V_A 及 $V(\theta)$ 的数值代入，可得 R 的极大、极小值分别为 $R_+=48\pm0.4$, $R_-=0.39\pm0.03$, 而参数 $\rho T_0\beta\eta^2=0.85\times0.94\times0.89\times0.95=0.67$, 于是由 (6.10.5) 式得对应于 R_- 的 $S_-=-0.91.R_-=0.39$, 相当于噪音功率比真空场噪音功率 $R_v=1$ 减少了 61%.

6.10.2 简并参量放大与简并四波混频满足的 Langevin 方程与 Fokker–Planck 方程的解 [35]

方程 (6.10.2) 是经简化了的. 参照辐场阻尼振子理论 (5.3.38) 式，在场算子的运动方程中既然包含阻尼，就必然要引进无规力，否则场算子所满足的对易关系将被破坏. 同样 (6.10.2) 式中也包含阻尼，也应引进无规力. F, $F^\dagger$ 使得场算符 a, $a^\dagger$ 在求统计平均的意义下，对易关系应能得以满足，即

$$
\begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = -\gamma a + \epsilon a^\dagger + F \\
&\frac{da^\dagger}{dt} = -\gamma a^\dagger + \epsilon^* a + F^\dagger \\
&< [a, a^\dagger] >= 1
\end{aligned}
\tag{6.10.7}
$$

这就是简并参量放大 (或简并四波混频) 满足的 Langevin 方程. 如所周知，在描述非线性随机系统的理论中，除了 Langevin 方程外，还有 Fokker-Planck 方程. 一般来说，非线性随机系统的 Langevin 方程要比相应的 Fokker-Planck 方程容易处理. 特别是产生压缩态光的量子光学系统中所遇到的 Fokker–Planck 方程，扩散系数为负或零，解有可能发散. 但可从发散的形式解出发，在求物理量的统计平均时，发散困难可以避免. 在这个基础上，我们研究了该解在简并参量放大或简波四波混频过程产生压缩态光中的应用. 这就是本节和下几节所要做的. 为此，我们必须先导出简并参量放大 (简并四波混频) 的 Fokker-Planck 方程，然后求其解，并应用于压缩态的产生中.

简并参量放大为一双光子过程，其哈密顿量可写为

$$H = H_0 + V + W \tag{6.10.8}$$

式中

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \hbar\omega_c a^\dagger a + \sum \hbar\omega_j b_j^\dagger b_j \\
V = \hbar(\sum k_j b_j a^\dagger + \sum k_j^* b_j^\dagger a), &\quad W = -\frac{i\hbar}{2}(\varepsilon a^{\dagger 2} - \varepsilon^* a^2)
\end{aligned}
\tag{6.10.9}
$$

简并四波混频的哈密顿量有类似形式：

$$W = \hbar ck(b_1^\dagger b_2^\dagger a_1 a_2 + b_1 b_2 a_1^\dagger a_2^\dagger) \tag{6.10.10}$$

在 (6.10.9) 式中， H_0 为阻尼振子和热库的自由哈密顿， V 为阻尼振子和热库的相互作用能， W 为外场与阻尼振子的相互作用能. 由 (6.10.9) 式可推导出简并参量情形的约化密度矩阵的运动方程，在 P 表示中，准概率 P 满足的 c 数方程即 Fokker–Planck 方程

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}P(\alpha, \alpha^*, t) \;\; = \;\; & k\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\alpha^*\right)P - \left(\varepsilon\alpha^*\frac{\partial}{\partial\alpha} + \varepsilon^*\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)P \\
& +\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\varepsilon\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\varepsilon^*\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)P + 2k\bar{n}\frac{\partial^2 P}{\partial\alpha\partial\alpha^*}
\end{aligned}
\tag{6.10.11}
$$

式中， $k = \gamma/2, \gamma$ 为原子横向弛豫时间， $\bar{n}$ 为热库的平均光子数. 通常 (6.10.11) 式中的最后一项因 $\bar{n} \ll 1$ 而略去. 而实际上在泵浦场中，除了由 W 描述的相干相互作用 (即与阻尼振子的相位匹配的那部分相干场) 外，还有位相不匹配的非相干相互作用. 这部分

等同于场与热库的相互作用，也包括在 $\bar{n}$ 中，故 $\bar{n}$ 不能去掉．此外，(6.10.11) 式中 ε 可写为 $\varepsilon=|\varepsilon|e^{i\phi}$, 只要 ϕ 为常数，作变换 $\alpha\to\alpha e^{i\phi/2}$, $\alpha^*\to\alpha^* e^{-i\phi/2}$, 则相角可被消去．故不失去一般性，在解方程 (6.10.11) 时 ε 可取为实数．

6.10.3 简并参量放大的 Fokker–Planck 方程的解

为解 (6.10.11) 式，首先采取如下变换：

$$P(\alpha,\alpha^*,t)=e^{-a\left(\frac{\alpha^2+\alpha^{*2}}{2}\right)+b\alpha\alpha^*}Q(\alpha,\alpha^*,t) \tag{6.10.12}$$

将其中关于 α, α^* 的一次导数项消去．将 (6.10.12) 式代入 (6.10.11) 式，并选定参数 a, b 使得一次导数 $\dfrac{\partial Q}{\partial\alpha}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial\alpha^*}$ 消去，于是有

$$a=\frac{1}{2}\left[\frac{k+\varepsilon}{\varepsilon-2k\bar{n}}+\frac{k-\varepsilon}{\varepsilon+2k\bar{n}}\right],\quad b=\frac{1}{2}\left[\frac{k+\varepsilon}{\varepsilon-2k\bar{n}}-\frac{k-\varepsilon}{\varepsilon+2k\bar{n}}\right] \tag{6.10.13}$$

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha^{*2}}\right)+2k\bar{n}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}-\frac{1}{4}\left[\frac{(k+\varepsilon)^2}{\varepsilon-2k\bar{n}}-\frac{(k-\varepsilon)^2}{\varepsilon+2k\bar{n}}\right](\alpha^2+\alpha^{*2})\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\left[\frac{(k+\varepsilon)^2}{\varepsilon-2k\bar{n}}-\frac{(k-\varepsilon)^2}{\varepsilon+2k\bar{n}}\right]\alpha\alpha^*+k\right\}Q=\frac{\partial}{\partial t}Q(\alpha,\alpha^*,t)\end{aligned} \tag{6.10.14}$$

又设

$$\alpha=\frac{\beta+i\tilde{\beta}}{\sqrt{2}},\quad \alpha^*=\frac{\beta-i\tilde{\beta}}{\sqrt{2}} \tag{6.10.15}$$

将 (6.10.15) 式代入 (6.10.14) 式，便得

$$\left\{\left(\frac{\varepsilon}{2}+k\bar{n}\right)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-\left(\frac{\varepsilon}{2}-k\bar{n}\right)\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\beta}^2}-\frac{(k-\varepsilon)^2\beta^2}{2(\varepsilon+2k\bar{n})}+\frac{(k+\varepsilon)^2\tilde{\beta}^2}{2(\varepsilon-2k\bar{n})}\right\}Q=\frac{\partial Q}{\partial t} \tag{6.10.16}$$

由 (6.10.16) 式等号左端第二项看出，当 $-(\frac{\varepsilon}{2}-k\bar{n})\le 0$ 时，$\tilde{\beta}$ 的扩散系数为负或零；如果泵浦场干扰很大，使 $k\bar{n}>\varepsilon/2$, 则扩散系数为正，不能实现压缩．现主要讨论 $\dfrac{\varepsilon}{2}-k\bar{n}>0$, $\dfrac{\varepsilon}{2}+k\bar{n}>0$ 情形，设

$$\begin{gathered}c=\frac{k-\varepsilon}{\varepsilon+2k\bar{n}},\quad \tilde{c}=\frac{k+\varepsilon}{\varepsilon-2k\bar{n}}\\Q_{mn}=\exp\left[-\lambda_m\left(\frac{\varepsilon}{2}+k\bar{n}\right)t-\tilde{\lambda}_n\left(\frac{\varepsilon}{2}-k\bar{n}\right)t\right]Q_m(\beta)\tilde{Q}_n(\tilde{\beta})\end{gathered} \tag{6.10.17}$$

将 (6.10.17) 式代入 (6.10.16) 式，便得

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}-c^2\beta^2+\lambda_m\right)Q_m(\beta)=0\\\left(-\frac{\partial^2}{\partial\tilde{\beta}^2}+\tilde{c}^2\tilde{\beta}^2+\tilde{\lambda}_n\right)\tilde{Q}_n(\tilde{\beta})=0\end{gathered} \tag{6.10.18}$$

其解为

$$\lambda_m = (2m+1)c, \quad \tilde{\lambda}_n = (2n+1)\tilde{c}$$

$$N_m = \left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\pi}2^m m!}\right)^{1/2}, \quad N_n = (\frac{\sqrt{\tilde{c}}}{\sqrt{\pi}2^n n!})^{1/2} \tag{6.10.19}$$

$$Q_m = N_m e^{-c\beta^2/2} H_m(\sqrt{c}\beta), \quad \tilde{Q}_n(\tilde{\beta}) = N_n e^{\tilde{c}\tilde{\beta}^2/2} H_n(\sqrt{\tilde{c}} i\tilde{\beta})$$

$$Q_{mn} = \exp[-(m+1/2)(k-\varepsilon)t - (n+1/2)(k+\varepsilon)t] Q_m(\beta)\tilde{Q}_n(\tilde{\beta})$$

因 $\varepsilon/2 + k\bar{n} > 0$, $\frac{\varepsilon}{2} - k\bar{n} > 0$, 故 $\beta \to \infty$ 时 $Q_m(\beta)$ 收敛, $\tilde{\beta} \to \infty$ 时 $\tilde{Q}_n(\tilde{\beta})$ 发散的情形. 这里仍用 Q_{mn} 作格林函数, 并按 (6.10.12) 式得

$$\begin{aligned} P_{mn} \quad = \quad & \exp\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{k+\varepsilon}{\varepsilon - 2k\bar{n}} + \frac{k-\varepsilon}{\varepsilon + 2k\bar{n}}\right)(\beta^2 - \tilde{\beta}^2)\right. \\ & \left. + \frac{1}{4}\left(\frac{k+\varepsilon}{\varepsilon - 2k\bar{n}} - \frac{k-\varepsilon}{\varepsilon + 2k\bar{n}}\right)(\beta^2 + \tilde{\beta}^2)\right] Q_{mn} \end{aligned} \tag{6.10.20}$$

参照 c, $\tilde{c}$ 的定义 (6.10.17) 式, 将上式写为

$$P_{mn} = \exp\left(-\frac{1}{2}c\beta^2 + \frac{1}{2}\tilde{c}\tilde{\beta}^2\right) Q_{mn} \tag{6.10.21}$$

格林函数 $P(\beta, \tilde{\beta}, t; \beta_0, \tilde{\beta}_0)$ 为

$$P(\beta, \tilde{\beta}, t; \beta_0, \tilde{\beta}_0) = N \sum \varepsilon_{mn} P_{mn} \tag{6.10.22}$$

$$\varepsilon_{mn} = N_m N_n H_m(\sqrt{c}\beta_0) H_n(\sqrt{\tilde{c}} i\tilde{\beta}_0) \tag{6.10.23}$$

式中, N 为规一化系数. 为求出和式 (6.10.22), 利用如下等式:

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{\left(\dfrac{e^{-(k-\varepsilon)t}}{2}\right)^n}{n!} H_n(\sqrt{c}\beta) H_n(\sqrt{c}\beta_0) \\ = & \frac{\exp\left[\dfrac{2c\beta\beta_0 e^{-(k-\varepsilon)t} - c(\beta^2 + \beta_0^2)e^{-2(k-\varepsilon)t}}{1 - e^{-2(k-\varepsilon)t}}\right]}{(1 - e^{-2(k-\varepsilon)t})^{1/2}} \end{aligned} \tag{6.10.24}$$

$$\begin{aligned} P(\beta, \tilde{\beta}, t; \beta_0, \tilde{\beta}_0) = & N \textstyle\sum_n N_n^2 \exp\left[-n(k-\varepsilon)t - c\beta^2 - \dfrac{k-\varepsilon}{2}t\right] H_n(\sqrt{c}\beta) H_n(c\beta_0) \\ & \times \textstyle\sum_n N_n^2 e^{-n(\varepsilon+k)t + \tilde{c}\tilde{\beta}^2 - \frac{\varepsilon+k}{2}t H_n(\sqrt{\tilde{c}} i\tilde{\beta}) H_n(\sqrt{\tilde{c}} i\beta_0)} \\ = & \frac{N\sqrt{c\tilde{c}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1 - e^{2(\varepsilon-k)t}}} \exp\left[-\frac{k-\varepsilon}{2}t + \frac{2c\beta\beta_0 e^{-(k-\varepsilon)t} - c(\beta^2 + \beta_0^2)e^{-2(k-\varepsilon)t} - c\beta^2}{1 - e^{-2(k-\varepsilon)t}}\right] \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1 - 2e^{-2(\varepsilon-k)t}}} \exp\left[-\frac{\varepsilon+k}{2}t + \frac{-2\tilde{c}\tilde{\beta}\tilde{\beta}_0 e^{-(\varepsilon+k)t} + \tilde{c}(\tilde{\beta}^2 + \tilde{\beta}_0^2)e^{-2(\varepsilon+k)t} + c\tilde{\beta}^2}{1 - e^{-2(\varepsilon+k)t}}\right] \\ = & \frac{N\sqrt{c\tilde{c}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{1 - e^{-2(k-\varepsilon)t}}} \exp\left[-\frac{k-\varepsilon}{2}t - \frac{c(\beta - \beta_0 e^{-(k-\varepsilon)t})^2}{1 - e^{-2(k-\varepsilon)t}}\right] \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1 - e^{-2(\varepsilon+k)t}}} \exp\left[-\frac{\varepsilon+k}{2}t + \frac{\tilde{c}(\tilde{\beta} - \tilde{\beta}_0 e^{-(\varepsilon+k)t})^2}{1 - e - 2(\varepsilon+k)t}\right] \end{aligned} \tag{6.10.25}$$

在 (6.10.25) 式中，将规一化系数形式地取为

$$
\begin{aligned}
N \quad = \quad & \frac{\pi}{\sqrt{c\tilde{c}}}\left\{\int \exp\left[-\frac{k-\varepsilon}{2}t-\frac{c(\beta-\beta_0 e^{-(k-\varepsilon)t})^2}{1-e^{-2(k-\varepsilon)t}}\right]\frac{d\beta}{\sqrt{1-e^{-2(k-\varepsilon)t}}}\right. \\
& \left.\times\int \exp\left[-\frac{\varepsilon+k}{2}t+\frac{\tilde{c}(\tilde{\beta}-\tilde{\beta}_0 e^{-(\varepsilon+k)t})^2}{1-e^{-2(\varepsilon+k)t}}\right]\frac{d\tilde{\beta}}{\sqrt{1-e^{-2(\varepsilon+k)t}}}\right\}^{-1}
\end{aligned} \tag{6.10.26}
$$

这样取定 N 后，有

$$
\int\int P(\beta,\tilde{\beta},t;\beta_0,\tilde{\beta}_0)d\beta d\tilde{\beta}=1 \tag{6.10.27}
$$

令

$$
\begin{aligned}
x &= (\beta-\beta_0 e^{-(k-\varepsilon)t})/\sqrt{1-e^{-2(k-\varepsilon)t}} \\
y &= (\tilde{\beta}-\tilde{\beta}_0 e^{-(\varepsilon+k)t})/\sqrt{1-e^{-2(\varepsilon+k)t}}
\end{aligned} \tag{6.10.28}
$$

由上述方程可求得如下量子起伏：

$$
\begin{aligned}
&<(\beta-\beta_0 e^{-(k-\varepsilon)t})^2>=(1-e^{-2(k-\varepsilon)t})\frac{\int x^2 e^{-cx^2}dx}{\int e^{-cx^2}dx} \\
&=(1-e^{-2(k-\varepsilon)t})\left(-\frac{\partial}{\partial c}\ln\int e^{-cx^2}dx\right)=\frac{1}{2c}(1-e^{-2(k-\varepsilon)t})
\end{aligned} \tag{6.10.29}
$$

$$
\begin{aligned}
&<(\tilde{\beta}-\tilde{\beta}_0 e^{-(\varepsilon+k)t})^2>=(1-e^{-2(k+\varepsilon)t})\frac{\int y^2 e^{\tilde{c}y^2}dy}{\int e^{\tilde{c}y^2}dy} \\
&=(1-e^{-2(\varepsilon+k)t})\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{c}}\ln\int e^{\tilde{c}y^2}dy\right) \\
&=(1-e^{-2(\varepsilon+k)t})\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{c}}\ln(\tilde{c}^{-\frac{1}{2}}\int e^{z^2}dz)\right)=-\frac{1}{2\tilde{c}}(1-e^{-2(\varepsilon+k)t})
\end{aligned} \tag{6.10.30}
$$

由 (6.10.28) 和 (6.10.29) 式给出 α 的实部 x_1, 虚部 x_2 的正规编序方差为

$$
\begin{aligned}
&<:(\Delta x_1)^2:>=<\left(\frac{\beta-\beta_0 e^{-(k-\varepsilon)t}}{\sqrt{2}}\right)^2>=\frac{1}{4}\frac{\varepsilon+2k\bar{n}}{k-\varepsilon}(1-e^{-2(k-\varepsilon)t}) \\
&<:(\Delta x_2)^2:>=<\left(\frac{\tilde{\beta}-\tilde{\beta}_0 e^{-(k+\varepsilon)t}}{\sqrt{2}}\right)^2>=-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon-2k\bar{n}}{k+\varepsilon}(1-e^{-2(k+\varepsilon)t})
\end{aligned} \tag{6.10.31}
$$

实际量子起伏应为 [39]

$$
\begin{aligned}
&<(\Delta x_1)^2>=\frac{1}{4}+<:(\Delta x_1)^2:>=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{\varepsilon+2k\bar{n}}{k-\varepsilon}(1-e^{-2(k-\varepsilon)t}) \\
&<(\Delta x_2)^2>=\frac{1}{4}+<:(\Delta x_2)^2:>=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon-2k\bar{n}}{k+\varepsilon}(1-e^{-2(k+\varepsilon)t})
\end{aligned} \tag{6.10.32}
$$

现对 (6.10.32) 作进一步讨论. 当工作于阈值以下, $k-\varepsilon\geq 0$, 压缩分量为

$$
\begin{aligned}
&<(\Delta x_2)^2>\geq\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{k+\varepsilon}\geq 1/8 \\
&<(\Delta x_1)^2><(\Delta x_2)^2>\simeq\frac{1}{16}\left(1+\frac{\varepsilon}{k-\varepsilon}\right)\left(1-\frac{\varepsilon}{k+\varepsilon}\right)\geq 1/16
\end{aligned} \tag{6.10.33}
$$

最大压缩 1/8 为真空起伏 1/4 的 1/2.

若工作于阈值以上， $k-\varepsilon<0$, 且 $\varepsilon \gg k$,t 很大时

$$
\begin{aligned}
<(\Delta x_2)^2>&=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{k+\varepsilon}(1-e^{-2(k+\varepsilon)t})\simeq\frac{1}{4}e^{-2\varepsilon t}\\
<(\Delta x_1)^2>&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{\varepsilon}{\varepsilon-k}(e^{2(\varepsilon-k)t}-1)\simeq\frac{1}{4}e^{2\varepsilon t}
\end{aligned}
\tag{6.10.34}
$$

$<(\Delta x_1)^2>$, $<(\Delta x_2)^2>$ 仍满足测不准关系

$$
<(\Delta x_1)^2><(\Delta x_2)^2>\geq 1/16
$$

上面求方差的方法，还可以推广到求 $2m$ 差的情形．定义 m 阶矩 $M^{(m)}$ 为

$$
M^{(m)}=\frac{\int y^{2m}e^{\tilde{c}y^2}dy}{\int e^{\tilde{c}y^2}dy}
\tag{6.10.35}
$$

$$
\frac{\partial M^{(m-1)}}{\partial\tilde{c}}=\frac{\int y^{2m}e^{\tilde{c}y^2}dy}{\int e^{\tilde{c}y^2}dy}-\frac{\int y^{2}e^{\tilde{c}y^2}dy}{\int e^{\tilde{c}y^2}dy}\frac{\int y^{2(m-1)}e^{\tilde{c}y^2}dy}{\int e^{\tilde{c}y^2}dy}
$$

即

$$
M^{(m)}=M^{(m-1)}M^{(1)}+\frac{\partial}{\partial\tilde{c}}M^{(m-1)}
\tag{6.10.36}
$$

由 (6.10.30) 式知 $M^{(1)}=-1/2\tilde{c}$, 则应用递推关系可求得 $M^{(m)}$. 应用 (6.10.36) 式，并设 $M^{(m)}\propto(\tilde{c})^{-m}$, 得

$$
\begin{aligned}
&\frac{M^{(m)}}{M^{(m-1)}}=M^{(1)}+\frac{\partial}{\partial\tilde{c}}\ln M^{(m-1)}=-\frac{1}{2\tilde{c}}-\frac{m-1}{\tilde{c}}=-\frac{(m-\frac{1}{2})}{\tilde{c}}\\
&M^{(m)}=\frac{M^{(m)}}{M^{(m-1)}}\cdot\frac{M^{(m-1)}}{M^{(m-2)}}\cdots M^{(1)}=\frac{(-1)^m(m-\frac{1}{2})\cdots(\frac{1}{2})}{(\tilde{c})^m}
\end{aligned}
\tag{6.10.37}
$$

应用这些关系容易计算表现光强起伏的二阶相关函数 g_2 及光子偏离 Poisson 分布的正规编序方差 $<(\Delta n)^2>-<n>$ 等量．由 (6.10.30) 式知方差即 1 阶矩 $M^{(1)}$ 与 $(1-e^{-2(k+\varepsilon)t})$ 的乘积，而 $2m$ 差 $<(\beta-\beta_0e^{-(k-\varepsilon)t})^{2m}>$ 即 m 阶 $M^{(m)}$ 与 $(1-e^{-2(k+\varepsilon)t})^m$ 的乘积．

将场算符 a, $a^\dagger$ 在 P 表示的 c 数 α, α^* 用平均值 α_0,α_0^* 表示，并设 $\alpha_0=|\alpha_0|e^{i\theta}$, 且

$$
\alpha=\alpha_0+\Delta\alpha,\ \alpha^*=\alpha_0^*+\Delta\alpha^*
\tag{6.10.38}
$$

于是有

$$
\begin{aligned}
<a^\dagger a^\dagger aa>&=<(\alpha_0^*+\Delta\alpha^*)(\alpha_0^*+\Delta\alpha^*)(\alpha_0+\Delta\alpha)(\alpha_0+\Delta\alpha)>\\
&=<(\Delta\alpha^*)^2(\Delta\alpha)^2>+\alpha_0^{*2}<(\Delta\alpha)^2>+<(\Delta\alpha^*)^2>\alpha_0^2+\alpha_0^{*2}\alpha_0^2
\end{aligned}
\tag{6.10.39}
$$

又注意到

$$
\begin{aligned}
<(\Delta\alpha)^2>&=<(\Delta\alpha^*)^2>=\frac{<(\Delta\beta)^2-(\Delta\tilde{\beta})^2>}{2}\\
<(\Delta\alpha)^2(\Delta\alpha^*)^2>&=<(\Delta\beta+i\Delta\tilde{\beta})^2(\Delta\beta-i\Delta\tilde{\beta})^2>/4\\
&=<(\Delta\beta)^2+(\Delta\tilde{\beta})^2>/4
\end{aligned}
\tag{6.10.40}
$$

于是有二阶相关函数

$$
\begin{aligned}
g_2 &= \frac{< a^\dagger a^\dagger aa >}{< a^\dagger a >^2} = 1 + \frac{\cos 2\theta < (\Delta\beta)^2 - (\Delta\tilde{\beta})^2 >}{|\alpha_0|^2} \\
&+ \frac{< (\Delta\beta)^4 + 2(\Delta\beta)^2(\Delta\tilde{\beta})^2 + (\Delta\tilde{\beta})^4 >}{4|\alpha_0|^4} \quad .
\end{aligned} \tag{6.10.41}
$$

等号右端第三项可用 (6.10.37) 式计算，第二项仅涉及一阶矩，与压缩态密切相关. 当 α_0 很大，第三项的影响可略去时，第二项大于零或小于零决定了 g_2 大于 1 或小于 1, 亦即群聚或反群聚. 这样就将群聚、反群聚通过方差 $< (\Delta\beta)^2 - (\Delta\tilde{\beta})^2 >$ 与压缩态联系起来.

偏离 poisson 分布的量 $< \Delta n^2 > - < n >$ 可计算如下：

$$
\begin{aligned}
&< (\Delta n)^2 > - < n > = < a^\dagger a^\dagger aa > - < a^\dagger a >^2 \\
&= |\alpha_0|^2 \cos 2\theta < (\Delta\beta)^2 - (\Delta\tilde{\beta})^2 > + < (\Delta\beta)^4 + 2(\Delta\beta)^2(\Delta\tilde{\beta})^2 + (\Delta\tilde{\beta})^4 >
\end{aligned} \tag{6.10.42}
$$

总之，负扩散系数的 Fokker-Planck 方程的解虽然在 $\tilde{\beta}$(或 β)$\to\infty$ 时发散的，但并不妨碍利用它来求物理量的平均值. 正像 (6.10.30) 式所表现的那样，无限大已被微分掉，不影响最后计算结果.

6.10.4 简并四波混频的 Fokker-Planck 方程的解

产生压缩态的另一重要方案即后向简并四波混频 (见图 6.28).

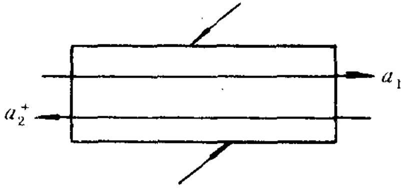


图 6.28 后向简并四波混频

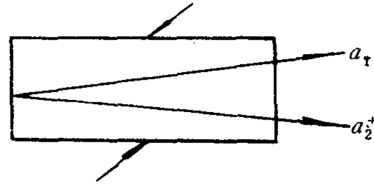


图 6.29 前向简并四波混频

参照文献 [36], 其 Langevin 方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt} &= -ka_1 + i\varepsilon a_2^\dagger + F_1 \\
\frac{da_2^\dagger}{dt} &= -ka_2^\dagger + i\varepsilon a_1 + F_2^\dagger
\end{aligned} \tag{6.10.43}
$$

令

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{a_2^\dagger e^{i\pi/4} + a_1 e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}}, \quad a^\dagger = \frac{a_2^\dagger e^{i\pi/4} - a_1 e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}} \\
F &= \frac{F_2^\dagger e^{i\pi/4} + F_1 e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}}, \quad F^\dagger = \frac{F_2^\dagger e^{i\pi/4} - F_1 e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{6.10.44}
$$

则 $[a, a^\dagger] = [a_1, a_2^\dagger] = 1$, 但 a, $a^\dagger$ 不是厄米共轭的. 由方程 (6.10.43) 和 (6.10.44) 式得 Langevin 方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}a &= -ka + \varepsilon a^\dagger + F \\
\frac{d}{dt}a^\dagger &= -ka^\dagger - \varepsilon a + F^\dagger
\end{aligned} \tag{6.10.45}
$$

对应的 Hamilton 及 Fokker-Planck 方程为

$$
\begin{aligned}
H &= i\hbar k a^\dagger a + \hbar\left\{i\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)a^{\dagger 2} - i\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)a^2\right\} \\
\frac{\partial P}{\partial t} &= \left\{k\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\alpha^*\right) - \varepsilon\left(\alpha^*\frac{\partial}{\partial\alpha} - \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha^{*2}}\right) + 2k\bar{n}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}\right\}P
\end{aligned} \tag{6.10.46}
$$

对于前向简并四波混频 [37](见图 6.29), 有

$$
\begin{aligned}
\frac{da_1}{dt} &= -ka_1 + i\varepsilon a_2^\dagger + F_1 \\
\frac{da_2^\dagger}{dt} &= -ka_2 - i\varepsilon a_1 + F_2^\dagger
\end{aligned} \tag{6.10.47}
$$

定义

$$
\begin{aligned}
a^\dagger &= \frac{a_1 + a_2^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad a = \frac{a_1 - a_2^\dagger}{\sqrt{2}} \\
F^\dagger &= \frac{F_1 + F_2^\dagger}{\sqrt{2}}, \quad F = \frac{F_1 - F_2^\dagger}{\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{6.10.48}
$$

得

$$
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & -i\varepsilon \\ -i\varepsilon & -k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ a^\dagger \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ F^\dagger \end{pmatrix} \tag{6.10.49}
$$

与 (6.10.49) 式相应的 Fokker-Planck 方程与 (6.10.11) 式相同，故只须讨论后向简并四波混频，即 (6.10.46) 式的解，就可以了.

作变换 $\alpha \to \alpha$, $\alpha^* \to i\alpha^*$, 得 (6.10.46) 式的如下形式：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial t} &= \left\{k\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\alpha^*\right) - i\varepsilon\left(\alpha^*\frac{\partial}{\partial\alpha} + \alpha\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^{*2}}\right) - 2ik\bar{n}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}\right\}P
\end{aligned} \tag{6.10.50}
$$

仍按上面方法求解

$$
\begin{aligned}
&P = e^{-a(\alpha^2+\alpha^{*2})+b\alpha\alpha^*}Q(\alpha,\alpha^*,t) \\
&a = \frac{1}{2}\left[\frac{k+i\varepsilon}{\varepsilon+2ik\bar{n}} + \frac{k-i\varepsilon}{\varepsilon-2ik\bar{n}}\right], \quad b = \frac{1}{2}\left[\frac{k+i\varepsilon}{\varepsilon+2ik\bar{n}} - \frac{k-i\varepsilon}{\varepsilon-2ik\bar{n}}\right] \\
&\frac{\partial}{\partial t}Q(\alpha,\alpha^*,t) = \left\{\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^{*2}}\right) - 2ik\bar{n}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*}\right. \\
&\left. - \frac{1}{4}\left(\frac{(k+i\varepsilon)^2}{\varepsilon+2ik\bar{n}} + \frac{(k-i\varepsilon)^2}{\varepsilon-2ik\bar{n}}\right)(\alpha^2+\alpha^{*2}) + \frac{1}{2}\left(\frac{(k+i\varepsilon)^2}{\varepsilon+2ik\bar{n}} - \frac{(k-i\varepsilon)^2}{\varepsilon-2ik\bar{n}}\right)\alpha\alpha^* + k\right\}Q
\end{aligned} \tag{6.10.51}
$$

注意到定义 (6.10.44) 式，有

$$
\begin{aligned}
a^\dagger &= \frac{a_2^\dagger(1+i) - a_1(1-i)}{2} = i\frac{(a_1+a_2^\dagger) + i(a_1-a_2^\dagger)}{2} \\
a &= \frac{a_2^\dagger(1+i) + a_1(1-i)}{2} = \frac{a_1+a_2 - i(a_1-a_2^\dagger)}{2}
\end{aligned} \tag{6.10.52}
$$

又注意到在得出 (6.10.50) 式时，已作了变换 $\alpha\to\alpha$, $\alpha^*\to i\alpha^*$, 故在 P 表示中，α, α^* 的含义为

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\alpha_1+\alpha_2^*-i(\alpha_1-\alpha_2^*)}{2}=\frac{\beta+i\tilde{\beta}}{\sqrt{2}}\\ \alpha^* &= \frac{\alpha_1+\alpha_2^*+i(\alpha_1-\alpha_2^*)}{2}=\frac{\beta-i\tilde{\beta}}{\sqrt{2}}\end{aligned}\tag{6.10.53}$$

其中

$$\beta=\frac{\alpha_1+\alpha_2^*}{\sqrt{2}},\quad \tilde{\beta}=\frac{-\alpha_1+\alpha_2^*}{\sqrt{2}}\tag{6.10.54}$$

定义

$$c=\frac{k-i\varepsilon}{\varepsilon-2ik\bar{n}},\quad \tilde{c}=\frac{k+i\varepsilon}{\varepsilon+2ik\bar{n}}\tag{6.10.55}$$

则

$$\begin{aligned}&Q_{mn}=\exp[-(m+\tfrac{1}{2})(k-i\varepsilon)t-(n+\tfrac{1}{2})(k+i\varepsilon)t]Q_m(\beta)\tilde{Q}_n(\tilde{\beta})\\ &Q_m(\beta)=N_m e^{-c\beta^2/2}H_m(\sqrt{c}\beta),\quad \tilde{Q}_n(\tilde{\beta})=N_n e^{\tilde{c}\tilde{\beta}^2/2}H_n(\sqrt{\tilde{c}}i\tilde{\beta})\end{aligned}\tag{6.10.56}$$

令

$$x_1=\frac{\alpha+\alpha^*}{2}=\frac{\beta}{\sqrt{2}},\quad x_2=\frac{\alpha-\alpha^*}{2i}=\frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{2}}$$

则

$$\begin{aligned}&<:(\Delta x_1)^2:>=<\left(\frac{\beta-\beta_0e^{-(k-i\varepsilon)t}}{\sqrt{2}}\right)^2>=\frac{1}{4c}(1-e^{-2(k-i\varepsilon)t})\\ &<:(\Delta x_2)^2:>=<\left(\frac{\tilde{\beta}-\tilde{\beta}_0e^{-(k+i\varepsilon)t}}{\sqrt{2}}\right)^2>=-\frac{1}{4\tilde{c}}(1-e^{-2(k+i\varepsilon)t})\end{aligned}\tag{6.10.57}$$

上面已提到定义 (6.10.44) 式的 a, $a^\dagger$ 不是厄米的，α, α^* 并非共轭量，x_1, x_2 也不是实数，因此其方差亦是复数.

6.11 泵浦噪音的抑制和振幅压缩态的产生

6.11.1 泵浦噪音的亚 Poisson 分布与振幅压缩态

这节我们将较详细地讨论振幅压缩态的产生，图 6.30 为各种状态的准概率密度 $Q=<\alpha|\rho|\alpha>$ 分布图 [46]. 图 (a) 为正交压缩态，α_1 分量的不确定度小于对 α_2 分量的

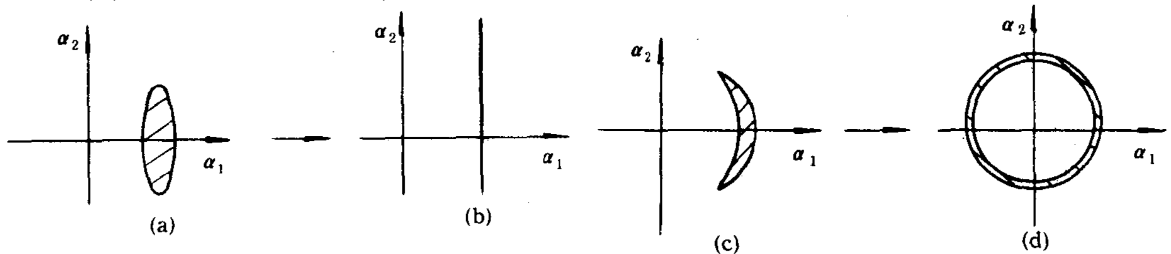


图 6.30 准概率密度分布图

(a) 正交压缩态；(b) α_1 分量本征态；(c) 振幅压缩态；(d) 光子数态

(参照 Yamamoto [46])

不确定度，误差为一椭圆．图 (b) 则是 α_1 的本征态，具有完全确定的 α_1 值，但 α_2 分量的值则是完全不确定的．图 (b) 可看成图 (a) 的极限情形，即与 α_2 平行的线为误差椭圆沿 α_2 方向无限拉长的结果．图 (c) 则是我们这节要详细讨论的振幅压缩态，其误差区为一新月牙形．图 (d) 则是光子数态，具有完全确定的振幅，而位相则是完全不确定的，其误差区为一无限细的圆环．粒子数态可看作振幅压缩态的极限，无限细圆环可看成新月牙变细并沿圆周方向伸展的结果．正交压缩态 (a) 可通过非线性参量放大过程或四波混频方式产生．振幅压缩态 (c) 也可通过抑制泵浦噪音的激光振荡等方式来产生 [46~48]．我们将证明，只要泵浦噪音被抑制在一般的散粒噪音以下，即为亚 Poisson 分布，则激光振荡输出将为振幅压缩态．振幅压缩态为一种非经典光场，其特征为光子的统计分布为亚 Poisson 分布的．为什么泵浦的亚 Poisson 分布特点又能在激光分布中反应出来呢？这从前一章白泵浦噪音的激光振荡理论结果 (5.4.41) 和 (5.4.42) 式中已部分反应出来了．激光振荡的噪音 $< u^2 >$ 一半来自泵浦噪音 $< \tilde{\Gamma}_p^2 >$，另一半则来自激光腔内的无规力 $< G_1^2 >$．如果将泵浦噪音抑制住，则腔内激光噪音将下降到 (5.4.42) 式的一半，即

$$< \tilde{u}^2 >= \frac{2(\omega/Q)n_s}{(\omega/Q)^2 + \Omega^2} \tag{6.11.1}$$

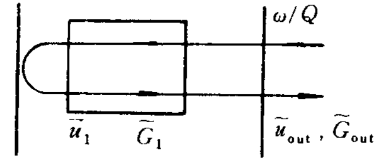


图 6.31 泵浦噪音被抑制的激光振荡示意图

至于腔外输出的激光噪音则减少得更多了．

如图 6.31 所示，腔内、腔外的无规力 $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_{1\text{out}}$, 腔外、腔内的激光噪音 $\tilde{u}_{\text{out}}$, $\tilde{u}$ 可通过腔的输出损耗 ω/Q(这里假定了腔内的损耗 ω/Q_i 很小，输出损耗 $\omega/Q - \omega/Q_i \simeq \omega/Q$) 联系起来：

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1 &\simeq i(\omega/Q)^{1/2}\tilde{G}_{1\text{out}} \\ \tilde{u}_{\text{out}} &\simeq i(\omega/Q)^{1/2}\tilde{u} \end{aligned} \tag{6.11.2}$$

腔外激光输出噪音亦即无规力 $\tilde{w}$ 乃 $\tilde{G}_{1\text{out}}$ 与 $\tilde{u}_{\text{out}}$ 的迭加，并设计透过率的相位，使得有 $\pi/2$ 位相推迟，于是

$$\tilde{w} = \tilde{G}_{\text{out}} + \tilde{u}_{\text{out}} = \frac{\tilde{G}_1}{i(\omega/Q)^{1/2}} + i(\omega/Q)^{1/2}\tilde{u} \tag{6.11.3}$$

用 (5.4.37) 式的 $\tilde{u}$ 代入上式，并令其中 $\tilde{\Gamma}_\rho = 0$, 因已假定泵浦噪音是被抑制了的，故在 $\dfrac{\Delta_o}{\Delta_s} \gg 1$ 情形下，有

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= \frac{\tilde{G}_1}{i(\omega/Q)^{1/2}}\left(1 - \frac{\omega/Q}{2g\Delta_s + i\Omega}\right) = \frac{\tilde{G}_1}{i(\omega/Q)^{1/2}} \frac{2g\Delta_s - \omega/Q + i\Omega}{2g\Delta_s + i\Omega} \\ < \tilde{w}^2 > &= 2\frac{(2g\Delta_s - \omega/Q)^2 + \Omega^2}{(2g\Delta_s)^2 + \Omega^2} n_s = 2\frac{\Omega^2 n_s}{(\omega/Q)^2 + \Omega^2} \end{aligned} \tag{6.11.4}$$

在导出上式时，我们用了 (5.4.41) 式．由 (6.11.4) 式可算出泵浦噪音被抑制后的腔外激光输出的最佳振幅压缩

$$P = \frac{< \tilde{w}^2 >}{4n_s} = \frac{\frac{1}{2}\Omega^2}{(\omega/Q)^2 + \Omega^2}, \quad \frac{\Delta_o}{\Delta_s} \gg 1 \tag{6.11.5}$$

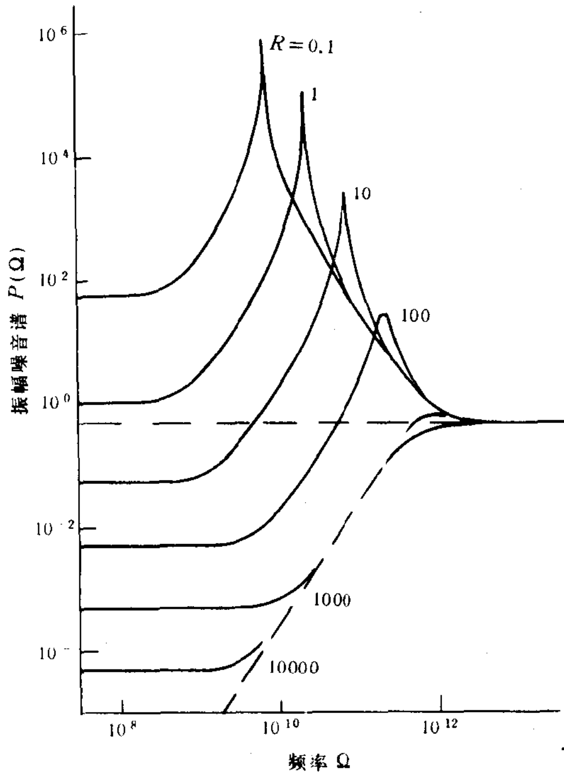


图 6.32　泵浦噪音被压低后的输出振幅噪音谱

$(\omega/Q_i=0)$

(参照文献 [46])

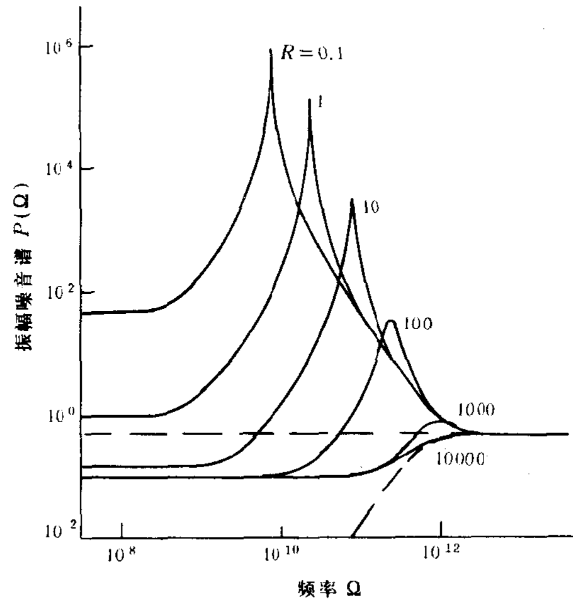


图 6.33　泵浦噪音被压低后的输出振幅噪音谱

$(\omega/Q_i=0.25\omega/Q_e)$

(取自文献 [46])

若腔的损耗 ω/Q_i 不能略去，则对应于 ω/Q_i 的无规力 $\tilde{G}_i$ 也同样存在，于是在 $\tilde{u}$ 中还要加上 $\tilde{G}_i$ 的贡献：

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}&=\frac{\tilde{G}_1+\tilde{G}_i}{2g\Delta_s+i\Omega},\quad \frac{\Delta_o}{\Delta_s}\gg 1\\
<\tilde{w}^2>&=2\frac{\Omega^2n_s}{(\omega/Q)^2+\Omega^2}+2\frac{(\omega/Q_i)(\omega/Q)n_s}{(\omega/Q)^2+\Omega^2}
\end{aligned}
\tag{6.11.6}
$$

在得到上式时，我们用了 $<\tilde{G}_i^2>=\dfrac{2\omega}{Q_i}n_s$.

我们注意到，上面结果是在超阈度 $R=\dfrac{\Delta_o}{\Delta_s}-1\gg 1$ 的情况下得到的，如果不是这样，就要用 $\tilde{u}$ 的准确公式 (5.4.36) 代入 (6.11.3) 式中的 $\tilde{u}$. 这样得到的 $P=\dfrac{<\tilde{w}^2>}{4n_s}$ 当然也是比较复杂的. 图 6.32 和图 6.33 分别为 $\omega/Q_i=0$, $0.25\omega/Q$ 按照这一复杂公式计算出来的各种超阈度 R 的 P 随频率 Ω 的变化曲线. 当 Ω 在腔的输出损耗宽度 ω/Q 以内时，有很大的振幅压缩度. 但当 $\Omega\gg\omega/Q$ 时，又趋于由腔的无规力 G_{out} 给出的均方值. 因为当 $\Omega\gg\omega/Q$ 时，$\tilde{u}\simeq 0$,　$\tilde{w}\simeq\tilde{G}_1/(\omega/Q)^{1/2}$,　$<\tilde{w}^2>=\dfrac{<\tilde{G}_1^2>}{\omega/Q}=2n_s$,　$P=\dfrac{<\tilde{w}^2>}{4n_s}=\dfrac{1}{2}$. 另一方面，当 $\Omega\to 0$ 时，由 (5.4.36) 式，有

$$
\begin{aligned}
\tilde{u}&=\frac{\dfrac{\Delta_0}{T_1\Delta_s}(\tilde{G}_1+\tilde{G}_2)+\dfrac{1}{T_1}(\dfrac{\Delta_0}{\Delta_s}-1)(-\tilde{G}_2)}{2g\Delta_s(\frac{\Delta_0}{\Delta_s}-1)/T_1}\\
&=\frac{(R+1)(\tilde{G}_1+\tilde{G}_2)+R(-G_2)}{2g\Delta_sR}
\end{aligned}
\tag{6.11.7}
$$

$$\tilde{w} = G_1/(\tfrac{\omega}{Q})^{1/2} - (\tfrac{\omega}{Q})^{1/2}\tilde{u} = -\frac{\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}{(\omega/Q)^{1/2}R}$$
$$< \tilde{w}^2 >= \frac{4n_s}{R}, \qquad P = \frac{< \tilde{w}^2 >}{4n_s} = \frac{1}{R} \tag{6.11.8}$$

注意到 (5.4.43) 式, $n_s = A_0^2$, $\tilde{w} = 2A_0\Delta A$, 便得

$$\Delta A^2 = \frac{1}{R}, \qquad 当\Omega \to 0 \tag{6.11.9}$$

$$\Delta A^2 = \frac{1}{2}, \qquad 当\Omega \to \infty \tag{6.11.10}$$

这一结果表明, 只要超阈度 R 够大, 光子起伏的振幅均方值可以很低, 当 $\Omega \to 0, \Delta A^2 = \frac{1}{R}$, 但当 $\Omega \to \infty, \Delta A^2 = \frac{1}{2}$.

6.11.2 压低泵浦噪音的方案

作为激光泵浦的可以是光泵, 通过双光子或多光子吸收的办法, 这无疑可使光泵浦噪音减少 (见图 6.10) 也可以用注入电子流. 下面举出两个方案, 其中一个方案为荷限电流, 另一则为半导体二极管注入电流. 图 6.34(a) 给出用电子束激励激活原子示意图, (b) 给出相应的电位分布图.

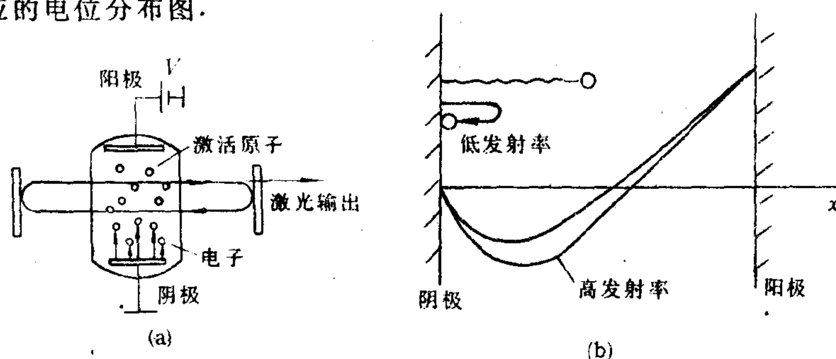


图 6.34 抑制泵浦噪音示意图.

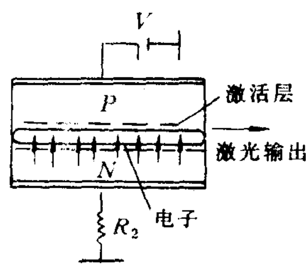


图 6.35 抑制泵浦噪音示意图

(半导体二极管注入)

由阴极发射的电子数超过平均数时, 在阴极和阳极间将积累更多的电子, 造成一个负电位区, 阻止电子的进一步发射. 相反, 如果阴极发射的电子低于平均数, 造成不大的负电位区, 有利于电子发射. 这就是通过空间电荷的累积产生的负电位来自动调节发射电流, 亦即通过荷限办法抑制发射电子流的噪音, 使之低于 Poisson 分布, 这种亚 Poisson 分布已经在实验上被观察到. 图 6.35(a) 为半导体二极管激光器的电子注入示意图. 当注入电流小于平均值时, 电流小, 在负载电阻 R_s 的分压亦相应减小. 总电压 V 经分压后有更多的电压加在二极管的 P,N 极上, 这样便促使有更多的电子通过 P ,N 极. 相反, 若注入电流大于平均值, 则分在 R_s 上的电压增大, 加在 PN 结上的电压减小, 因 V 不变, 于是由 PN 节通过的电流相应减少了.

附录 A Boson 算子代数

下面给出计算中常用到的 Boson 算子代数关系 [11]. 根据 Boson 算子满足的关系 $[a,a^\dagger]=1$, 可导出下面的一些式子.

(1) 有

$$\begin{aligned}[a,a^{\dagger l}] &= aa^{\dagger l}-a^{\dagger l}a=[aa^\dagger-a^\dagger a]a^{\dagger(l-1)}+a^\dagger aa^{\dagger(l-1)}-a^{\dagger l}a \\ &= a^{\dagger(l-1)}+a^\dagger(aa^{\dagger(l-1)}-a^{\dagger(l-1)}a) \\ &= \cdots = la^{\dagger(l-1)}=\frac{\partial a^{\dagger l}}{\partial a^{\dagger l}}\end{aligned} \tag{A1}$$

同样有

$$[a^\dagger,a^l]=-la^{l-1}=-\frac{\partial a^l}{\partial a} \tag{A2}$$

对于函数 $f(a,a^\dagger)$, 先用反正规编序展开：

$$f(a,a^\dagger)=\sum f^a_{rs}a^r a^{\dagger s} \tag{A3}$$

并注意到 $[A,BC]=[A,B]C+B[A,C]$, 则

$$\begin{aligned}[a^\dagger,f(a,a^\dagger)] &= \sum f^a_{rs}\{[a^\dagger,a^r]a^{\dagger s}+a^r[a^\dagger,a^{\dagger s}]\} \\ &= -\sum f^a_{rs}[ra^{r-1}]a^{\dagger s}=-\frac{\partial f^a}{\partial a}=-\frac{\partial f}{\partial a}\end{aligned} \tag{A4}$$

再用正常顺序展开，同样可证

$$f(a,a^\dagger)=\sum f^N_{rs}a^{\dagger r}a^s \tag{A5}$$

$$[a,f(a,a^\dagger)] = \sum f^N_{rs}[a,a^{\dagger r}]a^s=\frac{\partial f}{\partial a^\dagger} \tag{A6}$$

(2) Baker-Hausdoff 定理. 设 A,B 为不可易算子，并满足关系

$$[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=0 \tag{A7}$$

则有

$$e^{A+B}=e^Ae^Be^{-1/2[A,B]}=e^Be^Ae^{1/2[A,B]} \tag{A8}$$

当 $[A,B]$ 为 c 数时，关系 (A7) 式显然成立. 例如 $[q,p]=i\hbar$, $[a,a^\dagger]=1$ 就满足条件 (A7) 式. 下面证明 (A8) 式：

设 $f(\xi)=e^{\xi A}e^{\xi B}$,$\xi$ 为 c 数. 对 ξ 微分，得

$$\begin{aligned}\frac{df}{d\xi} &= Ae^{\xi A}e^{\xi B}+e^{\xi A}Be^{\xi B} \\ &= (A+e^{\xi A}Be^{-\xi A})f(\xi)\end{aligned} \tag{A9}$$

由

$$g(\xi)=e^{\xi A}Be^{-\xi A}=B+\xi[A,B]+\frac{\xi^2}{2}[A,[A,B]]+\cdots \tag{A10}$$

得 $g(0)=B$. 将 $g(\xi)$ 按 Maclaulin 级数展开：

$$\begin{aligned}&\frac{dg(\xi)}{d\xi}=[A,g(\xi)],\quad \frac{dg}{d\xi}|_{\xi=0}=[A,B] \\ &\frac{d^2g(\xi)}{d\xi^2}=[A,\frac{dg(\xi)}{d\xi}]=[A,[A,g(\xi)]] \\ &\frac{d^2g(\xi)}{d\xi^2}|_{\xi=0}=[A,[A,B]],\quad \frac{d^3g}{d\xi^3}|_{\xi=0}=[A,[A,[A,B]]]\end{aligned} \tag{A11}$$

由 (A11) 式得 $g(\xi)$ 的 Maclaulin 级数 (A10) 式. 又由 (A10) 及 (A7) 式, 便得

$$\frac{df(\xi)}{d\xi} = \{(A+B) + \xi[A,B]\}f(\xi) \tag{A12}$$

由 (A7) 式, $A+B$ 与 $[A,B]$ 为可易, 故可将这两个量看成一般的可易的变量. 积分 (A12) 式, 并注意到 $f(0)=1$, 便得

$$f(\xi) = e^{\xi[A+B]+\xi^2/2[A,B]} = e^{\xi[A+B]}e^{\xi^2/2[A,B]} \tag{A13}$$

这后一等式的成立, 乃是因为 $A+B$ 与 $[A,B]$ 为可易. 按 $f(\xi)$ 的定义 $f(\xi)=e^{\xi A}e^{\xi B}$, 代入 (A13) 式, 故有

$$e^{\xi A}e^{\xi B} = e^{\xi[A+B]+\xi^2/2[A,B]} \tag{A14}$$

在 (A14) 式中, 令 $\xi=1$, 并用 $e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ 右乘两端, 最后得 (A8) 式.

(3) 两个常用到的关系式 (证明见文献 [11]):

$$\begin{aligned} e^{xa}f(a,a^\dagger)e^{-xa} &= f(a,a^\dagger+x) \\ e^{-xa^\dagger}f(a,a^\dagger)e^{xa^\dagger} &= f(a+x,a^\dagger) \end{aligned} \tag{A15}$$

附录B　最小测不准态

设观测量 A, B 不能互易, 并满足对易关系

$$[A,B] = iC \tag{B1}$$

式中, C 为常数或另一观测量. 易证 A,B 不能同时被准确测定, 其均方偏差满足不等式

$$(\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4}|<C>|^2 \tag{B2}$$

$$<C> = <\psi|C|\psi> \tag{B3}$$

这就是 Heisenberg 测不准关系. 在证明这关系之前, 先讨论这一关系的物理意义. 若 ψ 为 A 的本征态, 就意味着系统处于状态 $|\psi>$, 我们能准确地测定 A. 同样若 ψ 为 B 的本征态, 我们能准确地测定 B. 若 $|\psi>$ 为 A,B 的本征态, 我们能同时准确地测定 A,B, 即 $\Delta A = \Delta B = 0$. 由测不准关系 (B2) 式, 这只有当 $|<C>|=0$ 才有可能. 但若 $|<C>|=0$, 由 (B1) 式, A,B 是可易的. 若 A、B 不可易, 并满足 (B1) 式, $|<C>|\neq 0$, 对 A,B 测定的均方差值应满足 (B2) 式, 为证明这一关系, 现定义

$$\alpha = \Delta A = A - <A>, \quad \beta = \Delta B = B - <B> \tag{B4}$$

$$[\alpha,\beta] = [A-<A>, B-<B>] = [A,B] = iC \tag{B5}$$

$$\begin{gathered} <\alpha> = <\beta> = 0 \\ (\Delta\alpha)^2 = (\alpha - <\alpha>)^2 = <\alpha^2>, \quad (\Delta\beta)^2 = (\beta - <\beta>)^2 = <\beta^2> \end{gathered} \tag{B6}$$

应用 Schwarz 不等式

$$\int |f|^2 dx \int |g|^2 dx \geq |\int f^* g dx|^2 \tag{B7}$$

便得

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha)^2(\Delta\beta)^2 &= <\psi|\alpha^2|\psi><\psi|\beta^2|\psi> = \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\alpha^2\psi dx \int_{-\infty}^{\infty}\psi^*\beta^2\psi dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(\alpha^*\psi^*)\alpha\psi dx \int_{-\infty}^{\infty}(\beta^*\psi^*)\beta\psi dx \geq |\int(\alpha^*\psi^*)(\beta\psi)dx|^2 \\ &= |\int\psi^*\alpha\beta\psi dx|^2 = |<\psi|\alpha\beta|\psi>|^2 \end{aligned} \tag{B8}$$

上式的最后一步是假定了 α 为实的, $\alpha = \alpha^*$.

注意到

$$\alpha\beta = \frac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha\beta-\beta\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha\beta+\beta\alpha) + \frac{iC}{2}$$

代入 (B8) 式，便得

$$(\Delta\alpha)^2(\Delta\beta)^2 \geq \frac{1}{4}|<\psi|\alpha\beta+\beta\alpha|\psi> +i<\psi|C|\psi>|^2 \tag{B9}$$

式中， $\alpha\beta+\beta\alpha$ 与 C 均为厄米，故 $<\psi|\alpha\beta+\beta\alpha|\psi>$, $<\psi|C|\psi>$ 为实的．于是由 (B9) 式得出

$$(\Delta\alpha)^2(\Delta\beta)^2 = (\Delta A)^2(\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4}|C|^2 \tag{B10}$$

由 (B8) 和 (B9) 式看出等式成立的条件为

$$\alpha|\psi>=\gamma\beta|\psi> \tag{B11}$$

$$<\psi|\alpha\beta+\beta\alpha|\psi>=0 \tag{B12}$$

将 (B11) 式代入 (B12) 式得

$$(\gamma+\gamma^*)<\psi|\beta^2|\psi>=0 \tag{B13}$$

故 γ 应为纯虚数． (B11) 和 (B13) 式即最小测不准态应满足的条件．例如 $\alpha=q-<q>,\beta=p-<p>$, $\gamma=1/i\mu$, 则得最小测不准态为

$$(p-<p>)|\psi>=i\mu(q-<q>)|\psi> \tag{B14}$$

第七章　原子的共振荧光与吸收

原子的共振荧光与吸收，较集中地反映了光与物质相互作用的基本物理过程．本章首先叙述这方面的实验研究结果，接着讨论二能级原子共振荧光理论，其中包括瞬态共振荧光、考虑到自作用后的共振荧光、微腔对自发辐射的增强与抑制，以及真空场的 Rabi 分裂等．

7.1　二能级原子与单色光相互作用的实验研究

7.1.1　二能级原子在强光作用下的共振荧光

应用激光调谐技术有可能精确测定在强单色光作用下原子的辐射与吸收谱．这些测定对于了解原子与场的相互作用和验证理论均有很重要的意义． Stroud[1] 最先测定在强场作用下二能级原子的共振荧光谱，稍后，又有更多关于这方面的研究 [2~5]．要精确进行这种测定，对原子系统、原子束、激光系统均有一定要求．首先要选择一对与激光频率为共振的二能级，其它能级因远离共振，与光场的相互作用可略去．为了简化分析，原子的 Doppler 加宽与碰撞加宽均应比自然线宽小得多．当原子束成垂直地通过激光束时， Doppler 宽度可大为减少．单色激光应与原子跃迁频率相近，并在其附近精密调谐，且光强足够强，才能观察到谱线轮廓的变化．还应注意，被作用的原子是放在激光均匀照射下．实验中 [1,5] 选钠原子 $^2S_{1/2}(F=2)$， $^2P_{3/2}(F=3)$ 为共振跃迁的两个能

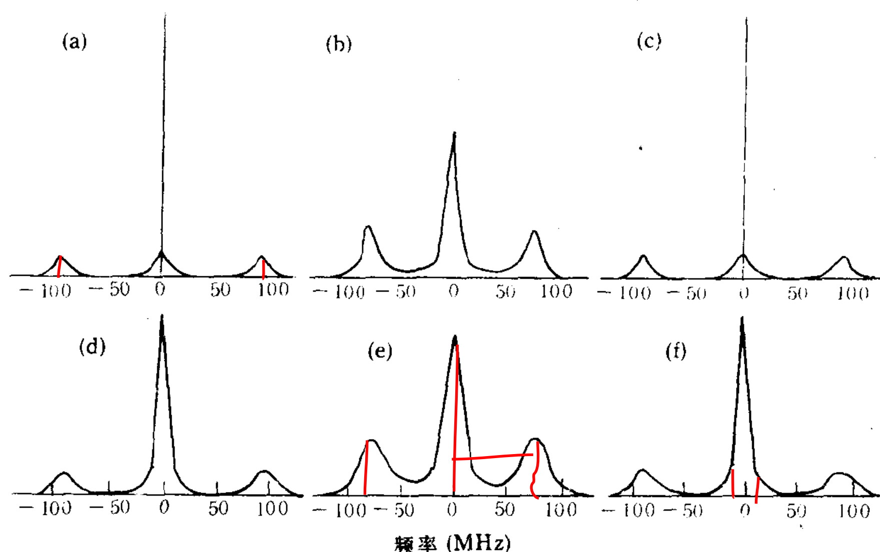


图 7.1　在强驱动场作用下钠原子二能级的实验与理论共振荧光谱

(a), (b), (c) 分别为失谐 −50MHz, 0, 50MHz 的理论曲线 (Rabi 频率 $\Omega=78$MHz, 自然线宽 $\gamma=10$MHz);

(d), (e), (f) 为实验曲线及考虑到仪器线型后理论谱的卷积 (光滑曲线), 失谐分别为 −50MHz, 0, 50MHz,

驱动激光峰值功率密度为 640mW/cm^2

(参照 Wu, Grove 等 [3, 5])

级. 原子束以垂直于激光光轴的方向通过激光束，并在垂直于原子束、激光光轴的方向探测原子辐射的共振荧光.

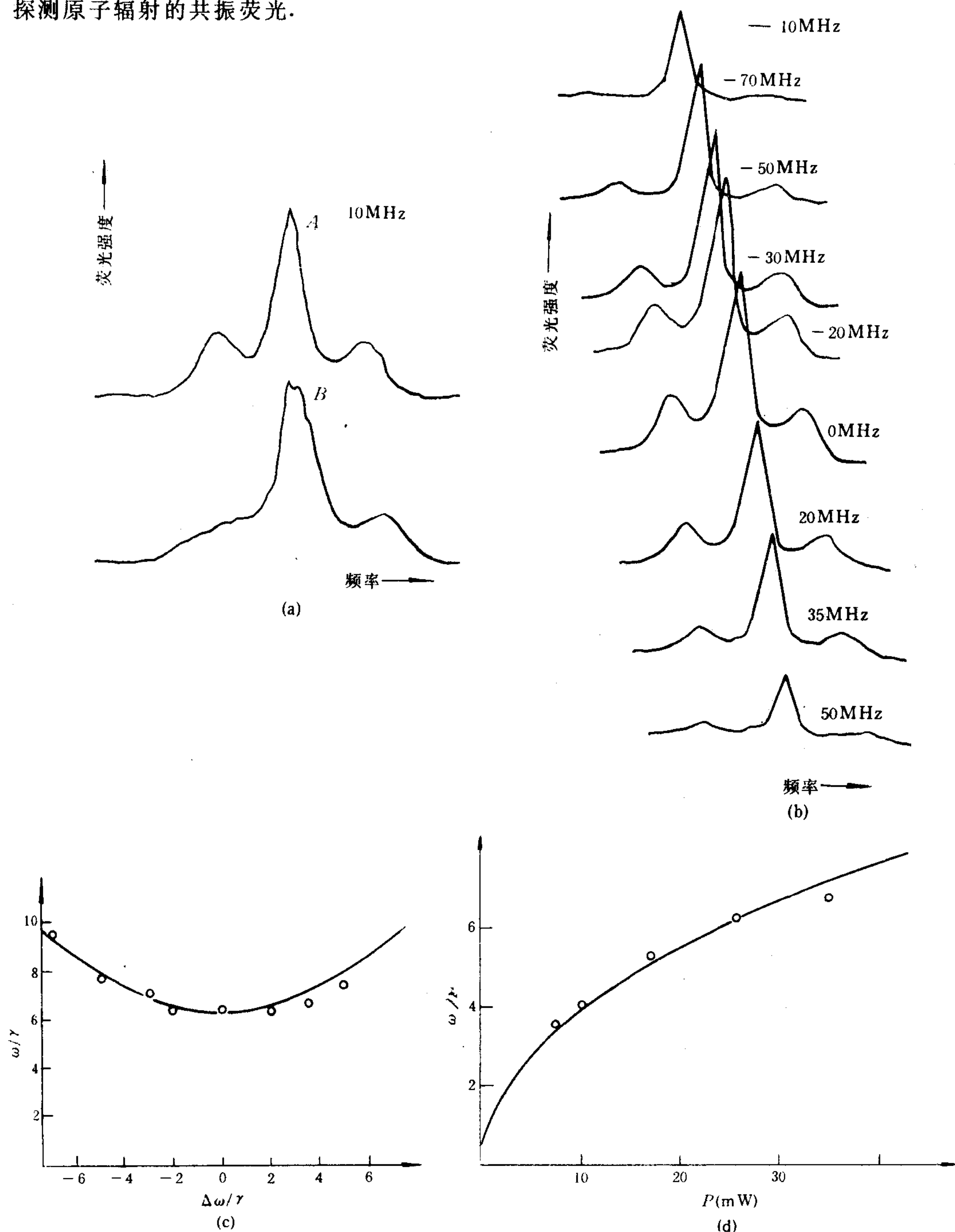


图 7.2 (a) 钠原子 ^{23}Na 的共振荧光谱. 用 5890Å波长的圆偏振光 (曲线 A), 部分线偏振光 (曲线 B) 激发. 在 $^2S_{1/2}$, $F=2 \to ^2P_{3/2}$, $F=3$ 中心频率处激光功率 30mW;

(b) 各种失谐由 −70MHz 到 50MHz 情形下的共振荧光谱 (入射激光功率均为 30mW);

(c) 边峰与中峰的间距随入射激光频率失谐的变化;

(d) 边峰与中峰的距离随入射激光功率的变化

(参照 Hartig 等 [4])

共振荧光的理论最早由 Weisskopf 提出 [6]. 他指出，当入射光强很弱时，共振荧光并不表现出原子的自然线宽，而是表现出频率与入射光相同的单色光. 很多实验 [7~10] 均证明，当入射光强很弱时，共振荧光光线的宽度要比自然线宽窄，这可通过仪器的加宽与残存的 Doppler 加宽来解释. 在强光作用下的共振荧光理论很多 [11~14], 现在较普遍采用的是 Mollow 的理论 [10](详细的将在下节介绍), 主要结果为共振荧光谱包含三个峰，一个中峰，两个对称排布的边峰. 边峰与中峰高度比为 1 : 3 : 1; 而宽度比为 $3\gamma/2 : \gamma : 3\gamma/2$, γ 为自然线宽. 除此而外，还有一个 δ 函数型的相干散射峰. 共振时，该峰的贡献不大，但在有失谐情况下，这相干散射峰的贡献还是可以看出来的. 图 7.1 为 Ezekiel [3,5] 测得的共振荧光光谱，实验与理论符合得很好. 光滑曲线上叠加的 δ 型乃是仪器线宽的卷积.

实验结果表明，在有些情况下，还会观察到非对称的共振荧光谱 [4], 即一个边峰比另一个边峰低 [见图 7.2(a)].Walther 用线偏振光激发观察到共振荧光谱是非对称性的，这可能由于激发了其它精细能级；而采用圆偏振光激发的共振荧光光谱则是对称的. 但 Grove, Wu 与 Ezekiel 的实验结果又表明 [5], 谱的非对称性来源于非均匀光强照射的结果，与光的偏振性无关. 图 7.2(b) 给出了各种失谐情况下的共振荧光谱，图 7.2(c), (d) 分别给出边峰与中峰间距随失谐频率及入射激光功率的变化.

7.1.2　在强场作用下的原子吸收线型

弱场作用下的原子吸收线型为 Lorentz 型，这已为弱的可调谐的探针光束通过原子束的吸收谱测量所证实. 但在近共振的强场作用下，原子的吸收谱线型已发生了很大的变化. 为了测定强驱动场作用下的吸收线型，必须采用强的“驱动场”光束与弱的“探针”光束沿着与原子束垂直的方向通过原子束. 驱动场频率 ω_d 一般固定在原子频率 ω_0 附近可调谐. 为保证被探测的原子是在驱动场的均匀照明下，探针光束直径一般为驱动场直径的 1/10. 当驱动场频率 ω_d 与原子跃迁频率 ω_0 为共振，即 $\omega_d = \omega_0$, 由探针光束测得的原子峰值吸收要比弱场作用下的峰值吸收小得多. 当驱动场频率略大于原子跃迁频率时 (见图 7.3), 峰值吸收发生在 ω_0', 相对于原来的弱场情况下的原子峰值吸收值 ω_0 稍有移动，而且在频率 $2\omega_d - \omega_0'$ 处有一不大的增益峰 [15], 峰值增益为 0.7%, 而对于同一原子密度测得的弱场峰值吸收为 9.4%. 这与理论计算结果基本相符 [16]. 理论计算表明，在强场极限下的增益峰值位置在 $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \Omega/3$, 峰值增益约为弱场情况下的峰值吸收的 5%.

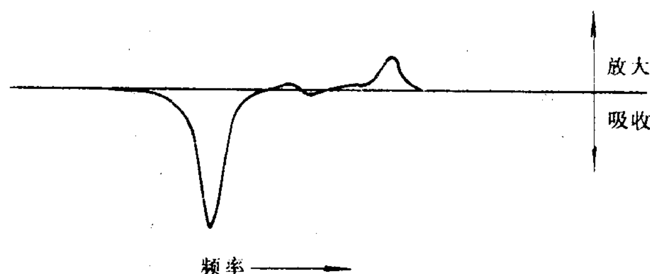


图 7.3　钠原子二能级被一频率为 ω 的场强所驱动，失谐为 28MHz, 峰值强度为 550mW/cm^2
(参照 Wu, Ezekiel 等 [15])

7.1.3　二能级原子吸收谱的功率增宽与饱和

为测定随入射激光功率的增加，吸收谱线轮廓增宽以及峰值吸收饱和，只需采用功

率可变且频率可调谐的探针光即可，而驱动光场可去掉．图 7.4(a)～(e) 便是探针光逐渐增大时的原子吸收谱[17]．在低强度时 [见图 7.4(a)，光强为 0.2mW/cm^2]，测得线宽为 11MHz，其中 10MHz 为自然线宽，另 1MHz 为残余的 Doppler 加宽引起的．图 7.4(e) 探针光强增至 150mW/cm^2，约为饱和光强 $I_s = 6.4\text{mW/cm}^2$ 的 23 倍．图 7.4(e) 被重绘为图 7.4(f)，测得线宽 47MHz，与理论值 $\Delta\nu = \gamma\sqrt{1+I/I_s} \simeq 49.4\text{MHz}$ 很符合．

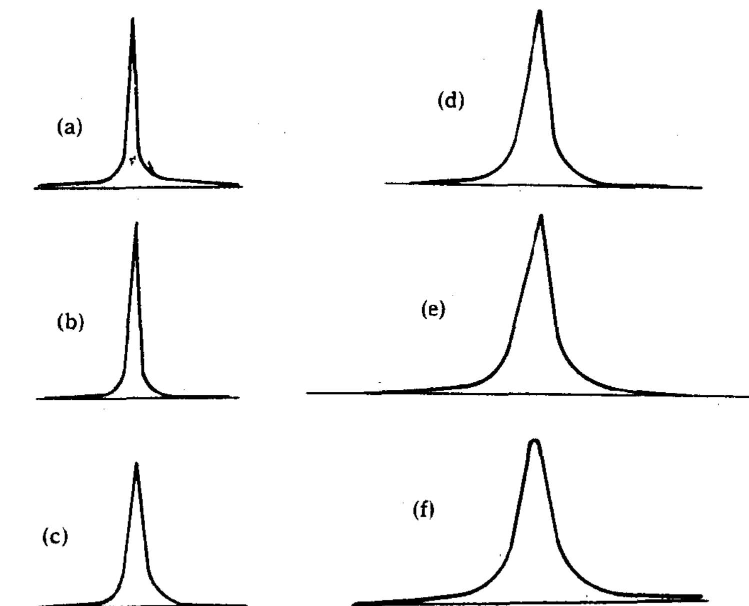


图 7.4　二能级钠原子的功率增宽与饱和曲线

(a)$I = 0.03I_s$，200cts/s，(b)$0.25I_s$；1000cts/s；(c)$3I_s$，5000cts/s；

(d)$12I_s$，5000cts/s；(e)$23I_s$，5000cts/s；(f) 当 $I = 23I_s$ 的功率增宽线型

(参照 Ezekiel [17])

7.2　二能级原子的共振荧光与吸收理论

本节主要介绍 Mollow 的共振荧光与吸收理论[10,14,20].Mollow 所提出的二能级原子与场相互作用的理论模型是，假定辐射场为振幅恒定的经典单色场，不考虑辐射场的量子起伏；原子为静止的二能级原子，不考虑原子辐射的 Doppler 及碰撞加宽，也不考虑方程 (5.3.35) 式中的无规力作用，相当于将方程 (5.3.35) 式对热库求统计平均．这样，σ_z，$\sigma^\pm$ 等已化为 c 数 $<\sigma_z>$，$<\sigma^\pm>$，而不再是算子，但在具体计算共振荧光光谱时，还是应用了量子回归定理．所得结果与一开始就引进无规力，并将 σ_z，$\sigma^\pm$ 看成算子所得结果一致．

7.2.1　二能级原子与辐射场相互作用方程及其解

现将在相互作用绘景中的 (5.3.35) 式对热库求平均，并将 $<\sigma_z>$，$<\sigma>$，$<\sigma^+>$ 仍用 σ_z，σ，σ^+ 来表示，则得单模场与二能级原子相互作用方程为

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma_z}{dt} &= -\gamma_1(\sigma_z - \bar{\sigma}_z) - i\frac{\Omega}{2}(\sigma^- e^{i\delta\omega t} - \sigma^+ e^{-i\delta\omega t}) \\
\frac{d\sigma^-}{dt} &= -i\Omega e^{-i\delta\omega t}\sigma_z - \gamma_2\sigma^- \\
\frac{d\sigma^+}{dt} &= i\Omega e^{i\delta\omega t}\sigma_z - \gamma_2\sigma^+
\end{aligned}
\tag{7.2.1}
$$

式中，$\delta\omega = \omega_p - \omega_{21}$,$\omega_p$ 为抽运光的频率，$\bar{\sigma}_z$ 为反转粒子的稳态值，$\Omega = 2\mu E_0/\hbar$ 为 Rabi 频率. 令

$$
\begin{gathered}
\sigma^- e^{i\delta\omega t} = \alpha(t)e^{i\omega_p t}, \quad \sigma^+ e^{-i\delta\omega t} = \alpha^*(t)e^{-i\omega_p t} \\
\gamma_1 = \kappa, \quad \gamma_2 = \kappa/2, \quad z = \kappa/2 - i\delta\omega
\end{gathered}
\tag{7.2.2}
$$

则 (7.2.1) 式为

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma_z}{dt} &= -\kappa(\sigma_z - \bar{\sigma}_z) - i\frac{\Omega}{2}[\alpha(t)e^{i\omega_p t} - \alpha^*(t)e^{-i\omega_p t}] \\
\frac{d}{dt}[\alpha(t)e^{i\omega_p t}] &= -i\Omega\sigma_z - z[\alpha(t)e^{i\omega_p t}] \\
\frac{d}{dt}(\alpha^*(t)e^{-i\omega_p t}) &= i\Omega\sigma_z - z^*[\alpha^*(t)e^{-i\omega_p t}]
\end{aligned}
\tag{7.2.3}
$$

作 Laplace 变换

$$
\begin{pmatrix} \tilde{\sigma_z}(s) \\ \tilde{\alpha}(s) \\ \tilde{\alpha}^*(s) \end{pmatrix} = \int_0^\infty e^{-st} \begin{pmatrix} \sigma_z(t) \\ \alpha(t)e^{i\omega_p t} \\ \alpha^*(t)e^{-i\omega_p t} \end{pmatrix} dt
\tag{7.2.4}
$$

则 (7.2.3) 式变为

$$
\begin{gathered}
(s+\kappa)\tilde{\sigma_z}(s) + i\frac{\Omega}{2}(\tilde{\alpha}(s) - \tilde{\alpha}^*(s)) = \sigma_{z0} + \gamma_1\bar{\sigma}_z/s \\
\begin{array}{rcccl}
i\Omega\tilde{\sigma_z}(s) & + & (s+z)\tilde{\alpha}(s) & = & \alpha(0) \\
-i\Omega\tilde{\sigma_z}(s) & + & (s+z^*)\tilde{\alpha}^*(s) & = & \alpha^*(0)
\end{array}
\end{gathered}
\tag{7.2.5}
$$

式中，$\sigma_{z0} = \bar{\sigma}_z = -\frac{1}{2}$, 表明在没有外场驱动 (即 $\Omega = 0$) 情形下，原子处于基态.

又注意到 (2.6.14) 与 (2.6.15) 式，且初值 $-2\sigma_{z0} = 1$ 及 $-2\bar{\sigma}_z = 1$ 与 Mollow 定义的 $\bar{n}$, $\bar{m}$ 间的关系为

$$
-2\sigma_{zo} = a_2^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_1 = |1><1| + |0><0| = \sigma^\dagger\sigma + \sigma\sigma^\dagger = \bar{n}(0) + \bar{m}(0)
$$

式中，$\bar{n}, \bar{m}$ 分别原子处于激发态与基态数，$\bar{n} + \bar{m} = 1$. 故 (7.2.5) 式的解为

$$
\begin{gathered}
\tilde{\alpha}(s) = \frac{(s+\kappa)(s+z^*) + \Omega^2/2}{f(s)}\alpha(0) + \frac{\Omega^2}{2f(s)}\alpha^*(0) + \frac{i\Omega(s+\kappa)(s+z^*)}{2f(s)s}(\bar{n}(0) + \bar{m}(0)) \\
f(s) = (s+\kappa)(s+z)(s+z^*) + \Omega^2(s+\kappa/2)
\end{gathered}
\tag{7.2.6}
$$

(7.2.6) 式也可写为

$$
\tilde{\alpha}(s) = \tilde{u}_{\alpha\alpha}(s)\alpha(0) + \tilde{u}_{\alpha\alpha^*}(s)\alpha^*(0) + \tilde{u}_{\alpha n}(s)\bar{n}(0) + \tilde{u}_{\alpha m}(s)\bar{m}(0)
\tag{7.2.7}
$$

求反变换便得

$$e^{i\omega_p(t+\tau)}\alpha(t+\tau) = u_{\alpha n}(\tau)\bar{n}(t) + u_{\alpha\alpha}(\tau)(e^{i\omega_p t}\alpha(t)) + u_{\alpha\alpha^*}(\tau)(e^{-i\omega_p t}\alpha^*(t)) + u_{\alpha m}(\tau)\bar{m}(t) \tag{7.2.8}$$

式中，$u_{\alpha n}(\tau)$, $u_{\alpha\alpha}(\tau)$, $u_{\alpha\alpha^*}(\tau)$, $u_{\alpha m}(\tau)$ 分别为 $\tilde{u}_{\alpha n}(s)$, $\tilde{u}_{\alpha\alpha}(s)$, $\tilde{u}_{\alpha\alpha^*}(s)$, $\tilde{u}_{\alpha m}(s)$ 的反变换. (7.2.8) 式又可写为

$$\alpha(t+\tau) = u_{\alpha n}(\tau,t)\bar{n}(t) + u_{\alpha\alpha}(\tau,t)\alpha(t) + u_{\alpha\alpha^*}(\tau,t)\alpha^*(t) + u_{\alpha m}(\tau,t)\bar{m}(t) \tag{7.2.9}$$

其中

$$u_{\alpha n}(\tau,t) = u_{\alpha n}(\tau)e^{-i\omega_p(t+\tau)}$$

$$u_{\alpha\alpha}(\tau,t) = u_{\alpha\alpha}(\tau)e^{-i\omega_p\tau}$$

$$u_{\alpha\alpha^*}(\tau,t) = u_{\alpha\alpha^*}(\tau)e^{-i\omega_p\tau - i2\omega_p t}$$

$$u_{\alpha m}(\tau,t) = u_{\alpha m}(\tau)e^{-i\omega_p(t+\tau_p)}$$

上面得到的解实质上就是我们在 3.2 节中得出的 Bloch 方程的 Torrey 解，但 (7.2.9) 式的形式更适于计算二能级原子的共振荧光.

7.2.2 二能级原子的共振荧光计算

由 $\alpha(t)$, $\alpha^*(t)$ 的定义 (7.2.2) 式得知 $\alpha(t) =< \sigma(t)e^{-i\omega_{21}t} >$, 但这是在相互作用绘景中求得的. 当回到 Schrödinger 绘景时，便是

$$\begin{aligned} &\alpha(t) =< a_1 a_2^+ >=< \sigma^-(t) > \\ &\alpha^*(t) =< \sigma^+(t) >, \quad \bar{n}(t) =< \sigma^+(t)\sigma^-(t) > \\ &\bar{m}(t) =< \sigma^-(t)\sigma(t)^+ > \end{aligned} \tag{7.2.10}$$

用密度矩阵表示便是 $\alpha(t) = \mathrm{tr}[\rho(t)\sigma^-]$, $\bar{m}(t) = \mathrm{tr}[\rho(t)\sigma^-\sigma^+]$, $\alpha^*(t) = \mathrm{tr}[\rho(t)\sigma^+]$, $\bar{n}(t) = \mathrm{tr}[\rho(t)\sigma^+\sigma^-]$ 等.

现在要求在驱动场作用下原子的辐射线型，或者说在入射的单色光作用下，原子的辐射光谱. 包括入射光及原子辐射在内的场强 $E^+(r,t)$ 可写为

$$E^+(r,t) = \vec{\varphi}(r)\sigma^-(t-r/c) + E_f^+(r,t) \tag{7.2.11}$$

式中，$E_f^+(r,t)$ 为入射光场；$\vec{\varphi}(r)$ 为原子的偶极辐射 [10], $\vec{\varphi}(r) = \left(-\dfrac{\omega_0^2\sqrt{2}}{4\pi c^2 r^3}\right)(\vec{\mu}\times\vec{r})\times\vec{r}$; $\sigma^-(t-r/c)$ 为原子的下降算符. 散射光场的一阶相关函数为

$$G_{jk}^{(1)}(r,t';r,t) = \varphi_j^*(r)\varphi_k(r) < \sigma^+(t'-r/c)\sigma^-(t-r/c) > \tag{7.2.12}$$

设原子辐射是一平稳的随机过程，故有

$$< \sigma^+(t'-r/c)\sigma^-(t-r/c) >= g(t'-t) \tag{7.2.13}$$

散射光功率谱为

$$I(\nu,r) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, e^{i\nu\tau} \sum_j G_{jj}^{(1)}(r,0;r,\tau) \tag{7.2.14}$$

故在 r 点的功率谱可表示为 $|\vec{\varphi}(r)|^2$ 与相关函数 $g(\tau)$ 的 Fourier 变换 $\tilde{g}(\nu)$ 的积，即

$$I(\nu,r)=|\varphi(r)|^2\tilde{g}(\nu),\qquad \tilde{g}(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}dte^{i\nu t}g(\tau) \tag{7.2.15}$$

散射光的平均强度为

$$I=\frac{1}{2\pi}\int d\nu\ I(\nu,r)=|\varphi(r)|^2g(0)=|\varphi(r)|^2\bar{n}_\infty \tag{7.2.16}$$

式中， $\bar{n}_\infty$ 为原子处于激发态的几率：

$$\bar{n}_\infty=\lim_{t\to\infty}<\sigma^+(t)\sigma^-(t)>$$

由 (7.2.13),(7.2.15) 式得知原子的自相关函数 $g(t'-t)=<\sigma^+(t')\sigma^-(t)>$ 的 Fourier 变换决定了散射功率谱 $I(\nu;r)$, 但期待值 $<\sigma^+(t')\sigma^-(t)>$ 是涉及双时，即 t' 时及 t 时的两个物理量. 为此，必须将其中的一个物理量，例如 $\sigma(t)$ 也变为 t' 时的物理量，即经过变换 $\sigma^-(t)\to u^{-1}(t,t')\sigma^-(t')u(t,t')$, 与 $\sigma^+(t')$ 相乘，再求统计平均，即为

$$<\sigma^+(t')\sigma^-(t)>=\mathrm{tr}\{\rho(t')\sigma^+(t')u^{-1}(t,t')\sigma^-(t')u(t,t')\} \tag{7.2.17}$$

而 (7.2.17) 式中的 $\rho(t')$ 又可写成场的密度矩阵 $|0>_F\ _F<0|$ 与原子密度矩阵 $\rho_a(t')$ 的直接乘积，故有

$$<\sigma^+(t')\sigma^-(t)>=\mathrm{tr}\{|0>_{FF}<0|\rho_a(t')\sigma^+(t')u^{-1}(t,t')\sigma^-(t')u(t,t')\} \tag{7.2.18}$$

求单时算子 $\sigma^-(t)$ 也可以这样做，即

$$\alpha(t)=\mathrm{tr}\{|0>_{FF}<0|\rho_a(t')u^{-1}(t,t')\sigma^-(t')u(t,t')\} \tag{7.2.19}$$

比较 (7.2.18), (7.2.19) 两式，便得出对应关系

$$\rho_a(t')\to\rho_a(t')\sigma^+(t') \tag{7.2.20}$$

这两个关系表明，双时相关函数的期待值 $<\sigma^+(t')\sigma^-(t)>$ 与单时量的平均值 $\alpha(t)=<\sigma^-(t)>$ 形式上是一样的，只需用 $\rho_a(t')\sigma^+(t')$ 代替 $\rho_a(t')$. 这就意味着 (7.2.9) 式中的参量 $\bar{n}(t)$, $\alpha(t)$, $\alpha^*(t)$, $\bar{n}(t)$ 等也应作相应的代换：

$$\begin{aligned}
&\alpha(t)=<\sigma^-(t)> &&\to\ <\sigma^+(t)\sigma^-(t)>=\bar{n}(t)\\
&\alpha^*(t)=<\sigma^+(t)> &&\to\ <\sigma^+(t)\sigma^+(t)>=0\\
&\bar{m}(t)=<\sigma^-(t)\sigma^+(t)> &&\to\ <\sigma^+(t)\sigma^-(t)\sigma^+(t)>=<\sigma^+(t)>=\alpha^*(t)\\
&\bar{n}(t)=<\sigma^+(t)\sigma^-(t)> &&\to\ <\sigma^+(t)\sigma^+(t)\sigma^-(t)>=0
\end{aligned} \tag{7.2.21}$$

将 (7.2.21) 式代入 (7.2.9) 式，便得

$$g(\tau,t')=<\sigma^+(t'+\tau)\sigma^-(t')>=u_{\alpha\alpha}(\tau,t')\bar{n}(t')+u_{\alpha m}(\tau,t')\alpha^\dagger(t') \tag{7.2.22}$$

式中

$$\begin{aligned}
u_{\alpha\alpha}(\tau,t')&=u_{\alpha\alpha}(\tau)e^{-i\omega_p\tau}\\
u_{\alpha m}(\tau,t')&=u_{\alpha m}(\tau)e^{-i\omega_p\tau}e^{-i\omega_p t'}
\end{aligned} \tag{7.2.23}$$

由 (7.2.8) 式到 (7.2.22) 和 (7.2.23) 式，即量子回归定理[25] 的一个特例.

当 $t' \to \infty$ 时， $g(\tau, t') \to g(\tau)$, 而

$$g(\tau) = u_{\alpha\alpha}(\tau)e^{-i\omega_p\tau}\bar{n}_\infty + u_{\alpha m}(\tau)e^{-i\omega_p\tau}(\alpha^*_\infty e^{-i\omega_p t'}) \tag{7.2.24}$$

式中， $\bar{n}_\infty$, α^*_∞ 可由方程 (7.2.3) 式的定态解得出

$$\begin{aligned}\bar{n}_\infty &= \sigma_{z\infty} + \frac{1}{2} = \frac{\Omega^2/4}{\Omega^2/2 + \delta\omega^2 + \kappa^2/4} \\ \alpha^*_\infty e^{-i\omega_p t'} &= \frac{(-i\Omega/2)z}{\Omega^2/2 + (\delta\omega)^2 + \kappa^2/4}\end{aligned} \tag{7.2.25}$$

对 (7.2.24) 式进行 Laplace 变换，便得

$$\hat{g}(s) = \tilde{u}_{\alpha\alpha}(s + i\omega_p)\bar{n}_\infty + \tilde{u}_{\alpha m}(s + i\omega_p)(\alpha^*_\infty e^{-i\omega_p t'}) \tag{7.2.26}$$

式中， $\tilde{u}_{\alpha,\alpha}$, $\tilde{u}_{\alpha,m}$ 由 (7.2.6), (7.2.7) 式算出为

$$\hat{u}_{\alpha\alpha}(s) = \frac{(s+\kappa)(s+z^*) + \Omega^2/2}{f(s)}, \qquad \hat{u}_{\alpha m}(s) = \frac{i\Omega(s+\kappa)(s+z^*)}{2f(s)s} \tag{7.2.27}$$

当 $s \to -i\omega_p$, 亦即散射频率与入射光频率 ω_p 为相同的相干散射情形， (7.2.26), (7.2.27) 式给出

$$\lim_{s\to -i\omega}[(s+i\omega_p)\hat{g}(s)] = \frac{(\Omega^2/4)z^*}{\Omega^2/2 + (\delta\omega)^2 + \kappa^2/4} \times \frac{\kappa z}{f(0)} = \frac{(\Omega^2/4)|z|^2}{(\Omega^2/2 + |z|^2)^2} = |\alpha_\infty|^2 \tag{7.2.28}$$

这个相干散射项对应于振动 $\alpha_\infty(t) = |\alpha_\infty|e^{-i\omega_p t}$. 下面为简单计，将 ω_p 写为 ω. $\alpha_\infty(t)$ 的自相关函数为 $g_{\rm coh}(\tau) = \alpha^*_\infty(t')\alpha_\infty(t'+\tau) = |\alpha^2_\infty|e^{-i\omega\tau}$,Laplace 变换后为 $|\alpha^2_\infty|/(s+i\omega)$. 将相干散射分量从 $\hat{g}(s)$ 中减去，便得非相干散射分量

$$\hat{g}_{\rm inc}(s) = \hat{g}(s) - \frac{|\alpha_\infty|^2}{(s+i\omega)} \tag{7.2.29}$$

将 (7.2.26) 式代入上式，得

$$\hat{g}_{\rm inc}(s) = \frac{\frac{1}{2}\bar{n}_\infty\Omega^2}{\Omega^2/2 + |z|^2} \times \frac{(s+i\omega)^2 + 2\kappa(s+i\omega) + \Omega^2/2 + \kappa^2}{f(s+i\omega)} \tag{7.2.30}$$

由 (7.2.15) 式定义的相干函数谱 $\tilde{g}(\nu)$ 可直接由 Laplace 变换得出. 这是因为 $g(-\tau) = g^*(\tau)$, 故有 $\tilde{g}(\nu) = 2{\rm Re}[\hat{g}(-i\nu)]$. 将 (7.2.29), (7.2.30) 式代入便得

$$\tilde{g}(\nu) = 2\pi|\alpha_\infty|^2\delta(\nu - \omega) + \bar{n}_\infty\kappa\Omega^2\frac{(\nu-\omega)^2 + (\Omega^2/2 + \kappa^2)}{|f(i(\nu-\omega))|^2} \tag{7.2.31}$$

对于共振情形 $\delta\omega = 0, f(s)$ 的三个根为

$$\begin{aligned}s_0 &= -\frac{1}{2}\kappa \\ s_2 &= -\frac{3}{4}\kappa + (\kappa^2/16 - \Omega^2)^{1/2} \\ s_1 &= -\frac{3}{4}\kappa - (\kappa^2/16 - \Omega^2)^{1/2}\end{aligned} \tag{7.2.32}$$

(7.2.31) 式可写为

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\nu) = &\ 2\pi|\alpha_\infty|^2\delta(\nu-\omega) + \bar{n}_\infty\kappa\Omega^2\frac{(\nu-\omega)^2+(\Omega^2/2+\kappa^2)}{[(\nu-\omega)^2+s_o^2][(\nu-\omega)^2+s_1^2][(\nu-\omega)^2+s_2^2]}\\ = &\ 2\pi|\alpha_\infty|^2\delta(\nu-\omega) + \frac{D_o}{(\nu-\omega)^2+s_o^2} + \frac{M-(\nu-\omega-\Omega')N}{(\nu-\omega-\Omega')^2+\sigma^2} + \frac{M+(\nu-\omega+\Omega')N}{(\nu-\omega+\Omega')^2+\sigma^2}\end{aligned} \tag{7.2.33}$$

式中

$$\begin{aligned}&\sigma = -\frac{3}{4}\kappa, \qquad \Omega' = \left(\Omega^2 - \frac{\kappa^2}{16}\right)^{1/2}\\ &D_o = \frac{1}{2}\kappa\bar{n}_\infty, \qquad M = \frac{3}{8}\kappa\bar{n}_\infty\left(\frac{\Omega^2-\kappa^2/2}{\Omega^2+\kappa^2/2}\right)\\ &N = \frac{\kappa\bar{n}_\infty}{\Omega'8}\left(\frac{5\Omega^2-\frac{1}{2}\kappa^2}{\Omega^2+\frac{1}{2}\kappa^2}\right)\end{aligned} \tag{7.2.34}$$

由 (7.2.33), (7.2.34) 式看出，中峰宽度 $|s_0|$ 与边峰宽度 $|\sigma|$ 之比为 $1:3/2$; 而峰值之比为 $\frac{D_0}{s_0^2}:\frac{M}{\sigma^2} = 1:\frac{1}{3}\frac{\Omega^2-\kappa^2/2}{\Omega^2+\kappa^2/2}$. 对于强场 $\Omega^2 \gg \kappa^2/2$, 峰值比便是 $1:1/3$. 图 7.5 给出共振情形的荧光谱 $\tilde{g}(\nu)$ 曲线，这些就是共振荧光实验结果分析中用到的理论结果.

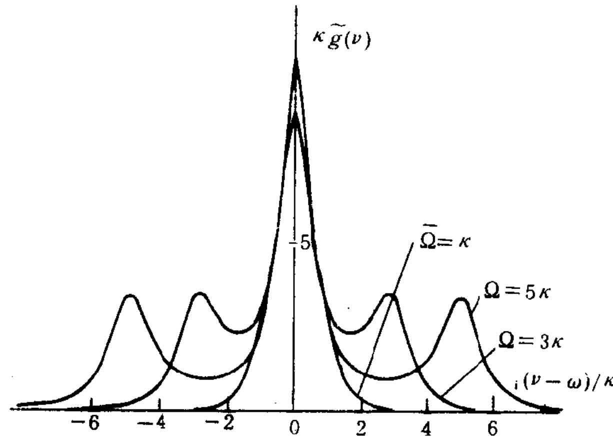


图 7.5 在外场共振驱动下二能级原子的光谱密度
(参照 Mollow [10])

7.2.3 共振吸收

与共振荧光相关的逆过程，便是共振吸收. 在 7.1 节实验中，曾讨论了在强驱动场的作用下二能级原子的吸收谱测定. 十分有意义的是，二能级原子的集居数没有反转，但图 7.3 的吸收谱中竟含有负吸收部分. 这时原子与驱动光场和探针光强同时作用，要计算出原子对探针的吸收谱是很复杂的 [14]. 如果将探针光看作微扰，基本上不影响原子的集居数分布，则吸收谱的计算就要容易得多了. 文献 [14,19] 给出了吸收线型表示式 $\frac{W'(\nu)}{\hbar\nu}$(推导见附录 A)

$$\frac{W'(\nu)}{\hbar\nu} = \frac{\Omega'^2}{4}\int_{-\infty}^{\infty} dte^{i\nu t}g_a(t) = \frac{\Omega'^2}{2}\mathrm{Re}[\hat{g}_a(-i\nu)] \tag{7.2.35}$$

式中

$$g_a(t) = g_d(t) - g_e(t)$$
$$g_d(t) = < \sigma^-(t)\sigma^\dagger > \tag{7.2.36}$$
$$g_e(t) = < \sigma^+\sigma^-(t) >$$

$g_d(t)$ 和 $g_e(t)$ 分别与原子的纯吸收、辐射成正比．(7.2.26) 式已给出了 $g_e(t)$ 的 Laplace 变换

$$\hat{g}_e = \tilde{u}_{\alpha\alpha}(s+i\omega_p)\bar{n}_\infty + \tilde{u}_{\alpha m}(s+i\omega)(\alpha_\infty^* e^{-i\omega_p t}) \tag{7.2.37}$$

用同样的方法得出

$$\hat{g}_d = \tilde{u}_{\alpha\alpha}(s+i\omega_p)\bar{m}_\infty + \tilde{u}_{\alpha n}(s+i\omega)(\alpha_\infty^* e^{-i\omega_p t}) \tag{7.2.38}$$

故有

$$\hat{g}_a(s) = (\bar{m}_\infty - \bar{n}_\infty)\tilde{u}_{\alpha\alpha}(s+i\omega_p) + (\alpha_\infty^* e^{-i\omega_p t})[\tilde{u}_{\alpha n}(s+i\omega_p) - \tilde{u}_{\alpha m}(s+i\omega_p)] \tag{7.2.39}$$

将 (7.2.39) 式代入 (7.2.35) 式，便得出原子的吸收线型函数 $W'(\nu)$(见图 7.6).

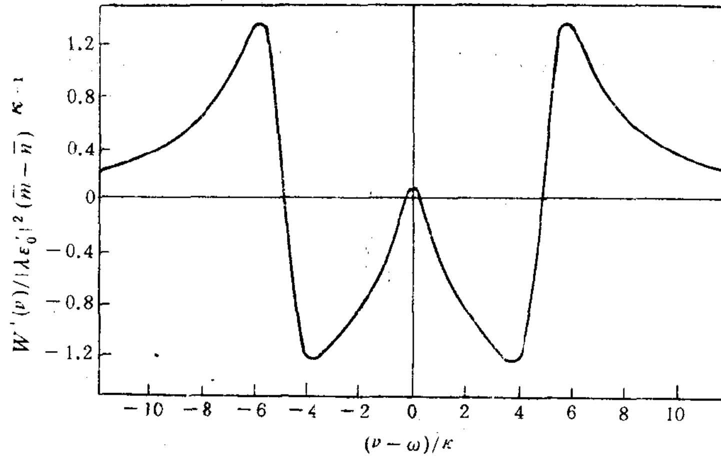


图 7.6　探针光通过被共振泵浦光驱动的原子的吸收线型
泵浦强度为 $\Omega = 5\kappa$, 吸收线型的负值表示受激辐射，即对探针光的放大.
(参照 Mollow [14])

7.2.4　横向弛豫与泵浦抽运对原子共振荧光的影响 [21]

在 7.2.1 节和 7.2.2 节中，我们按照 Mollow 方法求解了二能级原子在驱动场作用下的共振荧光光谱．在求解过程中，假定了原子的横向弛豫 $\gamma_2 = \gamma_1/2 = \kappa/2$; 初始时原子处于基态，即 $2\bar{\sigma}_z = -1$. 一般可令 $\gamma_1 = \kappa_1$, $\gamma_2 = \kappa/2$, $\kappa_1 \neq \kappa$, $z = \kappa/2 - i\delta\omega$, $2\sigma_{z0} = \Delta_0$. 这样，可以研究比值 γ_1/γ_2 变化时对共振荧光谱的影响，(7.2.6) 式应写为

$$\tilde{\alpha}(s) = \frac{(s+\kappa)(s+z^*)+\Omega^2/2}{f(s)}\alpha(0) + \frac{\Omega^2}{2f(s)}\alpha^*(0) - \frac{i\Omega(s+\kappa_1)(s+z^*)}{2f(s)s}\Delta_0 \tag{7.2.40}$$

即

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{u}_{\alpha\alpha}(s)\alpha(0) + \tilde{u}_{\alpha\alpha^*}(s)\alpha^*(0) + \tilde{u}_{\alpha\Delta}(s)(-\Delta_o) \tag{7.2.41}$$

(7.2.3) 式的定态解为

$$\bar{n}_\infty = \frac{1}{2} + \sigma_{z\infty} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\kappa_1 \Delta_o |z|^2}{\kappa_1 |z|^2 + \Omega^2 \kappa/2}\right)$$
$$\langle \alpha_\infty^* e^{-i\omega\kappa} \rangle = \frac{(\kappa_1/2)\Delta_o z^*}{\kappa_1 |z|^2 + \Omega^2\kappa/2} \tag{7.2.42}$$

同样应用量子回归定理及 Laplace 变换得出相关函数 $\hat{g}(s)$ 的表式 (7.2.26), 并应用 (7.2.42) 式代入 (7.2.26) 式中，进一步得出原子的相关函数谱：

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\nu) = & \; 2R_e[\hat{g}(-i(\nu-\omega))] \\
= & -\frac{\kappa_1^2(\Omega^2/4)|z|^2\Delta_o}{(\kappa_1|z|^2 + \frac{\kappa}{2}\Omega^2)^2}\delta(\nu-\omega) + \frac{P(\nu-\omega)^4 + Q(\nu-\omega)^3 + I(\nu-\omega)^2 + J(\nu-\omega) + L}{|f(i(\nu-\omega))|^2} \\
P = & \; \frac{|z|^2\kappa_1(1+\Delta_o) + \dfrac{\Omega^2}{2}\kappa_1\Delta_o + \dfrac{\Omega^2\kappa}{2}}{|z|^2\kappa_1 + \Omega^2\kappa/2}\frac{\kappa}{2}, \qquad Q = 2P\delta\omega \\
I = & \; (\kappa_1^2 + |z|^2 - \Omega^2)P + \frac{\kappa_1}{2}\Omega^2\left(\frac{2P}{\kappa} - \frac{1}{2}\frac{\kappa_1\Omega\Delta_o}{\kappa_1|z|^2 + \Omega^2\kappa/2}\right) \\
J = & \; (\Omega^2 - 2\kappa_1^2 - 2\Omega^2\kappa_1/\kappa)(-\delta\omega)P \\
L = & \; (\kappa_1|z|^2 + \frac{\kappa}{2}\Omega^2)(\kappa_1\kappa + \Omega^2/2)P/\kappa - \frac{\kappa_1}{4}\Delta_o\Omega^4\left\{\frac{\kappa_1\kappa^2 + \dfrac{\kappa\Omega^2}{2} + \kappa|z|^2 - \kappa_1|z|^2}{\kappa_1|z|^2 + \kappa\Omega^2/2}\right\}
\end{aligned} \tag{7.2.43}$$

在 (7.2.43) 式中，令 $\Delta_0 = -1$, $\kappa_1 = \kappa$, 便回到 Mollow 得到的结果.

现就共振情形 $\delta\omega = 0$, 进一步求解相关函数，亦即共振荧光光谱 $\tilde{g}(\nu)$. 当 $\delta\omega = 0$, 有

$$f(s) = (s + \kappa/2)(s(s+\kappa/2) + \kappa_1(s+\kappa/2) + \Omega^2) \tag{7.2.44}$$

特别是在 $T_1 \gg T_2$, $\kappa_1 = \dfrac{1}{T_1}$ 比 $\gamma_2 = \dfrac{1}{T_2} = \dfrac{\kappa}{2}$ 小得多. 在 $\kappa_1 = \dfrac{1}{T_1} \simeq 0$ 的极限情况下，相关函数谱中的非相干部分 $\tilde{g}_{\rm inc}(\nu)$ 为

$$\tilde{g}_{\rm inc}(\nu) \simeq \frac{\kappa/2[(\nu-\omega)^4 + (\kappa^2/4 - \Omega^2)(\nu-\omega)^2 + \Omega^4/2]}{[(\nu-\omega)^2 + \kappa^2/4][(\Omega^2 - (\nu-\omega)^2)^2 + (\kappa^2/4)(\nu-\omega)^2]} \tag{7.2.45}$$

若 $\lambda^2 = \left(\dfrac{2\Omega}{\kappa}\right)^2 \ll 1$ 且 $x^2 = \left[\dfrac{2(\nu-\omega)}{\kappa}\right]^2 < \lambda^2$, 则 (7.2.45) 式有如下简单形式：

$$\frac{\kappa}{2}\tilde{g}_{\rm inc}(\nu) = \frac{\lambda^4 + (1-\lambda^2)x^2 + \lambda^4/2}{(x^2+1)(x^2 + (\lambda^2 - x^2)^2)} \simeq \frac{x^2 + \lambda^4/2}{x^2 + \lambda^4} = 1 - \frac{\lambda^4/2}{x^2 + \lambda^4} \tag{7.2.46}$$

这即荧光的凹陷谱型. 凹陷宽度正比于 Rabi 频率 Ω 的平方，深度约为 0.5(背景为 1). 图 7.7(a) 是当 $\dfrac{2\kappa_1}{\kappa} = 10^{-6}$ 时的凹陷谱，其中 $\lambda^2 = \left(\dfrac{2\Omega}{\kappa}\right)^2 \simeq 0.01$, 因此凹陷宽度 $\simeq 0.01$. 当 $\lambda^2 \ll 1$ 得不到满足时，$T_1 \gg T_2$ 的荧光谱仅由 (7.2.45) 式决定. 从 (7.2.45) 式可看出，随 λ 的增大，凹陷深度趋于减小，而宽度却趋于增大. 当 λ 接近一适当值时，凹陷消失，出现三峰，图 7.7(b),(c) 显示了这一特点. 此外，凹陷谱不仅限于 $\kappa_1/\kappa \ll 1$ 情况. 在图 7.8(a)~(c) 中，我们给出了凹陷谱型与 Rabi 频率 Ω 的关系. 图 7.8(d),(e) 展示了凹陷的

对称特性与失谐量 $\delta\omega$ 的依赖关系．值得一提的是，这里讨论的凹陷出现在均匀加宽的荧光线型上，在 $\kappa_1/\kappa \ll 1$ 情形下，它不受 Δ_0 的影响；更重要的是，这里所说的凹陷也明显不同于非均匀加宽吸收线型上的 Lamb 凹陷 [22]，也不同于由泵浦光和探测光拍频导致的"烧孔凹陷"．

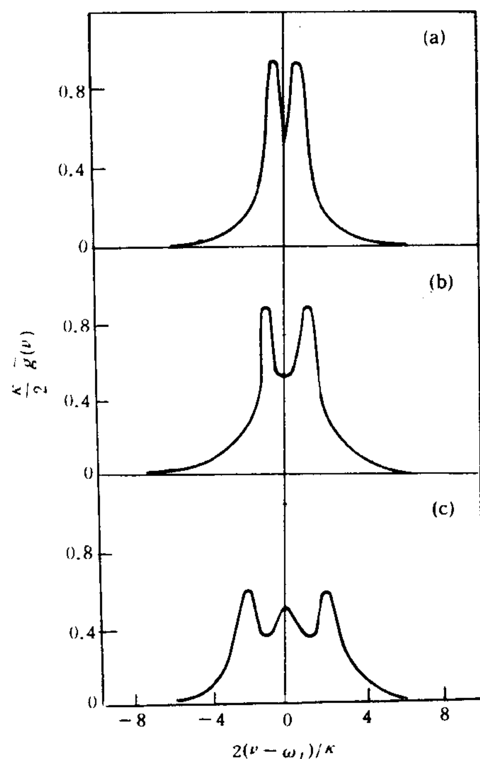


图 7.7 当 $\kappa_1/\kappa << 1$ 时共振荧光凹陷谱

($\Delta_0 = -1$, $\delta\omega = 0$, $2\kappa_1/\kappa = 10^{-6}$)

(a) $2\Omega/\kappa = 0.1$; (b) $2\Omega/\kappa = 1$;(c) $2\Omega/\kappa = 2$

(取自 Tan Weihan and Zhang Weiping [21])

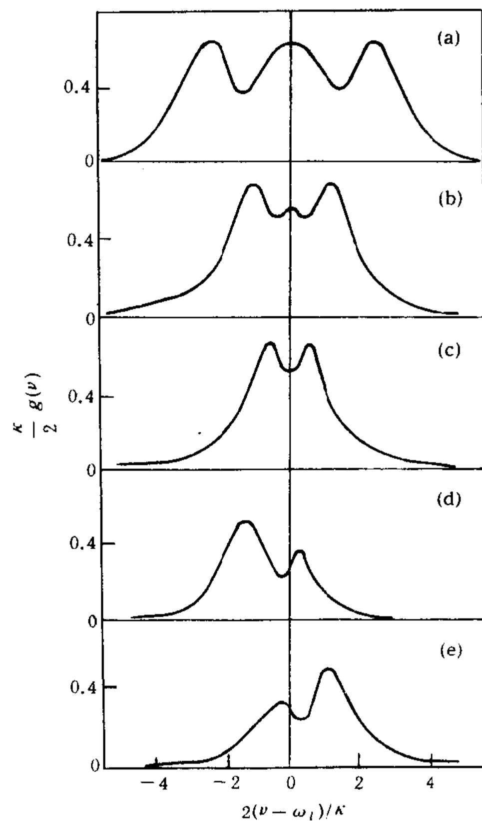


图 7.8 凹陷谱与 Rabi 频率 Ω 的关系

($2\kappa_1/\kappa = 0.1$, $\Delta_0 = -1$)

(a)～ (c),$\delta\omega = 0$, $2\Omega/\kappa = 0.5$, 1, 2;

(d)～ (e) $2\delta\omega/\kappa = 1$, -1

(取自文献 [21])

在图 7.7 中均取 $2\kappa_1/\kappa \simeq 10^{-6}$，因为在固体激光材料中遇到这种情况，如红宝石寿命 $T_1 \simeq 3\times10^{-3}$s. 在温度为 2 K 时线宽约为 0.05cm^{-1}(主要是非均匀加宽)[24]；当温度上升到 77K，线宽增到 0.3cm^{-1}(主要是均匀加宽)[24]. 对于后一种情形，荧光线宽 $\delta\nu$ 的倒数 T_2 与寿命 T_1 之比，$T_2/T_1 \simeq 10^{-7} < 10^{-6}$.

7.3 共振荧光场的态函数与多光子跃迁共振荧光光谱 [26]

在 Mollow 的共振荧光理论中 [10]，原子辐射场的谱分布可通过原子电偶极矩算符的相关函数来计算．近来有人把这种方法推广到双光子跃迁的共振荧光谱． Basu[27] 在 Mavroyannis[28] 发展的格林函数方法基础上，研究了原子双光子跃迁共振荧光光谱．Holm 等人 [29] 应用原子密度矩阵方程处理了同样的问题，并在计算中引入了中间态 $|j>$. 文献 [30] 从缀饰原子入手讨论了双光子共振荧光光谱．这节我们要介绍的方法 [26]，首

先从单光子跃迁的 Mollow 理论入手，根据原子算符的一阶及高阶相关函数直接计算出共振荧光场的态函数 $|\Psi_F>$, 然后由它进一步计算共振荧光场的谱. 这一方法的意义在于它可以很方便推广到双光子跃迁及多光子跃迁的共振荧光谱计算.

7.3.1 单光子跃迁模型

参照 (5.2.8) 式，原子电偶极辐射场可表示为

$$E^+(r,t) = i\left(\frac{\hbar}{V}\right)^{1/2}\sum \omega_k^{1/2}\hat{e_k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}b_k(t) \tag{7.3.1}$$

式中，$\omega_k = c|k|$,b_k 为场的湮灭算符. 另一方面，参照 (7.2.11) 式，不计及入射场 $E_f^+(r,t)$, 只计及原子电偶极辐射场可通过原子的下降算符 σ^- 来表示，即

$$E^+(\vec{r},t) = \varphi(\vec{r})\sigma^-(t-r/c) \tag{7.3.2}$$

按照 Glauber 定义，辐射场相关函数为

$$\begin{aligned}
G^m =& < E^-(\vec{r_1},t_1)\cdots E^-(\vec{r_m},t_m)E^+(\vec{r_1},t_1+\tau_1)\cdots E^+(\vec{r_m},t_m+\tau_m) > \\
=& < (\tfrac{\hbar}{V})^m \textstyle\sum_{\vec{k_1}\cdots\vec{k_m},\vec{k_1'}\cdots\vec{k_m'}} \sqrt{\omega_{k_1}\omega_{k_1}'\cdots\omega_{km}\omega_{km}'} \\
& \times b_{k_1}^\dagger(t_1)\cdots b_{k_m}^\dagger(t_m)b_{k_m'}(t_m+\tau_m) > \\
=& \varphi^2(\vec{r_1})\cdots\varphi^2(\vec{r_m}) < \sigma^+(t_1)\cdots\sigma^+(t_m)\sigma^-(t_1+\tau_1)\cdots\sigma^-(t_m+\tau_m) >
\end{aligned} \tag{7.3.3}$$

将上式对 $\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_m$ 积分，并注意到

$$\frac{1}{V}\sum_{\vec{k'}_i}\int e^{i(\vec{k_i}-\vec{k_i'})\cdot\vec{r}_i}d\vec{r_i} = \int d\vec{k_i'}\delta(\vec{k_i}-\vec{k_i'}) \tag{7.3.4}$$

便得

$$\begin{aligned}
G^{(m)} &= \int G^m d\vec{r}_1\cdots d\vec{r}_m \\
&= (\hbar)^m \sum_{\vec{k_1}\cdots\vec{k_m}} \omega_{k_1}\cdots\omega_{k_m} < b_{k_i}^\dagger(t_1)\cdots b_{k_m}^\dagger(t_m)b_{k_1}(t_1+\tau_1)\cdots b_{k_m}(t_m+\tau_m) > \\
&= (\int\varphi^2(\vec{r})d\vec{r})^m < \sigma^+(t_1)\cdots\sigma^+(t_m)\sigma^-(t_1+\tau_1)\cdots\sigma^-(t_m+\tau_m) >
\end{aligned} \tag{7.3.5}$$

设频率在 $(\nu,\nu+\delta\nu)$ 间的模式数为 $N(\nu)\delta\nu$, 则

$$\begin{aligned}
&(\hbar\nu N(\nu)\delta\nu)^m < b_\nu^\dagger(t_1)\cdots b_\nu^\dagger(t_m)b_\nu(t_1+\tau_1)\cdots b_\nu(t_m+\tau_m) > \\
&= [\int\varphi^2(\vec{r})d\vec{r}]^m < \sigma^+(t_1)\cdots\sigma^+(t_m)\sigma^-(t_1+\tau_1)\cdots\sigma^-(t_m+\tau_m) >
\end{aligned} \tag{7.3.6}$$

用 $(2T)^m\int_{-\infty}^{\infty}d\tau_1\cdots\int_{-\infty}^{\infty}d\tau_m\int d\nu e^{i\nu(\tau_1+\cdots+\tau_m-\tau)}$ 作用于上式两端，并注意到

$$\begin{aligned}
2T\int_{-\infty}^{\infty} < b^+(t_i)b(t_i+\tau_i) > e^{i\nu\tau_i}d\tau_i &= \int_{-T}^{T}dt_i\int_{-\infty}^{\infty}d\tau_i\,\tilde{b}^+(t_i)b(t_i+\tau_i)e^{i\nu\tau_i} \\
&= \tilde{b}^+(\nu)\tilde{b}(\nu)
\end{aligned} \tag{7.3.7}$$

式中，$\tilde{b}^+(\nu)$, $\tilde{b}(\nu)$ 为 $b^+(t)$, $b(t)$ 的 Fourier 变换，则得

$$\int \tilde{b}_\nu^{+m}\tilde{b}_\nu^m e^{-i\nu\tau}d\nu = \int g_0^m g^{(m)}(\nu)e^{-i\nu\tau}d\nu \tag{7.3.8}$$

式中

$$g_0^m = \left(\frac{\int \varphi^2(\vec{r})d\vec{r}}{\hbar\nu N(\nu)\delta\nu}\right)^m \tag{7.3.9}$$

$$\begin{aligned} g^{(m)}(\nu) = & (2T)^m \int\cdots\int d\tau_1\cdots d\tau_m < \sigma^+(t_1)\cdots\sigma^+(t_m) \\ & \times\sigma^-(t_1+\tau_1)\cdots\sigma^-(t_m+\tau_m) > e^{i\nu(\tau_1+\tau_2+\cdots\tau_m)} \\ = & \tilde{\sigma}^{+m}(\nu)\tilde{\sigma}^{-m}(\nu) \end{aligned} \tag{7.3.10}$$

由 (7.3.8) 式，得

$$\tilde{b}_\nu^{+m}\tilde{b}_\nu^m = g_0^m g^{(m)}(\nu) = g_m(\nu) \tag{7.3.11}$$

(7.3.10) 式中，$\sigma^+(t)$, $\sigma^-(t)$ 按 Mollow 方法可表示为

$$\begin{aligned} \sigma^+(t) = & V_{11}(t,t_0)\sigma^+(t_o)\sigma^-(t_o) + V_{12}(t,t_o)\sigma^+(t_0) \\ & +V_{21}(t,t_o)\sigma^-(t_o) + V_{22}(t,t_o)\sigma^-(t_o)\sigma^+(t_o) \end{aligned} \tag{7.3.12}$$

$$\begin{aligned} \sigma^-(t) = & U_{11}(t,t_o)\sigma^+(t_o)\sigma^-(t_o) + U_{12}(t,t_o)\sigma^+(t_o) \\ & +U_{21}(t,t_o)\sigma^-(t_o) + U_{22}(t,t_o)\sigma^-(t_o)\sigma^+(t_o) \end{aligned} \tag{7.3.13}$$

由于

$$\begin{aligned} \sigma^+(t)\sigma^-(t') = & [V_{11}(t,t_o)U_{11}(t',t_o) + V_{12}(t,t'_o)U_{21}(t',t_o)]\sigma^+(t_o)\sigma^-(t_o) \\ & +[V_{11}(t,t_o)U_{12}(t',t_o) + V_{12}(t,t_o)U_{22}(t',t_o)]\sigma^+(t_o) \\ & +[V_{21}(t,t_o)U_{11}(t',t_o) + V_{22}(t,t_o)U_{21}(t',t_o)]\sigma^+(t_o) \\ & +[V_{21}(t,t_o)U_{12}(t',t_o) + V_{22}(t,t_o)U_{22}(t',t_o)]\sigma^-(t_o)\sigma^+(t_o) \end{aligned} \tag{7.3.14}$$

故以 $\sigma^+(t_0)\sigma^-(t_0)$, $\sigma^+(t_0)$, $\sigma^-(t_0)$,$\sigma^-(t_0)\sigma^+(t_0)$ 为基，$\sigma^+(t)$, $\sigma^-(t)$ 可以写成矩阵形式 (下面将 $V(t,t_0)$ 简写为 $V(t)$)

$$\sigma^+(t) = \hat{V}(t) = \begin{pmatrix} V_{11}(t) & V_{12}(t) \\ V_{21}(t) & V_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{7.3.15}$$

$$\sigma^-(t) = \hat{U}(t) = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{7.3.16}$$

而且由 (7.3.14) 式可证明

$$\begin{aligned} \sigma^+(t_i)\sigma^+(t_j) = \hat{V}(t_i)\hat{V}(t_j) \\ \sigma^+(t_i)\sigma^-(t_j) = \hat{V}(t_i)\hat{U}(t_j) \\ \sigma^-(t_i)\sigma^-(t_j) = \hat{U}(t_i)\hat{U}(t_j) \end{aligned} \tag{7.3.17}$$

故

$$\sigma^+(t_1)\cdots\sigma^+(t_m)\sigma^-(t_1+\tau_1)\cdots\sigma^-(t_m+\tau_m) = \hat{V}(t_1)\cdots\hat{V}(t_m)\hat{U}(t_1+\tau_1)\cdots\hat{U}(\tau_m+\tau_m) \tag{7.3.18}$$

(7.3.17), (7.3.18) 式的主要意义是算符的乘积变为 c 数矩阵的乘积，这从 (7.3.14) 式看得

很清楚. 取定初始时刻在 $t_1 = t_0$, 则

$$
\begin{aligned}
&\sigma^+(t_1)\cdots\sigma^+(t_m)\sigma^-(t_1+\tau_1)\cdots\sigma^-(t_m+\tau_m) \\
&\quad = M_{11}(\sigma^+(t_o)\sigma^+(t_o)\sigma^-(t_o)) + M_{12}(\sigma^+(t_o)\sigma^+(t_o)) \\
&\quad\quad + M_{21}(\sigma^+(t_o)\sigma^-(t_o)) + M_{22}(\sigma^+(t_o)\sigma^-(t_o)\sigma^+(t_o)) \\
&\quad = M_{21}(\sigma^+(t_o)\sigma^-(t_o)) + M_{22}\sigma^+(t_o)
\end{aligned}
\tag{7.3.19}
$$

$$
M = \hat{V}(t_2)\cdots\hat{V}(t_m)\hat{U}(t_o+\tau_1)\cdots\hat{U}(t_m+\tau_m) \tag{7.3.20}
$$

将 (7.3.19) 式代入 (7.3.10) 式，便得

$$
g^{(m)}(\nu) = A_{21}(\nu) < \sigma^+(t_o)\sigma^-(t_o) > + A_{22}(\nu) < \sigma^+(t_o) > \tag{7.3.21}
$$

$$
A(\nu) = (v(\nu))^{m-1}(u(\nu))^m \tag{7.3.22}
$$

$$
\hat{u}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} U(t)e^{-i\nu t}dt, \qquad \hat{v}(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} V(t)e^{-i\nu t}dt
$$

参照 (7.2.42) 式，由定态解得出

$$
\begin{aligned}
&< \sigma^+(t_o)\sigma^-(t_o) >_s = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\kappa_1|z|^2\Delta_o}{\kappa_1|z|^2 + \kappa\Omega^2/2}\right) \\
&< \sigma^+(t_o)e^{-i\nu t_o} >_s = \frac{\kappa_1/2\Delta_o z^*}{\kappa_1|z|^2 + \kappa\Omega^2/2}
\end{aligned}
\tag{7.3.23}
$$

参照 (7.2.41) 式， $\hat{u}(\nu)$, $\hat{v}(\nu)$ 的矩阵元有如下的形式：

$$
\begin{aligned}
u_{12}(\nu) &= 2\mathrm{Re}\left[\frac{(i(\nu-\omega)+\kappa_1)(i(\nu-\omega)+z)\Omega^2/2}{f(i(\nu-\omega))}\right] \\
u_{21}(\nu) &= 2\mathrm{Re}[(\Omega^2/2)/f(i(\nu-\omega))] \\
u_{22} = -u_{11}(\nu) &= 2\mathrm{Re}\left[i\Omega\frac{(i(\nu-\omega)+z)(i(\nu-\omega)+\kappa_1)}{2f(i(\nu-\omega))(i(\nu-\omega))}\right] \\
v_{12}(\nu) &= u_{21}(\nu), \quad v_{21}(\nu) = u_{12}(\nu) \\
v_{11}(\nu) &= -v_{22}(\nu) = u_{22}(\nu)
\end{aligned}
\tag{7.3.24}
$$

7.3.2 单光子共振荧光场的态函数

由 (7.3.10), (7.3.11) 式得知，只要知道了由原子算符表示的谱分布 $g^{(m)}(\nu)$, 便可确定荧光场的 m 阶相关函数的统计分布 $\tilde{b}_\nu^{\dagger m}\tilde{b}_\nu^m$. 进一步也可确定共振荧光场的态函数，而这是很关键的一步.

现将共振荧光场的态函数 $|\psi_F>$ 用 Fock 态 $|n>$ 展开为

$$
|\psi_F> = \sum_n \alpha_n(\nu)|n> \tag{7.3.25}
$$

则

$$
\begin{aligned}
< \psi_F|b^{\dagger m}b^m|\psi_F > &= \sum_n r_{mn}|\alpha_m(\nu)|^2 = \tilde{b}_\nu^{\dagger m}\tilde{b}_\nu^m = g_m \\
r_{mn} &= n(n-1)\cdots(n-m+1)
\end{aligned}
\tag{7.3.26}
$$

态函数 $|\psi_F>$ 规一化条件为

$$\sum_n |\alpha_n(\nu)|^2 = 1 \tag{7.3.27}$$

(7.3.26), (7.3.27) 式用矩阵来表示便是

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & r_{11} & \cdots & r_{1m} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & r_{mn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\alpha_o|^2 \\ |\alpha_1|^2 \\ \vdots \\ |\alpha_m|^2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_m \\ \vdots \end{pmatrix} \tag{7.3.28}$$

除了位相因子外，方程 (7.3.28) 完全确定了 $|\alpha_0|, |\alpha_1|, \cdots, |\alpha_m|, \cdots$, 即确定了共振荧光场的态函数.

当 $|\alpha_n(\nu)|$ 求得后，便可计算单光子跃迁的共振荧光谱 I_ν

$$I_\nu = <\psi_F|b^\dagger b|\psi_F> = g_1$$

这表明，如果只是为了计算荧光谱 I_ν, 直接计算 $g_1 = g_0^1 g^{(1)}(\nu)$ 就可以了，并不需要计算态函数 $|\psi_F>$. 但下面将看到，计算双光子跃迁的共振荧光时，必须求出 $|\alpha_n^d(\nu)|$, 即态函数 $|\psi_F>$, 才能计算 I_ν.

7.3.3 双光子跃迁模型

现在考虑如图 7.9 所示的双光子跃迁模型. 能级 $|a>$, $|b>$ 是同宇称的，单光子跃迁被禁戒. 泵浦场通过双光子跃迁作用 $|a>$, $|b>$ 能级，原子再通过从 $|a>\to|b>$ 的双光子跃迁而辐射出两个荧光光子. 因此，与 Mollow 模型不同，这时原子与驱动场相互作用的哈密顿量为

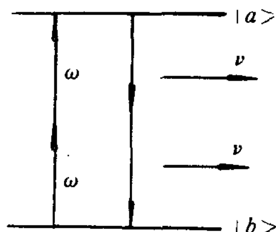


图 7.9 双光子共振荧光能级跃迁图
(取自谭维翰、张卫平 [26])

$$H_2 = -\vec{q} : \vec{E}\vec{E} \tag{7.3.29}$$

式中，$\vec{q}$ 是原子的四极矩张量，$\vec{E}$ 是泵浦场. 类似于 (7.2.3) 式，双光子跃迁的原子上升与下降算符的运动方程变成

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\sigma(t)e^{-i2\omega t}) = -z^*(\sigma(t)e^{-i2\omega t}) - i\frac{\Omega}{2}\sigma_z \\ &\frac{\partial}{\partial t}(\sigma^\dagger(t)e^{i2\omega t}) = -z(\sigma^\dagger(t)e^{i2\omega t}) + i\frac{\Omega}{2}\sigma_z \\ &\frac{\partial}{\partial t}\sigma_z = -k_1(\sigma_z - \Delta_o) + i\Omega(\sigma^\dagger(t)e^{i2\omega t} - \sigma(t)e^{-i2\omega t}) \end{aligned} \tag{7.3.30}$$

式中，$z = \kappa/2 + i(2\omega - \omega_0)$, $\Omega = \dfrac{2|\vec{q} : \vec{E}\vec{E}|}{\hbar}$ 是双光子 Rabi 频率. (7.3.30) 式虽与单光子跃迁方程 (7.2.3) 很相似，但从图 7.9 看出，原子双光子荧光发射与单光子情形有着本质区别. 这种区别反映在数学上就是 (7.3.2) 式应改成

$$E^-(\vec{r},t)E^-(\vec{r},t)=\varphi(\vec{r})\sigma^-(t-r/c) \tag{7.3.31}$$

该式的意义，即原子从上能级 $|a>$ 跃迁到下能级 $|b>$ 的过程中放出两个荧光光子. 应用求 (7.3.26) 式的同样方法，有

$$
\begin{gathered}
<b_\nu^{\dagger 2m}b_\nu^{2m}>=g_{od}^m g_d^{(m)}(\nu)=g_m^d \\
g_d^{(m)}(\nu)=A_{21}^d(\nu)<\sigma^\dagger(t_o)\sigma(t_o)>_s^d+A_{22}^d(\nu)<\sigma^\dagger(t_o)>_s^d \\
A^d(\nu)=(v_d(\nu))^{m-1}(u_d(\nu))^m,\quad m=1,2,\cdots
\end{gathered} \tag{7.3.32}
$$

(7.3.32) 式中的各量均标以角标“ d ”, 以与单光子跃迁同样量加以区别. 由于算符运动方程 (7.3.30) 式与单光子跃迁 (7.2.3) 式有着相同形式，因此矩阵 $v_d(\nu)$, $u_d(\nu)$ 与 $v(\nu)$, $u(\nu)$ 以及稳态解 $<\sigma^+(t_0)\sigma(t_0)>_s^d$, $<\sigma^+(t_0)>_s^d$ 与 $<\sigma^+(t_0)\sigma(t_0)>_s$, $<\sigma^+(t_0)>_s$ 也有同样形式，只要把 Rabi 频率换成双光子 Rabi 频率 $\Omega=\dfrac{2|\vec{q}:\vec{E}\vec{E}|}{\hbar}$, 参量 z 换成 $z=\kappa/2+i(2\omega-\omega_0)$. 另一方面，从物理方面考虑，双光子荧光态函数 $|\psi_F^d>$ 只能按 $|2n>_\nu$ 来展开，即

$$|\psi_F^d>=\sum_n \alpha_n^d(\nu)|2n>_\nu \tag{7.3.33}$$

由 (7.3.32) 第一式及 (7.3.33) 式，立即得出关于 $|\alpha_n^d(\nu)|$ 的方程

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=m}^{\infty}R_{mn}|\alpha_n^d(\nu)|^2=g_m^d \\
R_{mn}=2n(2n-1)\cdots(2n-2m+1),\quad m=0,1,2,\cdots
\end{gathered} \tag{7.3.34}
$$

并由此得出原子的双光子共振荧光谱分布为

$$I_\nu^d=<b_\nu^\dagger b_\nu>=<\psi_F^d|b_\nu^\dagger b_\nu|\psi_F^d>=\sum 2n|\alpha_n^d(\nu)|^2 \tag{7.3.35}$$

将这结果与 (7.3.32) 比较，我们得不出单光子跃迁情形的关系式 $I_\nu=<\psi_F|b^\dagger b|\psi_F>=g_1$. 这就是双光子跃迁的共振荧光谱与单光子跃迁的共振荧光迥然不同之处，亦即必须解出 $|\alpha_n^d(\nu)|$ 来，才能求得 I_ν^d.

7.3.4 数值结果与讨论

图 7.10 和图 7.11(a),(b) 分别为单光子跃迁 ($\kappa_1/\kappa=1$) 、双光子跃迁 ($\kappa_1/\kappa=1$) 、双光子跃迁 ($\kappa_1/\kappa=10^{-6}$) 的共振荧光谱计算结果. 图 7.10 即单光子跃迁结果，与 Mollow 结果一致. 图 7.11(a) 参数与图 7.10 同，但为双光子跃迁共振荧光，仍具有三峰结构特点. 图 7.11(a) 与图 7.10 相比，不同之处在于双光子跃迁荧光中峰增宽，而边峰强度增加. 图 7.11(b) 给出固体原子的双光子共振荧光谱，呈现出固体原子单光子跃迁荧光谱的一些特征，边峰明显很高甚至高过中峰.

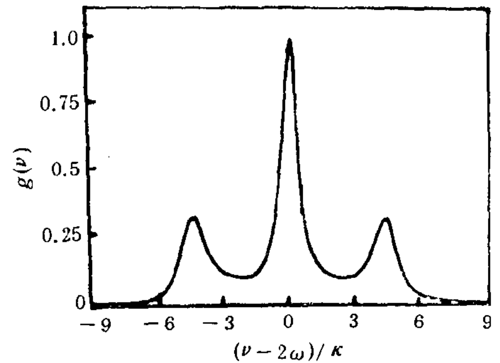


图 7.10 单光子跃迁的共振荧光谱

($\kappa_1/\kappa=1$; $\delta\omega=0$, $\Omega/\kappa=5$, $\Delta_0=-1$)

(取自文献 [26])

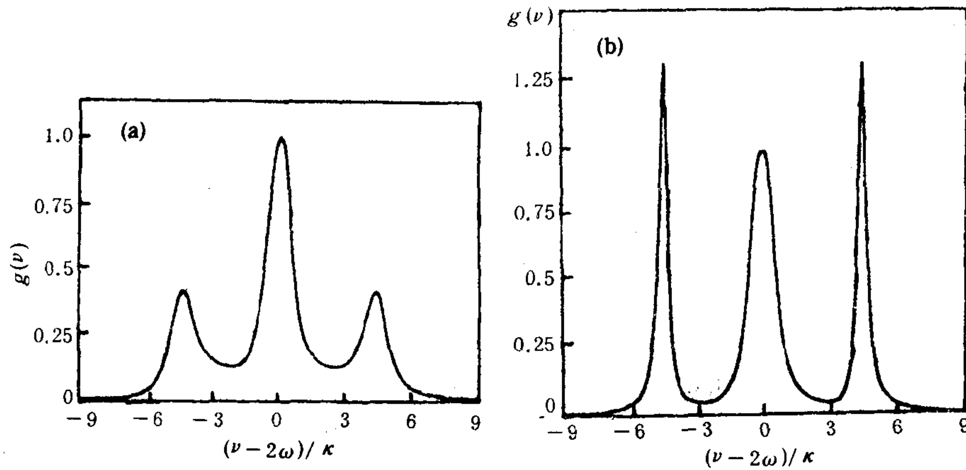


图 7.11 (a) 气体原子双光子共振荧光谱 ($\kappa_1/\kappa=1$; $\delta\omega=0$, $\Omega/\kappa=5$, $\Delta_0=-1$)
(b) 固体原子双光子共振荧光谱 ($\kappa_1/\kappa=10^{-6}$; $\delta\omega=0$, $\Omega/\kappa=5$, $\Delta_0=-1$)
(取自文献 [26])

7.4 二能级原子系统的瞬态共振荧光 [33]

关于稳态荧光，Mollow 的做法主要有：(1) 将 Langevin 方程对于无规力求平均，得到 $<\sigma_z>$, $<\sigma^->$ 等满足的方程 (7.2.1); (2) 假设原子辐射是一平稳的随机过程 (7.2.13); (3) 量子回归定理 (7.2.22). 这些方法对于瞬态还有许多发展与补充 [32]. 这一节我们主要介绍另一种方法 [33].

7.4.1 含无规力的 Bloch 方程的解析解

由方程 5.3.35 式，即

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sigma_z &= -\gamma_1(\sigma_z-\bar{\sigma}_z)-\frac{i\Omega}{2}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})(\sigma^- - \sigma^+)+\Gamma_z\\ \frac{d}{dt}\sigma^{\mp} &= -(\gamma_2\pm i\omega_o)\sigma^{\mp}\mp i\Omega(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})\sigma_z+\Gamma^{\mp}\end{aligned}\tag{7.4.1}$$

设外场频率 ω 与原子跃迁频率 $\omega_0=\dfrac{E_2-E_1}{\hbar}$ 为共振. 对上式取旋波近似，并作变换，即

$$\begin{aligned}\sigma^{\pm}&\to\sigma^{\pm}e^{\pm i\omega_o t}, \quad \sigma_z\to\sigma_z\\ \Gamma^{\pm}&\to\Gamma^{\pm}e^{\pm i\omega_o t}, \quad \Gamma_z\to\Gamma_z\end{aligned}\tag{7.4.2}$$

便得

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\sigma_z\\ \sigma^-\\ \sigma^+\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\gamma_1 & -i\Omega/2 & i\Omega/2\\ -i\Omega & -\gamma_2 & 0\\ i\Omega & 0 & -\gamma_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_z\\ \sigma^-\\ \sigma^+\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma_1\bar{\sigma}_z+\Gamma_z\\ \Gamma^-\\ \Gamma^+\end{pmatrix}\tag{7.4.3}$$

为解方程 (7.4.3), 我们先将其在某一线性变换作用下化为对角形式，系数矩阵行列式的特征根为

$$\lambda_0=-\gamma_2, \qquad \lambda_1,\ \lambda_2=-\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}\right)^2-\Omega^2}\tag{7.4.4}$$

由此求得变换矩阵 T 及其逆 T^{-1} 为

$$T=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{A-B}{-2B} & \dfrac{A+B}{2B} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-i\Omega}{2B} & \dfrac{i\Omega}{2B} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{i\Omega}{2B} & \dfrac{-i\Omega}{2B} \end{pmatrix}, \quad T^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & \dfrac{i\Omega/2}{A-B} & \dfrac{-i\Omega/2}{A-B} \\ 1 & \dfrac{i\Omega}{A+B} & \dfrac{-i\Omega}{A+B} \end{pmatrix} \tag{7.4.5}$$

式中

$$A=\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}, \quad B=\sqrt{A^2-\Omega^2} \tag{7.4.6}$$

在 T, T^{-1} 作用下，系数矩阵被对角化

$$T^{-1}\begin{pmatrix} -\gamma_1 & -i\Omega/2 & i\Omega/2 \\ -i\Omega & -\gamma_2 & 0 \\ i\Omega & 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix} T=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \tag{7.4.7}$$

方程 (7.4.3) 也可写为

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_z \\ \tilde{\sigma}^- \\ \tilde{\sigma}^+ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_z \\ \tilde{\sigma}^- \\ \tilde{\sigma}^+ \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_1\tilde{\sigma}_z \\ \gamma_1\tilde{\sigma}_z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_o \\ \tilde{\Gamma}_1 \\ \tilde{\Gamma}_2 \end{pmatrix} \tag{7.4.8}$$

式中

$$\begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_0 \\ \tilde{\Gamma}_1 \\ \tilde{\Gamma}_2 \end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix} \Gamma_z \\ \Gamma^- \\ \Gamma^+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_z \\ \tilde{\sigma}^- \\ \tilde{\sigma}^+ \end{pmatrix}=T^{-1}\begin{pmatrix} \sigma_z \\ \sigma^- \\ \sigma^+ \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma^-+\sigma^+}{\sqrt{2}} \\ \sigma_z+\dfrac{i\Omega/2}{A-B}(\sigma^--\sigma^+) \\ \sigma_z+\dfrac{i\Omega/2}{A+B}(\sigma^--\sigma^+) \end{pmatrix} \tag{7.4.9}$$

这样，(7.4.8) 式的解可表示为

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_z &= \tilde{\sigma}_{z0}e^{\lambda_0 t}+\int_0^t \tilde{\Gamma}_0(\tau)e^{\lambda_0(t-\tau)}d\tau=\tilde{\sigma}_{zs}+\tilde{L}_0 \\ \tilde{\sigma}^- &= \tilde{\sigma}_0^- e^{\lambda_1 t}+\int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\gamma_1\tilde{\sigma}_z d\tau+\int_0^t \tilde{\Gamma}_1(\tau)e^{\lambda_1(t-\tau)}d\tau=\tilde{\sigma}_s^-+\tilde{L}_1 \\ \tilde{\sigma}^+ &= \tilde{\sigma}_0^+ e^{\lambda_2 t}+\int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\gamma_1\tilde{\sigma}_z d\tau+\int_0^t \tilde{\Gamma}_2(\tau)e^{\lambda_2(t-\tau)}d\tau=\tilde{\sigma}_s^++\tilde{L}_2 \end{aligned} \tag{7.4.10}$$

式中，$\tilde{L}_0$, $\tilde{L}_1$, $\tilde{L}_2$ 表示等式右面最后一项与无规力有关的积分．与无规力无关的项用 $\tilde{\sigma}_{zs}$, $\tilde{\sigma}_s^-$, $\tilde{\sigma}_s^+$ 表示．由 (7.4.9), (7.4.10) 式及 $TT^{-1}=1$, 得

$$\begin{pmatrix} \sigma_z \\ \sigma^- \\ \sigma^+ \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_z \\ \tilde{\sigma}^- \\ \tilde{\sigma}^+ \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{zs} \\ \tilde{\sigma}_s^- \\ \tilde{\sigma}_s^+ \end{pmatrix}+T\begin{pmatrix} \tilde{L}_0 \\ \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sigma_{zs} \\ \sigma_s^- \\ \sigma_s^+ \end{pmatrix}+T\begin{pmatrix} \tilde{L}_0 \\ \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \end{pmatrix}$$

或简写为

$$\sigma = \sigma_s + T\tilde{L} = \sigma_s + L \tag{7.4.11}$$

式中， σ_s 为方程 (7.4.3) 去掉无规力的解

(7.4.11) 式的转置矩阵 (行与列对换) 用右上角“ r ”表示，则得

$$\sigma^r = \sigma_s^r + \tilde{L}^r T^r \tag{7.4.12}$$

由 (7.4.11), (7.4.12) 式得

$$< \sigma\sigma^r > = < (\sigma_s + T\tilde{L})(\sigma_s^r + \tilde{L}^r T^r) > \tag{7.4.13}$$

由于 $< \tilde{L}_i > = 0$, 故上式可写为

$$< \sigma\sigma^r > = < \sigma_s\sigma_s^r > + T < \tilde{L}\tilde{L}^r > T^r \tag{7.4.14}$$

或

$$\begin{aligned} D = < \tilde{L}\tilde{L}_r > = & \; T^{-1}(< \sigma\sigma^r > - < \sigma_s\sigma_s^r >)(T^r)^{-1} \\ = & \; T^{-1}(< \sigma\sigma^r > - < \sigma_s\sigma_s^r >)(T^{-1})^r \end{aligned} \tag{7.4.15}$$

我们称无规力构成的矩阵 $D = < \tilde{L}\tilde{L}^r >$ 为扩散矩阵，$< \sigma\sigma^r >$ 为解矩阵. 由 (7.4.14), (7.4.15) 式给出的这两种矩阵的关系，只要知道其中之一，便可算出另一个矩阵. 由解矩阵的对易关系，就可计算扩散矩阵 $D, D_{ij} = < \tilde{L}_i\tilde{L}_j >$. 已知自旋算符满足如下对易关系 (参见 (2.6.17)~ (2.6.22) 式)：

$$\begin{aligned} & < \sigma^+\sigma^- - \sigma^-\sigma^+ > = 2 < \sigma_z >, \quad < \sigma^+\sigma^- + \sigma^-\sigma^+ > = 1 \\ & < \sigma^\pm\sigma_z - \sigma_z\sigma^\pm > = \mp < \sigma^\pm >, \quad < \sigma^\pm\sigma_z + \sigma_z\sigma^\pm > = 0 \\ & < \sigma^{-2} > = < \sigma^{+2} > = 0, \qquad < \sigma_z^2 > = \frac{1}{4} \end{aligned} \tag{7.4.16}$$

故有

$$\begin{aligned} < \sigma\sigma^r > = & \begin{pmatrix} < \sigma_z\sigma_z > & < \sigma_z\sigma^- > & < \sigma_z\sigma^+ > \\ < \sigma^-\sigma_z > & < \sigma^{-2} > & < \sigma^-\sigma^+ > \\ < \sigma^+\sigma_z > & < \sigma^+\sigma^- > & < \sigma^{+2} > \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 1/4 & - < \sigma^- > /2 & < \sigma^+ > /2 \\ < \sigma^- > /2 & 0 & \frac{1}{2} - < \sigma_z > \\ - < \sigma^+ > /2 & \frac{1}{2} + < \sigma_z > & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.4.17}$$

由于

$$\begin{aligned} < \sigma_z > &= \sigma_{zs} + < L_o > = \sigma_{zs} \\ < \sigma^- > &= \sigma_s^- + < L_1 > = \sigma_s^- \\ < \sigma^+ > &= \sigma_s^+ + < L_2 > = \sigma_s^+ \end{aligned}$$

故有

$$< \sigma\sigma^r > = \begin{pmatrix} 1/4 & -\sigma_s^-/2 & \sigma_s^+/2 \\ \sigma_s^-/2 & 0 & \frac{1}{2} - \sigma_{zs} \\ -\sigma_s^+/2 & \frac{1}{2} + \sigma_{zs} & 0 \end{pmatrix} \tag{7.4.18}$$

将 (7.4.18) 式代入 (7.4.15) 式，便得扩散矩阵 D.

应注意到 (7.4.18) 式中的 σ, σ^r 是同时的，即 $<\sigma\sigma^r>=<\sigma(t)\sigma^r(t)>$, 代入 (7.4.15) 式得到的扩散矩阵 D 的矩阵元也是同时的，即 $D_{ij}(t,0)=<\tilde{L}_i(t)\tilde{L}_j(t)>$. 为了计算共振荧光，还需知道不同时刻的扩散矩阵元 $D_{ij}(t,\tau)=<\tilde{L}_i(t)\tilde{L}_j(t+\tau)>$, 即无规力积分间的相关函数. 考虑到无规力的性质

$$<\tilde{\Gamma}_i(\tau')_j\tilde{\Gamma}_j(\tau'')>=\alpha_{ij}\delta(\tau'-\tau'') \tag{7.4.19}$$

并按 $\tilde{L}_i(t)$ 的定义，便得

$$\begin{aligned}
D_{ij}(t,\tau) &= <\tilde{L}_i(t)\tilde{L}_j(t+\tau)> \\
&= <\int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau')}\tilde{\Gamma}_i(\tau')d\tau'\int_0^{t+\tau} e^{\lambda_j(t+\tau-\tau'')}\tilde{\Gamma}_j(\tau'')d\tau''> \\
&= \begin{cases} <\displaystyle\int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau')}\tilde{\Gamma}_i(\tau')d\tau'\int_0^t e^{\lambda_j(t+\tau-\tau'')}\tilde{\Gamma}_j(\tau'')d\tau''>, & \tau>0 \\ e^{-\lambda_i\tau}<\displaystyle\int_0^{t+\tau} e^{\lambda_i(t+\tau-\tau')}\tilde{\Gamma}_i(\tau')d\tau'\int_0^{t+\tau} e^{\lambda_j(t+\tau-\tau'')}\tilde{\Gamma}_j(\tau'')d\tau''>, & \tau<0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} D_{ij}(t,0)e^{\lambda_j\tau}, & \tau>0 \\ e^{-\lambda_i\tau}D_{ij}(t+\tau,0), & \tau<0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{7.4.20}$$

于是 $\sigma(t)$, $\sigma^r(t+\tau)$ 间的相关函数为 (设 $\tau>0$)

$$<\sigma(t)\sigma^r(t+\tau)>=\sigma_s(t)\sigma_s^r(t+\tau)+TD(t,0)e^{\lambda\tau}T^r \tag{7.4.21}$$

将 (7.4.21) 式中的 $D(t,0)$ 用 (7.4.15) 式代入，便得

$$\begin{aligned}
<\sigma(t)\sigma^r(t+\tau)> &= \sigma_s(t)\sigma_s^r(t+\tau)+TT^{-1}(<\sigma(t)\sigma^r(t)>-\sigma_s(t)\sigma_s^r(t))\times(T^r)^{-1}e^{\lambda t}T^r \\
&= \sigma_s(t)\sigma_s^r(t+\tau)+[<\sigma(t)\sigma^r(t)>-\sigma_s(t)\sigma_s^r(t)](Te^{(\lambda\tau)}T^{-1})^r
\end{aligned} \tag{7.4.22}$$

现计算 (7.4.22) 式中的第一项. 先将 σ_s 表示为 $\sigma_s=T(\tilde{\sigma}_s)$, 而 $\tilde{\sigma}_s$ 又满足当无规力 $\tilde{\Gamma}_i$ 取为 0 时的方程 (7.4.8), 其解为

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{zs}(t) \\ \tilde{\sigma}_s^-(t) \\ \tilde{\sigma}_s^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_{zo}e^{\lambda_0 t} \\ \tilde{\sigma}_o^- e^{\lambda_1 t} \\ \tilde{\sigma}_o^+ e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_1\bar{\sigma}_z\frac{e^{\lambda_1 t}-1}{\lambda_1} \\ \gamma_1\bar{\sigma}_z\frac{e^{\lambda_2 t}-1}{\lambda_2} \end{pmatrix} \tag{7.4.23}$$

或简写为

$$\tilde{\sigma}_s(t)=\tilde{\sigma}_s(0)e^{(\lambda t)}+\tilde{\sigma}_c(t) \tag{7.4.24}$$

式中，$\tilde{\sigma}_c(t)$ 为正比于 $\gamma_1\bar{\sigma}_z$ 并包含了导致相干散射的项. 由 (7.4.23), (7.4.24) 式，易得

$$\tilde{\sigma}_s(t+\tau)=\tilde{\sigma}_s(t)e^{(\lambda\tau)}+\tilde{\sigma}_c(\tau) \tag{7.4.25}$$

由 (7.4.25) 式，得

$$\sigma_s(t)\sigma_s^r(t+\tau)=\sigma_s(t)[\tilde{\sigma}_s^r(t)e^{(\lambda\tau)}+\tilde{\sigma}_c^r(\tau)]T^r=\sigma_s(t)[\sigma_s^r(t)(T^{-1})^r e^{(\lambda\tau)}+\tilde{\sigma}_c^r(\tau)]T^r \tag{7.4.26}$$

代入 (7.4.22) 式中，便得

$$< \sigma(t)\sigma^r(t+\tau) >= \sigma_s(t)\tilde{\sigma}_c^r(\tau)T^r + < \sigma(t)\sigma^r(t) > (Te^{(\lambda\tau)}T^{-1})^r \tag{7.4.27}$$

当 $\tau < 0$ 时，同样可证

$$< \sigma(t)\sigma^r(t+\tau) >= T\tilde{\sigma}_c(\tau)\sigma_s^r(t+\tau) + Te^{-(\lambda\tau)}T^{-1} < \sigma(t+\tau)\sigma^r(t+\tau) > \tag{7.4.28}$$

(7.4.27), (7.4.28) 式是我们用来计算瞬态共振荧光谱的主要依据. 具体计算将在下面完成. 式中 $< \sigma(t)\sigma^r(t) >$, $< \sigma(t+\tau)\sigma^r(t+\tau) >$ 按 (7.4.18) 式取值.

7.4.2 二能级原子系统的瞬态共振荧光谱

按通常求变量 $x(t)$ 的谱的方法 [34], 先定义谱函数

$$y(\omega) = \int_0^t e^{-i\omega t'}x(t')dt' \tag{7.4.29}$$

再定义谱密度

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{2\pi t} < |y(\omega)|^2 >= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\pi t} < \int_0^t e^{-i\omega t'}x(t')dt'\int_0^t e^{i\omega t''}x(t'')dt' > \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\pi t}\mathrm{Re}\int_0^t e^{-st}d\tau\int_0^{t-\tau} < x(t')x(t'+\tau) > dt'|_{s=i\omega} \end{aligned} \tag{7.4.30}$$

参照谱密度定义，可定义瞬态谱矩阵如下：

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{\pi t}\mathrm{Re}\int_0^t e^{-s\tau}d\tau\int_0^{t-\tau} < \sigma(t')\sigma^r(t'+\tau) > dt'|_{s=i\omega} \\ &= \frac{1}{\pi t}\mathrm{Re}\int_0^t e^{-s\tau}d\tau\int_0^{t-\tau}\sigma_s(t')dt'\tilde{\sigma}_c^r(\tau)T^r|_{s=i\omega} \\ &\quad +\frac{1}{\pi t}\mathrm{Re}\int_0^t e^{-s\tau}\int_0^{t-\tau} < \sigma(t')\sigma^r(t') > dt'(Te^{\lambda\tau}T^{-1})^r d\tau|_{s=i\omega} \end{aligned} \tag{7.4.31}$$

当 $t \to$ 很大时，上式中 $\int_0^{t-\tau} \simeq \int_0^t$, 故有

$$\begin{aligned} G(\omega) \simeq& \frac{1}{\pi t}\mathrm{Re}\{\int_0^t \sigma_s(t')dt'\tilde{\sigma}_c^r(\frac{1}{s-\lambda}-\frac{1}{s})T^r \\ &+\int_0^t < \sigma(t')\sigma^r(t') > dt'(T\frac{1}{s-\lambda}T^{-1})^r\}_{s=i\omega} \end{aligned} \tag{7.4.32}$$

$$\tilde{\sigma}_c^r = (0, \quad \frac{\gamma_1\bar{\sigma}_z}{\lambda_1}, \quad \frac{\gamma_1\bar{\sigma}_z}{\lambda_2}) \tag{7.4.33}$$

(7.4.32) 式中正比于 $1/s$ 的项为相干散射项，其余为非相干散射项. 注意到

$$(T(s-\lambda)^{-1}T^{-1})^r =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{A-B}{-2B}\frac{1}{s-\lambda_1}+\frac{A+B}{2B}\frac{1}{s-\lambda_2} & \frac{-i\Omega}{2B}(\frac{1}{s-\lambda_1}-\frac{1}{s-\lambda_2}) & \frac{i\Omega}{2B}(\frac{1}{s-\lambda_1}-\frac{1}{s-\lambda_2}) \\ \frac{-i\Omega}{4B}(\frac{1}{s-\lambda_1}-\frac{1}{s-\lambda_2}) & \frac{1}{2(s-\lambda_0)}+\frac{A+B}{4B}\frac{1}{s-\lambda_1}-\frac{A-B}{4B}\frac{1}{s-\lambda_2} & \frac{1}{2(s-\lambda_0)}-\frac{A+B}{4B}\frac{1}{s-\lambda_1}+\frac{A-B}{4B}\frac{1}{s-\lambda_2} \\ \frac{i\Omega}{4B}(\frac{1}{s-\lambda_1}-\frac{1}{s-\lambda_2}) & \frac{1}{2(s-\lambda_0)}-\frac{A+B}{4B}\frac{1}{s-\lambda_1}+\frac{A-B}{4B}\frac{1}{s-\lambda_2} & \frac{1}{2(s-\lambda_0)}+\frac{A+B}{4B}\frac{1}{s-\lambda_1}-\frac{A-B}{4B}\frac{1}{s-\lambda_2} \end{pmatrix} \tag{7.4.34}$$

共振荧光非相干散射部分所涉及的即 (7.4.32) 式中的 $G_{32}^{inc}(\omega)$ 矩阵元. 由 (7.4.32)~(7.4.34) 式，得

$$\begin{aligned}
G_{32}^{inc}(\omega) &= \frac{1}{\pi t}\mathrm{Re}\int_0^t e^{-s\tau}d\tau\int_0^{t-\tau} <\sigma^+(t')\sigma^-(t'+\tau)>^{inc} dt'|_{s=i\omega} \\
&= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\Big\{\overline{\frac{-<\sigma^+>}{2}}\left(\frac{-i\Omega}{2B}\right)\left(\frac{1}{s-\lambda_1}-\frac{1}{s-\lambda_2}\right) \\
&\quad +\overline{\left(\frac{1}{2}+<\sigma_z>\right)}\left(\frac{1}{2(s-\lambda_0)}-\frac{A+B}{4B}\frac{1}{s-\lambda_1}+\frac{A-B}{4B}\frac{1}{s-\lambda_2}\right) \\
&\quad -\frac{i\Omega\gamma_1}{2B}\bar{\sigma}_z\left(\frac{1}{\lambda_1(s-\lambda_1)}-\frac{1}{\lambda_2(s-\lambda_2)}\right)\overline{\sigma_s^+}\Big\}_{s=i\omega}
\end{aligned} \tag{7.4.35}$$

式中

$$\begin{aligned}
\overline{\frac{-<\sigma^+>}{2}} &= \frac{1}{t}\int_0^t <\sigma^+(t')\sigma_z(t')> dt' \\
\overline{\frac{1}{2}+<\sigma_z>} &= \frac{1}{t}\int_0^t <\sigma^+(t')\sigma^-(t')> dt' \\
\overline{\sigma_s^+} &= \frac{1}{t}\int_0^t \sigma_s^+(t')dt'
\end{aligned} \tag{7.4.36}$$

若 (7.4.36) 式中 $\overline{\frac{-<\sigma^+>}{2}}$, $\overline{1/2+<\sigma(z)>}$, σ^+ 代以 $t\to\infty$ 时的稳态值：

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma_s^+} = \overline{<\sigma^+>} &= \frac{i\kappa_1\bar{\sigma}_z\Omega}{\kappa^2/2+\Omega^2} \\
\overline{\frac{1}{2}+<\sigma_z>} &= \frac{1}{2}+\frac{\kappa^2/2\bar{\sigma}_z}{\kappa^2/2+\Omega^2}
\end{aligned} \tag{7.4.37}$$

则 $G_{32}^{inc}(\omega)$ 就过渡到 Mollow 所得到的结果.

图 7.12, 7.13 给出按 (7.4.35), (7.4.36) 式计算出的瞬态共振荧光谱与 Mollow 得到的稳态共振荧光谱的比较. (7.4.36) 式被积函数按 (7.4.18) 式取值. 设光场是在 $t>0$ 作用于原子的，故初值可取为

$$<\sigma_0^{\pm}>=0, \quad <\sigma_{zo}>=\bar{\sigma}_z=-1/2 \tag{7.4.38}$$

参照 (7.4.23), (7.4.24) 及 (7.4.6) 诸式，并代入初值 (7.4.38) 式，便得

$$\begin{aligned}
<\sigma_z> &= \left(\frac{1}{2}(1-A/B)e^{\lambda_1 t}+\frac{1}{2}(1+A/B)e^{\lambda_2 t}\right)<\sigma_{zo}> \\
&\quad +\frac{\gamma_1\bar{\sigma}_z}{2}\left[\left(\frac{e^{\lambda_1 t}-1}{\lambda_1}+\frac{e^{\lambda_2 t}-1}{\lambda_2}\right)-\frac{A}{B}\left(\frac{e^{\lambda_2 t}-1}{\lambda_1}-\frac{e^{\lambda_2 t}-1}{\lambda_2}\right)\right] \\
<\sigma^+> &= \frac{i<\sigma_{zo}>\Omega}{2B}(e^{\lambda_1 t}-e^{\lambda_2 t})+\frac{i\Omega}{2B}\gamma\bar{\sigma}_z\left(\frac{e^{\lambda_1 t}-1}{\lambda_1}-\frac{e^{\lambda_2 t}-1}{\lambda_2}\right)
\end{aligned} \tag{7.4.39}$$

式中的常数项对应于相干散射，在计算非相干散射时可去掉. 将 (7.4.38) 式参数代入 (7.4.39) 式，进一步代入 (7.4.18) 式，便得 (7.4.36) 式中的被积函数 (见图 7.12), 图 7.12 中， MC=$\frac{<\sigma^+(t)\sigma(t)>}{<\sigma^+(\infty)\sigma(\infty)>}$, NC=$\frac{<\sigma^+(t)>}{<\sigma^+(\infty)>}$, IMC=$\frac{1}{t}\int_0^t$MC dt, INC=$\frac{1}{t}\int_0^t$NC dt. 图 7.13 给出了在 $\Omega/\kappa=1,3,5(\kappa=\kappa_1)$ 共振荧光谱随时间 κt 的发展过程. 当 κt 很大时，便趋于稳态的 Mollow 共振荧光谱.

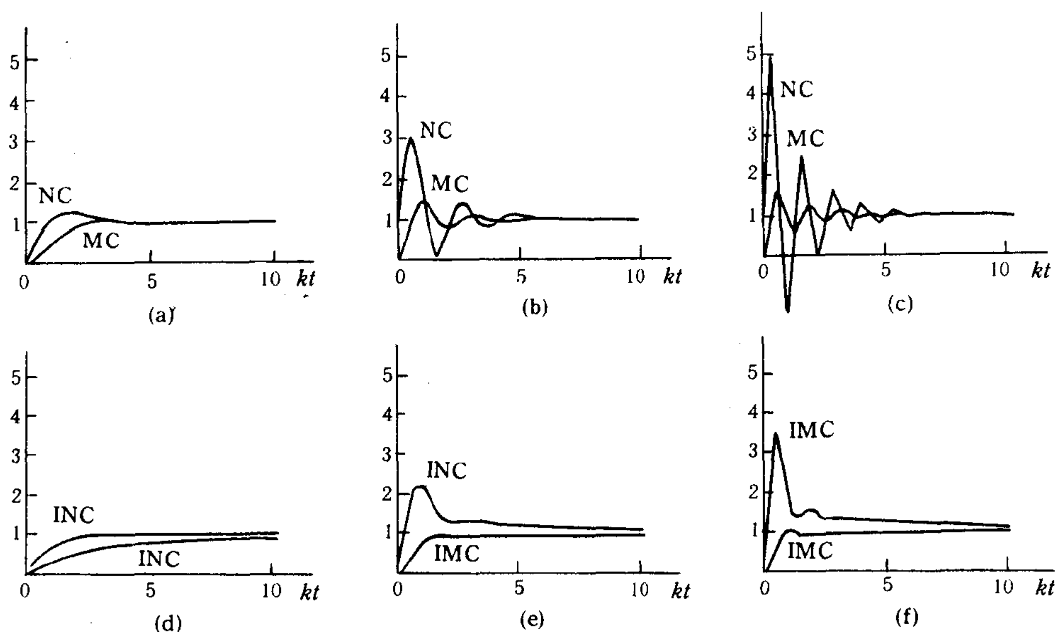


图 7.12　MC, NC 随 κt 而变化的曲线

(取自谭微思等 [33])

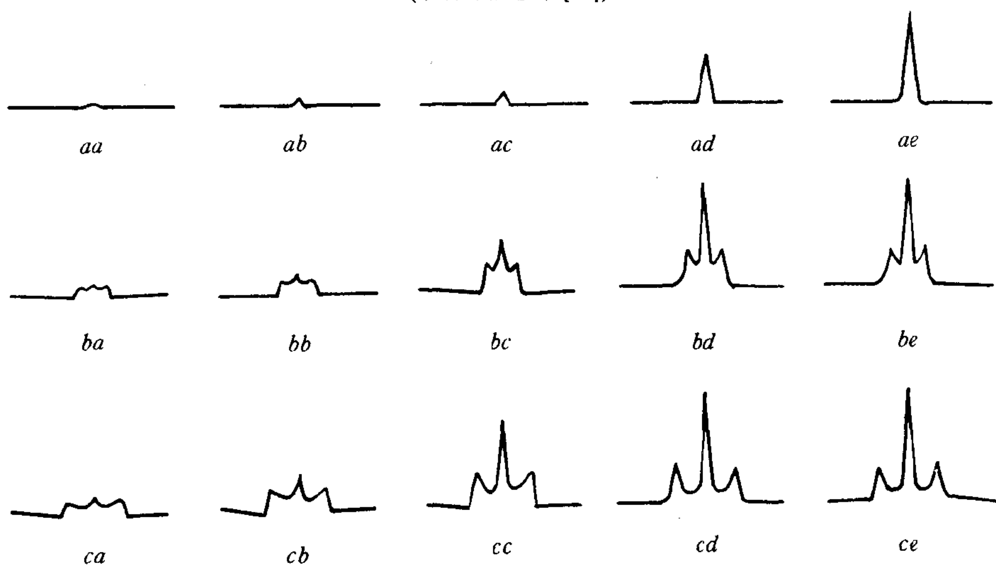


图 7.13　各种 Ω/κ 与 κt 情形的非相干散射谱

$aa \sim ae$: $\Omega/\kappa = 1$, $\kappa t = 0.1, 0.2, 0.5, 2, \infty$;

$ba \sim be$: $\Omega/\kappa = 3$, $\kappa t = 0.1, 0.2, 0.5, 2, \infty$;

$ca \sim ce$: $\Omega/\kappa = 5$, $\kappa t = 0.1, 0.2, 0.5, 2, \infty$

(取自文献 [33])

7.5　呈指数衰变驱动场作用下二能级原子系统的瞬态共振荧光光谱

在上节讨论瞬态共振荧光光谱中，驱动场是在 $t=0$ 时加上去的，为恒定的. Huang 等人 [36,37] 研究了矩形脉冲激光作用下二能级原子产生的共振荧光，且假定脉冲宽度 t_p 很大，因此与振幅为恒定的连续驱动场是相近的. 后来又有人从二能级原子 Schrödinger 方程出发 [38]，计算双曲线正割脉冲激光作用下的二能级原子共振荧光谱，但完全略去原

子在能级间的弛豫以及由此而引起的反转粒子衰变等. 另一方面从近年关于含原子腔的量子电动力学的研究表明 [39], 也需要知道在给定腔内初始光子数情况下，二能级原子共振荧光及腔内辐射场随时间的衰变行为.

7.5.1 驱动场可变情况下 Langevin 方程的形式解

在驱动场，亦即 Rabi 频率 Ω 随时间变化的情况下， Langevin 方程 (7.4.3) 的形式解可以这样求得. 先将方程写成矩阵形式

$$\frac{d\sigma}{dt} = -M\sigma + \gamma\bar{\sigma} + \Gamma \tag{7.5.1}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_z \\ \sigma^- \\ \sigma^+ \end{pmatrix}, \quad \gamma\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \gamma_1\bar{\sigma}_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_z \\ \Gamma^- \\ \Gamma^+ \end{pmatrix} \tag{7.5.2}$$

$$-M = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & -i\Omega/2 & i\Omega/2 \\ -i\Omega & -\gamma_2 & 0 \\ i\Omega & 0 & -\gamma_2 \end{pmatrix} \tag{7.5.3}$$

(7.5.1) 式的解可写为

$$\sigma = \sigma_s + L \tag{7.5.4}$$

$$\frac{d\sigma_s}{dt} = -M\sigma_s + \gamma\bar{\sigma} \tag{7.5.5}$$

$$\frac{dL}{dt} = -ML + \Gamma \tag{7.5.6}$$

(7.5.6),(7.5.7) 式的形式解为

$$\sigma_s(t+\tau) = U(t,\tau)\sigma_s(t) + V(t,\tau)\gamma\bar{\sigma} \tag{7.5.7}$$

$$L(t+\tau) = U(t,\tau)L(t) + \int_t^{t+\tau} U(t',\tau)\Gamma(t')dt' \tag{7.5.8}$$

$$U(t,\tau) = \exp\left(-\int_t^{t+\tau} Mdt'\right), \quad V = \int_t^{t+\tau} U(t',\tau)dt' \tag{7.5.9}$$

我们说这个解是形式解，因为很难按 (7.5.9) 式定义的 $U(t,\tau)$ 对其进行数值计算. 但这个解对导出算子的相关函数关系是很有用的. 这个关系可看成 (7.4.27),(7.4.28) 式的推广.

参照上节，用“r”表示行与列的转置矩阵，并定义扩散矩阵 $D(t,\tau)$ 为

$$D(t,\tau) = \langle L(t)L^r(t+\tau)\rangle \tag{7.5.10}$$

用 (7.5.8) 式的 $L(t+\tau)$ 的解代入上式，得

$$D(t,\tau) = \langle L(t)L^r(t)\rangle U^r(t,\tau) + \int_t^{t+\tau} \langle L(t)\Gamma^r(t')\rangle U^r(t',\tau)dt' \tag{7.5.11}$$

由于 $t \neq t'$, $\langle L(t)\Gamma^r(t')\rangle = 0$, 故上式可写为

$$D(t,\tau) = D(t,0)U^r(t,\tau) \tag{7.5.12}$$

$$\begin{aligned} <\sigma(t)\sigma^r(t)> &= <(\sigma_s(t)+L(t))(\sigma_s^r(t)+L^r(t))> \\ &= <\sigma_s(t)\sigma_s^r(t)> + D(t,0) \end{aligned} \tag{7.5.13}$$

$$\begin{aligned} <\sigma(t)\sigma^r(t+\tau)> &= <\sigma_s(t)\sigma_s^r(t+\tau)> + D(t,\tau) \\ &= <\sigma_s(t)\sigma_s^r(t)> U^r(t,\tau) + \sigma_s(t)\gamma\bar{\sigma}^r V^r(t,\tau) \\ &\quad + [<\sigma(t)\sigma^r(t)> - <\sigma_s(t)\sigma_s^r(t)>] U^r(t,\tau) \\ &= <\sigma(t)\sigma^r(t)> U^r(t,\tau) + \sigma_s(t)\gamma\bar{\sigma}^r V^r(t,\tau) \end{aligned} \tag{7.5.14}$$

由 (7.5.14) 式得知，原子的相关函数 $<\sigma(t)\sigma^r(t+\tau)>$ 的计算最终归结为 $<\sigma(t)\sigma^r(t)>$ 的计算，而 $<\sigma(t)\sigma^r(t)>$ 的计算又可表示为 (7.4.18). 这就是我们求得的相关函数 (7.5.14) 式的具体应用.

有了相关函数 $<\sigma(t)\sigma^r(t+\tau)>$ 后，就可以像上节 (7.4.31) 式那样计算谱密度矩阵

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{1}{\pi t}\mathrm{Re}\int_0^t e^{-s\tau}d\tau\int_0^{t-\tau} <\sigma(t')\sigma^r(t'+\tau)> dt'|_{s=i\omega} \\ &= \frac{1}{\pi t}\mathrm{Re}\left\{\int_0^t e^{-s\tau}d\tau\int_0^{t-\tau} <\sigma(t')\sigma^r(t')> U^r(t',\tau)dt'\right. \\ &\quad \left.+\int_0^t e^{-s\tau}d\tau\int_0^{t-\tau} <\sigma(t')\gamma\bar{\sigma}^r> V^r(t',\tau)dt'\right\}_{s=i\omega} \end{aligned} \tag{7.5.15}$$

当 t 很大时，上式中 $\int_0^{t-\tau}\simeq\int_0^t$，故有

$$\begin{aligned} G(\omega) &\simeq \frac{1}{\pi t}\mathrm{Re}\left\{\int_0^t <\sigma(t')\sigma^r(t')> dt'\int_0^t e^{-s\tau}U^r(t',\tau)d\tau\right. \\ &\quad \left.+\int_0^t <\sigma(t')\gamma\bar{\sigma}^r> dt'\int_0^t e^{-s\tau}V^r(t',\tau)d\tau\right\}_{s=i\omega} \end{aligned} \tag{7.5.16}$$

瞬态共振荧光谱所涉及的 $<\sigma^+(t')\sigma^-(t+\tau)>$ 即 (7.5.16) 式的 $G_{32}(\omega)$ 矩阵元.

7.5.2 驱动场呈指数衰变情形的瞬态共振荧光

(7.5.8), (7.5.9) 式给出了线性方程 (7.5.1) 的通解，但它应用起来很困难. 当驱动场呈指数衰变时，可以解经 Laplace 变换后的差分方程，使整个计算得以简化. 作为预备，先讨论一些数学问题.

(1) 一维问题. 在方程

$$\frac{d\sigma}{dt} = -Me^{-\eta t}\sigma \tag{7.5.17}$$

中，因子 $e^{-\eta t}$ 体现驱动场的衰变. 这个方程有两种解法，其一为直接积分，即

$$\sigma = e^{-\frac{M}{\eta}(1-e^{-\eta t})}\sigma_0 = \sum\frac{1}{n!}(\frac{-M}{\eta})^n(1-e^{-\eta t})^n\sigma_0 \tag{7.5.18}$$

另一种方法为对 (7.5.17) 式作 Laplace 变换，即

$$s\tilde{\sigma}(s)-\sigma_0 = -M\tilde{\sigma}(s+\eta),\quad \tilde{\sigma}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\sigma dt \tag{7.5.19}$$

$$\tilde{\sigma}(s) = \frac{\sigma_0}{s}-\frac{M}{s}\tilde{\sigma}(s+\eta) = \frac{\sigma_0}{s}+\frac{\sigma_0}{s}\frac{-M}{s+\eta}+\cdots+\frac{\sigma_0}{s}\frac{(-M)^n}{(s+\eta)\cdots(s+n\eta)}+\cdots \tag{7.5.20}$$

注意到

$$\frac{1}{s(s+\eta)\cdots(s+n\eta)}=\frac{1}{\eta^n}\sum\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}\frac{1}{s+k\eta} \tag{7.5.21}$$

于是有

$$\tilde{\sigma}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{-M}{\eta})^n\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{(s+k\eta)}\sigma_0 \tag{7.5.22}$$

对 (7.5.22) 式求反变换得

$$\sigma(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(\frac{-M}{\eta})^n(1-e^{-\eta t})^n\sigma_0 \tag{7.5.23}$$

(2) 三维运动. 将 (7.5.17) 式推广到三维，有

$$\sigma=\begin{pmatrix}\sigma_z\\ \sigma^-\\ \sigma^+\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}0 & -i/2 & i/2\\ -i & 0 & 0\\ i & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{7.5.24}$$

解的形式仍为 (7.5.23) 式. 式中 M 按 (7.5.24) 式定义，易证

$$M^2=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1/2 & 1/2\\ 0 & 1/2 & -1/2\end{pmatrix}=-E \tag{7.5.25}$$

$$M^4=E,\quad E^2=E,\quad EM=M \tag{7.5.26}$$

于是有

$$\sigma(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\Omega^2)^n}{(2n)!}\left(\frac{1-e^{-\eta t}}{\eta}\right)^{2n}E\sigma_0+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Omega^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{1-e^{-\eta t}}{\eta}\right)^{2n+1}M\sigma_0 \tag{7.5.27}$$

定义

$$C(\Omega,\eta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\Omega^2)^n}{(2n)!}\left(\frac{1-e^{-\eta t}}{\eta}\right)2n$$

$$S(\Omega,\eta,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Omega^{2n+1}}{(2n+1)!}\left(\frac{1-e^{-\eta t}}{\eta}\right)^{2n+1} \tag{7.5.28}$$

很明显，当 $\eta\to 0$ 时

$$C(\Omega,\eta,t)\to\cos\Omega t,\quad S(\Omega,\eta,t)\to\sin\Omega t \tag{7.5.29}$$

因此，(7.5.25) 式可简写为

$$\sigma(t)=(CE+SM)\sigma_0 \tag{7.5.30}$$

即

$$\begin{pmatrix}\sigma_z\\ \sigma^-\\ \sigma^+\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}\sigma_{z0}\\ 1/2(\sigma_0^- -\sigma_0^+)\\ -1/2(\sigma_0^- -\sigma_0^+)\end{pmatrix}+S\begin{pmatrix}-i/2(\sigma_0^- -\sigma_0^+)\\ -i\sigma_{z0}\\ i\sigma_{z0}\end{pmatrix} \tag{7.5.31}$$

注意到将 (7.5.30) 式推广到 $\sigma(t+\tau)$ 与 $\sigma(t)$ 的情形

$$\begin{aligned}&\sigma(t+\tau)=(CE+SM)\sigma(t)\\&C=C(\Omega e^{-\eta t},\eta,\tau),\quad S=S(\Omega e^{-\eta t},\eta,\tau)\end{aligned}\tag{7.5.32}$$

这时 C,S 一般为 t,τ 的函数，而不只是一个变量 τ 的函数.

7.5.3 含阻尼和稳态项的三维衰变运动

将三维衰变运动推广到含有阻尼和稳态项的情形：

$$\frac{d\sigma}{dt}=-\gamma(\sigma-\bar{\sigma})+\Omega Me^{-\eta t}\sigma\tag{7.5.33}$$

式中

$$\gamma=\begin{pmatrix}\gamma_1&0&0\\0&\gamma_2&0\\0&0&\gamma_2\end{pmatrix},\quad\bar{\sigma}=\begin{pmatrix}\bar{\sigma}_z\\0\\0\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}0&-i/2&i/2\\-i&0&0\\i&0&0\end{pmatrix}\tag{7.5.34}$$

对 (7.5.33) 作 Laplace 变换

$$(s+\gamma)\tilde{\sigma}(s)-\sigma_0=\frac{1}{s}\gamma\bar{\sigma}+\Omega M\tilde{\sigma}(s+\eta)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}(s)=&\left(\frac{1}{s+\gamma}+\frac{1}{s+\gamma}M\frac{\Omega}{s+\eta+\gamma}+\frac{1}{s+\gamma}M\frac{\Omega}{s+\eta+\gamma}M\frac{\Omega}{s+\eta+\gamma}M\frac{\Omega}{s+2\eta+\gamma}+\cdots\right)\\&\times(\sigma_0-\bar{\sigma})+\left(\frac{1}{s}+\frac{\Omega}{s+\gamma}M\frac{1}{s+\eta}+\frac{\Omega}{s+\gamma}M\frac{\Omega}{s+\eta+\gamma}M\frac{1}{s+2\eta}+\cdots\right)\bar{\sigma}_z\end{aligned}\tag{7.5.35}$$

若记

$$\begin{aligned}&D(s+\gamma)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+\gamma_1}&0&0\\0&\dfrac{1}{s+\gamma_2}&0\\0&0&\dfrac{1}{s+\gamma_2}\end{pmatrix}\\&\tilde{D}(s+\gamma)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+\gamma_2}&0&0\\0&\dfrac{1}{s+\gamma_1}&0\\0&0&\dfrac{1}{s+\gamma_1}\end{pmatrix}\end{aligned}\tag{7.5.36}$$

易证

$$D(s+\gamma)M=M\tilde{D}(s+\gamma),\qquad \tilde{\tilde{D}}(s+\gamma)=D(s+\gamma)\tag{7.5.37}$$

于是

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s+\gamma}M\frac{\Omega}{s+\eta+\gamma}\cdots M\frac{\Omega}{s+n\eta+\gamma}=D_0MD_1\cdots D_n(\Omega)^n\\&=\begin{cases}M^n\Omega^n\tilde{D}_0D_1\cdots D_n & (\text{n 为奇数})\\M^n\Omega^nD_0\tilde{D}_1\cdots D_n & (\text{n 为偶数})\end{cases}\end{aligned}\tag{7.5.38}$$

由 (7.5.35),(7.5.38) 式得

$$\tilde{\sigma}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega^{2n}M^{2n}D_0\tilde{D}_1D_2\cdots D_{2n}[(\sigma_0-\bar{\sigma})+D_{2n}^{-1}\frac{1}{s+2n\eta}\bar{\sigma}]$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\Omega^{2n+1}M^{2n+1}\tilde{D}_0D_1\tilde{D}_2\cdots D_{2n+1}\left[(\sigma_0-\bar{\sigma})+D_{2n+1}^{-1}\frac{1}{s+(2n+1)\eta}\bar{\sigma}\right] \quad (7.5.39)$$

由于

$$D_{2n}^{-1}=s+2n\eta+\gamma,\quad D_{2n+1}^{-1}=s+(2n+1)\eta+\gamma$$

(7.5.37) 式可化为

$$\tilde{\sigma}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\Omega^{2n}M^{2n}D_0\tilde{D}_1D_2\cdots D_{2n}(\sigma_0+\gamma\frac{1}{s+2n\eta}\bar{\sigma})$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\Omega^{2n+1}M^{2n+1}\tilde{D}_0D_1\tilde{D}_2\cdots D_{2n+1}\left[1+\gamma\frac{1}{s+(2n+1)\eta}\bar{\sigma}\right] \quad (7.5.40)$$

由 (7.5.25), (7.5.26) 式

$$M^{2n}=(-1)^nE,\qquad M^{2n+1}=(-1)^nM,\quad n\neq 0 \quad (7.5.41)$$

故 (7.5.40) 式可写为

$$\tilde{\sigma}(s)=(1-E)D_0\left(1+\gamma\frac{1}{s}\bar{\sigma}\right)+E(l_1\sigma_0+l_3\gamma\bar{\sigma})+\Omega M(l_2\sigma_0+l_4\gamma\bar{\sigma}) \quad (7.5.42)$$

$$l_1=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Omega^{2n}D_0\tilde{D}_1D_2\cdots D_{2n}$$
$$l_2=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Omega^{2n}\tilde{D}_0D_1\tilde{D}_2\cdots D_{2n+1}$$
$$l_3=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Omega^{2n}D_0\tilde{D}_1D_2\cdots D_{2n}\frac{1}{s+2n\eta}$$
$$l_4=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Omega^{2n}\tilde{D}_0D_1\tilde{D}_2\cdots D_{2n+1}\frac{1}{s+(2n+1)\eta} \quad (7.5.43)$$

$l_1\sim l_4$ 的计算参见文献 [35], 均为对角矩阵，且有

$$l_i=\begin{pmatrix} i_j & 0 & 0\\ 0 & \bar{i}_j & 0\\ 0 & 0 & \bar{i}_j\end{pmatrix},\quad j=1\sim 4 \quad (7.5.44)$$

将 i_j 中的参数 γ_1, γ_2 对换后便得 $\bar{i}_j$.

经过复杂的计算得 (7.5.42) 式的解为

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_z \\ \tilde{\sigma}^- \\ \tilde{\sigma}^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1\sigma_{z0} \\ \frac{1}{2}\bar{i}_1(\sigma_0^- - \sigma_0^+) \\ -\frac{1}{2}\bar{i}_1(\sigma_0^- - \sigma_0^+) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\frac{\Omega}{2}\bar{i}_2(\sigma_0^- - \sigma_0^+) \\ -i\Omega i_2\sigma_{z0} \\ i\Omega i_2\sigma_{z0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_3\gamma_1\bar{\sigma}_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -i\Omega i_4\bar{\sigma}_z \\ i\Omega i_4\bar{\sigma}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^- + \sigma_0^+}{s+\gamma_2} \\ \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^- + \sigma_0^+}{s+\gamma_2} \end{pmatrix} \tag{7.5.45}$$

设 i_j 的逆变换为 I_j, 则求 (7.5.45) 式的逆变换后得

$$\sigma^-(\tau) = \frac{1}{2}\bar{I}_1(\tau)(\sigma_0^- - \sigma_0^+) - iI_2(\tau)\Omega\sigma_{z0} + \frac{1}{2}e^{-\gamma_2\tau}(\sigma_0^- + \sigma_0^+) - iI_4(\tau)\Omega\gamma_1\bar{\sigma}_z$$

或

$$\begin{aligned} \sigma^-(t+\tau) = & \frac{1}{2}\bar{I}_1(\tau)(\sigma_0^-(t) - \sigma_0^+(t)) - iI_2(\tau)\Omega(t)\sigma_{z0}(t) \\ & + \frac{1}{2}e^{-\gamma_2\tau}(\sigma_0^-(t) + \sigma_0^+(t)) - iI_4(\tau)\Omega(t)\gamma_1\bar{\sigma}_z \qquad (7.5.46) \\ \Omega(t) = & \Omega e^{-\eta t} \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} &< \sigma^+(t)\sigma^-(t+\tau) >= \frac{1}{2}(\bar{I}_1(\tau) + e^{-\gamma_2\tau}) < \sigma^+(t)\sigma^-(t) > \\ &-iI_2(\tau)\Omega(t) < \sigma^+(t)\sigma_z(t) > -iI_4(\tau)\Omega(t)\gamma_1\bar{\sigma}_z < \sigma^+(t) > \end{aligned} \tag{7.5.47}$$

参照 (7.5.15), (7.5.16) 式，得出瞬态共振荧光光谱为

$$\begin{aligned} G_{32}(\omega) &= \frac{1}{\pi t}\mathrm{Re}\left\{\int_0^t e^{-st}d\tau \int_0^{t-\tau} < \sigma^+(t')\sigma^-(t'+\tau) > dt'\right\}_{s=i\omega} \\ &\simeq \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{t}\int_0^t < \sigma^+(t')\sigma^-(t') > dt' \int_0^t e^{-s\tau}(\frac{1}{2}(\bar{I}_1(\tau) + e^{-\gamma_2\tau}))d\tau\right. \\ &\quad -i\frac{1}{t}\int_0^t \Omega(t') < \sigma^+(t')\sigma_z(t') > dt' \int_0^t e^{-s\tau}I_2(\tau)d\tau \\ &\quad \left. -i\frac{1}{t}\int_0^t \Omega(t') < \sigma^+(t') > \gamma_1\bar{\sigma}_z dt' \int_0^t e^{-s\tau}I_4(\tau)d\tau\right\}_{s=i\omega} \end{aligned} \tag{7.5.48}$$

按 (7.4.18) 式，$< \sigma^+(t')\sigma^-(t') >$, $< \sigma^+(t')\sigma_z(t') >$, $< \sigma^+(t') >$ 等均可用 $\sigma_s(t')$ 来表示，而 $\sigma_s(t')$ 即 (7.5.45) 式的逆变换为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{zs}(t) \\ \sigma_s^-(t) \\ \sigma_s^+(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1\sigma_{z0} \\ \frac{1}{2}\bar{I}_1(\sigma_0^- - \sigma_0^+) \\ -\frac{1}{2}\bar{I}_1(\sigma_0^- - \sigma_0^+) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\frac{\Omega}{2}\bar{I}_2(\sigma_0^- - \sigma_0^+) \\ -i\Omega I_2\sigma_{z0} \\ i\Omega I_2\sigma_{z0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_3\gamma_1\bar{\sigma}_z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$+ \begin{pmatrix} 0 \\ -i\Omega I_4\gamma_1\bar{\sigma}_z \\ i\Omega I_4\gamma_1\bar{\sigma}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}e^{-\gamma_2 t}(\sigma_0 + \sigma_0^+) \\ \frac{1}{2}e^{-\gamma_2 t}(\sigma_0 + \sigma_0^+) \end{pmatrix} \tag{7.5.49}$$

$I_1 \sim I_4$ 的计算公式参见文献 [35].

7.5.4 计算结果与分析

图 7.14 为光抽运脉冲曲线. 假定脉冲上升很快, 以致前沿可略去; 当上升到峰值 Ω 后, 再按 $\Omega(t)=\Omega e^{-\eta t}$ 衰减. 参照 (7.5.48) 式, 定义如下规一化参量:

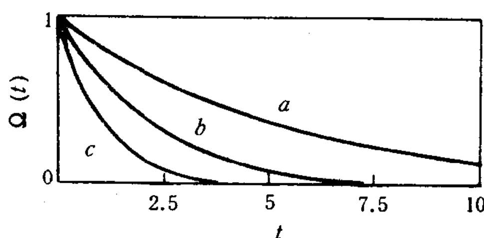


图 7.14 光抽运脉冲图. (a, b, c 分别对应于 $\eta=0.2, 0.5, 1$)
(取自 Tan Weisi 等 [35])

$$\mathrm{IMC}=\frac{1}{t}\int_0^t \frac{<\sigma^+(t')\sigma^-(t')>}{<\sigma^+(\infty)\sigma^-(\infty)>}dt'$$
$$\mathrm{INC}=\frac{1}{t}\int_0^t e^{-\eta t'}\frac{<\sigma^+(t')>}{<\sigma^+(\infty)>}dt' \tag{7.5.50}$$

$$<\sigma^+(\infty)\sigma^-(\infty)>=\frac{\Omega^2/2}{\gamma_1^2/2+\Omega^2},\quad <\sigma^+(\infty)>=\frac{-i\gamma_1\Omega/2}{\gamma_1^2/2+\Omega^2} \tag{7.5.51}$$

初值取为 $<\sigma_0^+>=<\sigma_0^->=0$, $<\sigma_{z0}=<\bar{\sigma}_z>=-1/2$, IMC, INC 随时间变化的曲线由图 7.15 给出.

图 7.16~7.18 分别给出 $\eta=0.2$, 0.5, 1 的瞬态共振荧光光谱. 每一图中又包含 $\Omega=1$, 3, 5 三种情形, t 的取值范围为 $0\sim 10$, 频率 ω 的取值范围为 $-7.85\sim 7.85$. 所有计算均取 $\gamma_1=1$, $\gamma_2=\gamma_1/2=1/2$.

从这组图容易看出如下的一些特点:

(1) 共振荧光存在的时间远大于光抽运衰减时间 $1/\eta$. 如图 7.18, $\eta=1.0$, $\Omega=1$, 3, 5 的各个荧光谱, 其峰值是随 t 的增大而指数衰减的, 但比图 7.14 中相应的 $e^{-\eta t}$ 曲线要慢得多. 对于图 7.16 、图 7.17, $\eta=0.2$, 0.5 的情形也是这样的. 由 (7.5.48) 式, 影响共振荧光光谱强度的因子 $\frac{1}{t}\int_0^t <\sigma^+(t')\sigma^-(t')>dt', \frac{1}{t}\int_0^t \Omega(t')<\sigma^+(t')>dt'$ 经规一化后便是 IMC, INC, 对于 $\eta=0$ 情形, IMC, INC 均随 t 的增大而趋近于稳态值 1, 但当 $\eta=0.2$, 0.5, 1 时, IMC, INC 均随时间 t 的增大而衰减, 其中 $\eta=1$, $\Omega=5$ 情形明显按指数下降, 但下降速度要比 $e^{-\eta t}$ 慢. 对同一 Ω, 不同 η 情形, 则 IMC, INC 的峰值随 η 增大而下降.

(2) 对于谱随时间变化的瞬态行为, 当 t 增大而又不是很大, η 较小的情形, 共振荧光光谱的三峰结构 ($\Omega=3$, 5) 基本上与 $\eta=0$ 的稳态情形相同, 如图 7.16 所示的 $\eta=0.2$ 情形; 但当 η 增到 0.5, 如图 7.17, 则边峰减弱; 进一步增至 $\eta=1$, 如图 7.18, 则边峰几乎消失, 谱变为单峰.

(3) 当 t 不是很大的瞬态行为, 一般而言, 对 $\Omega=1$ 情形, t 由小到大, 共振荧光谱保持单峰结构. 但当 $\Omega=3$, $\eta=0.2$,0.5 情形, 瞬态荧光谱中最先出现的是边峰, 到后来中峰才长出来. 当 $\Omega=5$, $\eta=0.2$, 0.5 情形, 中峰的出现还伴随着一些细的起伏, 这些细的起伏又随着 η 的变小而消失. 图 7.19 给出 $\Omega=5$, $\eta=0.1$, 0.05, 0 的瞬态共振荧光光谱以及荧光谱的消失过程, 最后过渡到光滑的三峰结构.

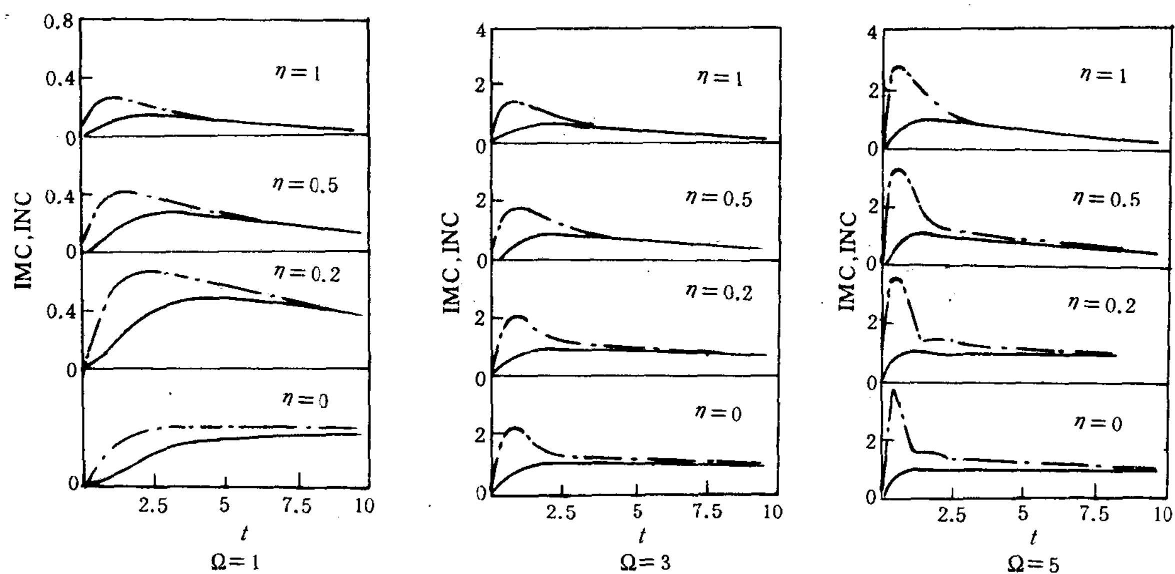


图 7.15 IMC, INC 随时间 t 变化的曲线 (实线为 IMC; 虚线为 INC)
(取自文献 [35])

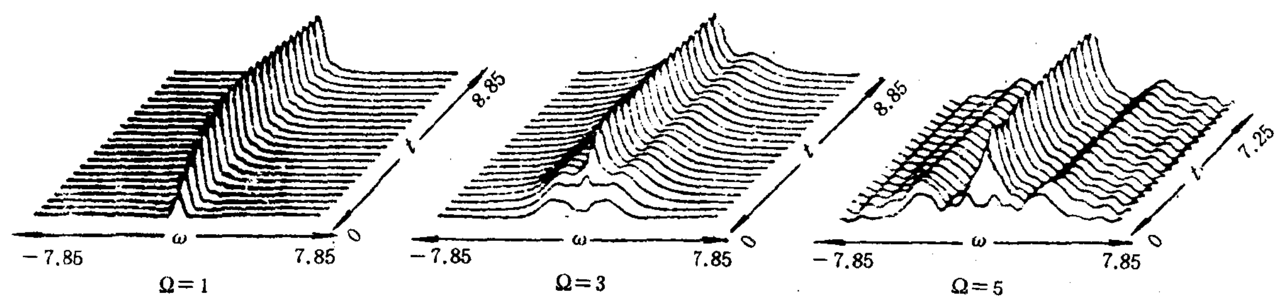


图 7.16 瞬态共振荧光光谱 ($\eta=0.2$) (取自文献 [35])

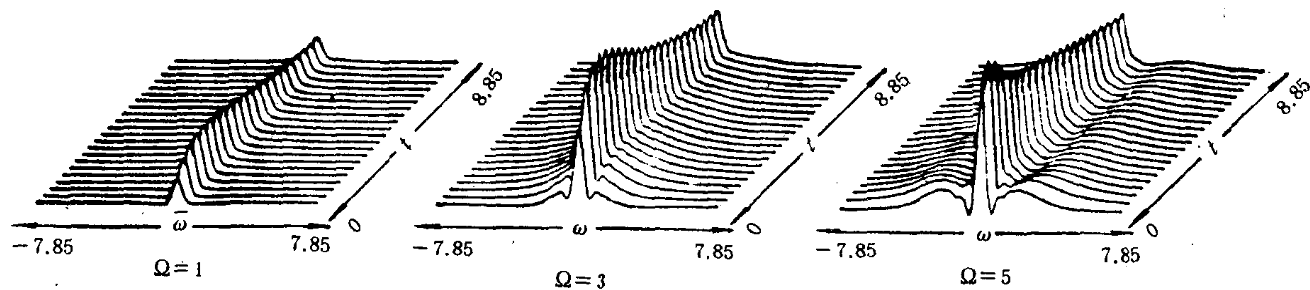


图 7.17 瞬态共振荧光光谱 ($\eta=0.5$) (取自文献 [35])

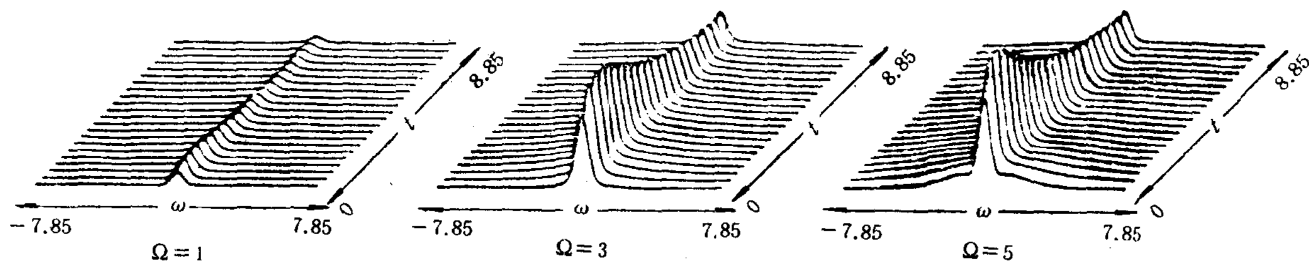


图 7.18 瞬态共振荧光光谱 ($\eta=1$) (取自文献 [35])

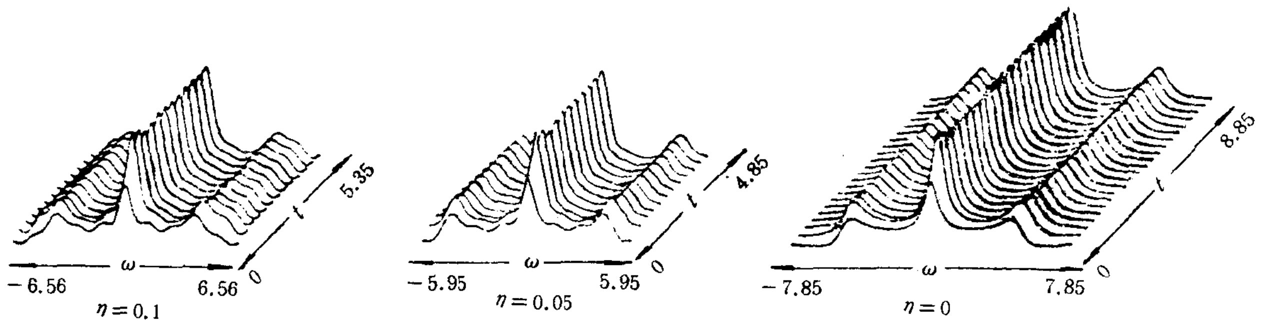


图 7.19 瞬态共振荧光光谱 ($\Omega = 5$) (取自文献 [35])

7.6 考虑到自作用后二能级原子的共振荧光谱 [41]

Mollow 理论模型，仅包括了加在原子的外场 (即驱动场) 与原子的相互作用，而忽略了自作用. 这节我们仍假定驱动场为经典的相干场，同时考虑原子辐射场的自作用，计算二能级原子的共振荧光. 计算结果表明，由于自相互作用的引进，中峰已表现出明显的 Rabi 分裂，这实质上就是文献 [39] 说的真空场的 Rabi 分裂.

7.6.1 考虑到自作用后二能级原子与辐射场系统的 Langevin 方程及其解 [41]

设二能级原子的跃迁频率为 ω_0, 单模场的模式频率为 ω_c, 则包括原子、辐射场及其相互作用在内的哈密顿量为

$$H_1 = \hbar\omega_0\sigma_z + \hbar\omega_c\left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right) + \hbar(gb^\dagger\sigma^- + g^*b\sigma^+) \tag{7.6.1}$$

又设驱动场为经典的，振幅为 b_l, b_l^*, 频率为 ω_l，则 Rabi 频率为 $\Omega^* = 2gb_l^* e^{i\omega_l t}, \Omega = 2g^* b_l e^{-i\omega_l t}$, 驱动场与原子的相互作用为

$$H_2 = \frac{\hbar}{2}(\Omega^*\sigma^- + \Omega\sigma^+) \tag{7.6.2}$$

根据 (7.6.1),(7.6.2) 式，即可求出原子及场算符的 Heisenberg 运动方程

$$\frac{dO}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_1 + H_2, O] \tag{7.6.3}$$

将 (7.6.1),(7.6.2) 式代入式 (7.6.3), 并应用原子算符 $\sigma_z, \sigma^\pm$ 间的对易关系 (7.4.16) 及场算符间的对易关系 $bb^\dagger - b^\dagger b = 1$, 可得

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma_z}{dt} &= -igb^\dagger\sigma^- + ig^*b\sigma^+ - \frac{i\Omega^*}{2}\sigma^- + \frac{i\Omega}{2}\sigma^+ \\
\frac{d\sigma^-}{dt} &= -i\omega_0\sigma^- - i2g^*\sigma_z b - i\Omega\sigma_z \\
\frac{d\sigma^+}{dt} &= i\omega_0\sigma^+ + i2gb^\dagger\sigma_z + i\Omega^*\sigma_z
\end{aligned} \tag{7.6.4}$$

$$\frac{db}{dt} = -i\omega_c b + ig\sigma^-$$
$$\frac{db^\dagger}{dt} = i\omega_c b^\dagger - ig^*\sigma^+ \tag{7.6.5}$$

注意到 (7.6.4),(7.6.5) 式是不计及原子在能级间的弛豫及辐射场的损耗得到的. 为计及弛豫与损耗，应加上无规力的作用，即

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = -\gamma_1(\sigma_z - \bar{\sigma}_z) - igb^\dagger\sigma^- + ig^*b\sigma^+ - \frac{i\Omega^*}{2}\sigma^- + \frac{i\Omega}{2}\sigma^+ + \Gamma_z$$
$$\frac{d\sigma^-}{dt} = -(\gamma_2 + i\omega_0)\sigma^- - i2g^*\sigma_z b - i\Omega\sigma_z + \Gamma^-$$
$$\frac{d\sigma^+}{dt} = -(\gamma_2 - i\omega_0)\sigma^+ + i2gb^\dagger\sigma_z + i\Omega^*\sigma_z + \Gamma^+ \tag{7.6.6}$$

$$\frac{db}{dt} = (-\chi - i\omega_c)b + ig\sigma^- + F^-$$
$$\frac{db^\dagger}{dt} = (-\chi + i\omega_c)b^\dagger - ig^*\sigma^+ + F^+ \tag{7.6.7}$$

使得对易关系在对无规力求统计平均的意义下得以满足. 注意到 Ω, Ω^* 中包含因子 $e^{-i\omega_l t}, e^{i\omega_l t}$, 故可将 (7.6.6) 和 (7.6.7) 式作旋波变换：

$$\Omega,\quad \Omega^* \to \Omega e^{-i\omega_l t},\quad \Omega^* e^{i\omega_l t}$$
$$b,\quad b^\dagger \to b e^{-i\omega_l t},\quad b^\dagger e^{i\omega_l t}$$
$$\sigma^-,\quad \sigma^+ \to \sigma^- e^{-i\omega_l t},\quad \sigma^+ e^{i\omega_l t} \tag{7.6.8}$$
$$\Gamma^\pm \to \Gamma^\pm e^{\pm i\omega_l t},\quad F^\pm \to F^\pm e^{\pm i\omega_l t}$$

于是有

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = -\gamma_1(\sigma_z - \bar{\sigma}_z) - igb^\dagger\sigma^- + ig^*b\sigma^+ - \frac{i\Omega^*}{2}\sigma^- + \frac{i\Omega}{2}\sigma^+ + \Gamma_z$$
$$\frac{d\sigma^-}{dt} = -(\gamma_2 + i\Delta\omega)\sigma^- - i2g^*\sigma_z b - i\Omega\sigma_z + \Gamma^- \tag{7.6.9}$$
$$\frac{d\sigma^+}{dt} = -(\gamma_2 - i\Delta\omega)\sigma^+ + i2g\sigma_z b^\dagger + i\Omega^*\sigma_z + \Gamma^+$$

$$\frac{db}{dt} = (-\chi - i\Delta\omega_c)b + ig\sigma^- + F$$
$$\frac{db^\dagger}{dt} = (-\chi + i\Delta\omega_c)b^\dagger - ig\sigma^+ + F \tag{7.6.10}$$
$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_l,\quad \Delta\omega_c = \omega_c - \omega_l$$

$\Delta\omega$, $\Delta\omega_c$ 分别为驱动场与原子跃迁频率的失谐及谐振腔频率的失谐.

引进无规力后对谱的计算，可参照上节的方法进行. 先将 (7.6.9), (7.6.10) 式中的无规力去掉，并求其解，各参量加下角标“s”标记，于是有

$$\frac{d\sigma_{zs}}{dt} = -\gamma_1(\sigma_{zs} - \bar{\sigma}_z) - igb_s^\dagger\sigma_s^- + ig^*b_s\sigma_s^+ - \frac{i\Omega^*}{2}\sigma_s^- + \frac{i\Omega}{2}\sigma_s^+$$
$$\frac{d\sigma_s^-}{dt} = -(\gamma_2 + i\Delta\omega)\sigma_s^- - i2g^*\sigma_{zs}b_s - i\Omega\sigma_{zs} \tag{7.6.11}$$

$$\frac{d\sigma_s^+}{dt} = -(\gamma_2 - i\Delta\omega)\sigma_s^+ + i2g\sigma_{zs}b_s^\dagger + i\Omega^*\sigma_{zs}$$

$$\begin{aligned}\frac{db_s}{dt} &= -(\chi + i\Delta\omega_c)b_s + ig\sigma_s^- \\ \frac{db_s^\dagger}{dt} &= -(\chi - i\Delta\omega_c)b_s^\dagger - ig^*\sigma_s^+\end{aligned} \tag{7.6.12}$$

现考虑共振激发与振荡情形 $\Delta\omega = \Delta\omega_c = 0$, 并定义

$$\begin{aligned} y_s^- = \sigma_{zs}b_s, \qquad y_s^+ = b_s^\dagger\sigma_{zs} \\ y_{zs} = b_s^\dagger\sigma_s^- - b_s\sigma_s^+ \end{aligned} \tag{7.6.13}$$

又设 $\Omega = \Omega^*, g = g^*$, 于是由 (7.6.11), (7.6.12) 式，得

$$\begin{aligned}\frac{dy_s^-}{dt} &= -\chi y_s^- - \frac{ig}{2}\sigma_s^- + b_s\frac{d\sigma_{zs}}{dt} \\ \frac{dy_s^+}{dt} &= -\chi y_s^+ + \frac{ig}{2}\sigma_s^+ + b_s^\dagger\frac{d\sigma_{zs}}{dt} \\ \frac{dy_{zs}}{dt} &= -\chi y_{zs} - ig + b_s^\dagger\frac{d\sigma_s^-}{dt} - b_s\frac{d\sigma_s^+}{dt}\end{aligned} \tag{7.6.14}$$

由 (7.6.11), (7.6.12), (7.6.14) 式，得

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{zs}}{dt} &= -\gamma_1(\sigma_{zs} - \bar{\sigma}_{zs}) - igy_{zs} - \frac{i\Omega}{2}(\sigma_s^- - \sigma_s^+) \\ \frac{d}{dt}(\sigma_s^- - \sigma_s^+) &= -\gamma_2(\sigma_s^- - \sigma_s^+) - i2g(y_s^- + y_s^+) - i2\Omega\sigma_{zs} \\ \frac{d}{dt}(y_s^- + y_s^+) &= -\chi(y_s^- + y_s^+) - \frac{ig}{2}(\sigma_s^- - \sigma_s^+) + (b_s + b_s^\dagger)\frac{d\sigma_{zs}}{dt}\end{aligned} \tag{7.6.15}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy_{zs}}{dt} &= -\chi y_{zs} - ig + b_s\frac{d\sigma_s^+}{dt} - b_s^+\frac{d\sigma_s^-}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\sigma_s^- + \sigma_s^+) &= -\gamma_2(\sigma_s^- + \sigma_s^+) - i2g(y_s^- - y_s^+) \\ \frac{d}{dt}(y_s^- - y_s^+) &= -\chi(y_s^- - y_s^+) - \frac{ig}{2}(\sigma_s^- + \sigma_s^+) + (b_s - b_s^\dagger)\frac{d\sigma_{zs}}{dt}\end{aligned} \tag{7.6.16}$$

设

$$\begin{aligned}\sigma_{zs} &= \sum_{n=0,1,\dots}\sigma_{zsn}e^{n\lambda t}, \qquad \sigma_s^\pm = \sum_{n=0,1,\dots}\sigma_{sn}^\pm e^{n\lambda t} \\ b_s &= \sum_{n=0,1,\dots}b_{sn}e^{n\lambda t}, \qquad b_s^\dagger = \sum_{n=0,1,\dots}b_{sn}^\dagger e^{n\lambda t}\end{aligned} \tag{7.6.17}$$

将 (7.6.17) 式代入 (7.6.15), (7.6.16) 式求等式两端正比于 $e^{\lambda t}$ 的项的解，因 $(b_s \pm b_s^\dagger)\frac{d\sigma_{zs}}{dt}$, $b_s\frac{d\sigma_s^+}{dt}$,$b_s^\dagger\frac{d\sigma_s^-}{dt}$ 中正比于 $e^{\lambda t}$ 的项为 $(b_{s0} \pm b_{s0}^\dagger)\frac{d\sigma_{zs}e^{\lambda t}}{dt}$,$\cdots$. 下面将看到当 Ω 很大时，$b_{s0}, b_{s0}^\dagger$ 会很小，以致 $(b_s \pm b_s^\dagger)\frac{d\sigma_{zs}}{dt}$, $b_s\frac{d\sigma_s^+}{dt}$, $b_s^\dagger\frac{d\sigma_s^-}{dt}$ 等可略去，于是有

$$\frac{d\sigma_{zs}}{dt} = -\gamma_1(\sigma_{zs} - \bar{\sigma}_{zs}) - igy_{zs} - \frac{i\Omega}{2}(\sigma_s^- - \sigma_s^+)$$

$$\frac{d}{dt}(\sigma_s^- - \sigma_s^+) = -\gamma_2(\sigma_s^- - \sigma_s^+) - i2g(y_s^- + y_s^+) - i2\Omega\sigma_{zs}$$

$$\frac{d}{dt}(y_s^- + y_s^+) = -\chi(y_s^- + y_s^+) - \frac{ig}{2}(\sigma_s^- - \sigma_s^+) \tag{7.6.18}$$

$$\frac{dy_{zs}}{dt} = -\chi y_{zs} - ig$$

$$\frac{d}{dt}(\sigma_s^- + \sigma_s^+) = -\gamma_2(\sigma_s^- + \sigma_s^+) - i2g(y_s^- - y_s^+)$$

$$\frac{d}{dt}(y_s^- - y_s^+) = -\chi(y_s^- - y_s^+) - \frac{ig}{2}(\sigma_s^- + \sigma_s^+) \tag{7.6.19}$$

(7.6.18), (7.6.19) 式的特征方程分别为

$$(\lambda+\chi)[(\lambda+\gamma_1)(\lambda+\gamma_2)(\lambda+\chi) + g^2(\lambda+\gamma_1) + \Omega^2(\lambda+\chi)] = 0 \tag{7.6.20}$$

$$(\lambda+\gamma_2)(\lambda+\chi) + g^2 = 0 \tag{7.6.21}$$

对于无腔的情形，相当于腔的损耗 $\chi \to \infty$，便过渡到 Mollow 共振荧光理论. (7.6.20), (7.6.21) 式分别给出边峰与中峰的特征根，包括峰值与宽度

$$\lambda + \gamma_2 = 0, \qquad \lambda_0 = -\gamma_2 \tag{7.6.22}$$

$$(\lambda+\gamma_1)(\lambda+\gamma_2) + \Omega^2 = 0$$

$$\lambda_1,\ \lambda_2 = -\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} \pm i\sqrt{\Omega^2 - (\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2})^2} \tag{7.6.23}$$

如果有腔，则腔的损耗 χ 为有限. 中峰的根 (分别用 λ_4, λ_5 标记) 不再由 (7.6.22) 给出，而是由 (7.6.21) 式给出为

$$\lambda_4,\ \lambda_5 = -\frac{\gamma_2+\chi}{2} \pm i\sqrt{g^2 - (\frac{\gamma_2-\chi}{2})^2} \tag{7.6.24}$$

比较 (7.6.24) 与 (7.6.23) 式可见，自作用耦合系数 g 起着驱动场 Rabi 频率 Ω 的作用，即真空场的 Rabi 分裂 [36]. 与此同时，边峰的根也不是 (7.6.23) 所给出的，而是由方程 (7.6.20) 式解出

$$(\lambda+\gamma_1)(\lambda+\gamma_2)(\lambda+\chi) + g^2(\lambda+\gamma_1) + \Omega^2(\lambda+\chi) = 0$$

$$\lambda + \chi = 0 \tag{7.6.25}$$

(7.6.25) 第一式给出一个中峰 (实根), 两个边峰 (共轭复根), 分别用 $\lambda_{1,2,3}$ 标记. (7.6.25) 第二式给出一个中峰的根 $\lambda = -\chi$.

在方程 (7.6.18) 中，由第四式可直接解得

$$y_{zs} = -\frac{ig}{\chi} + (y_{z0} + \frac{ig}{\chi})e^{-\chi t} \tag{7.6.26}$$

从方程 (7.6.12) 式易于看出，当初值 $(\frac{db_s}{dt})_0 = (\frac{db_s^\dagger}{dt})_0 = 0$, 对于共振情形有

$$b_0 = \frac{ig}{\chi}\sigma_0^-, \qquad b_0^\dagger = -\frac{ig}{\chi}\sigma_0^+ \tag{7.6.27}$$

于是

$$y_{z0} = (b^\dagger\sigma - b\sigma^+)_0 = \frac{ig}{\chi}(\sigma^+\sigma^- + \sigma^-\sigma^+) = -\frac{ig}{\chi} \tag{7.6.28}$$

由 (7.6.26) 式得 $y_{zs} = -\dfrac{ig}{\chi}$, 代入 (7.6.15) 第一式，得

$$\frac{d\sigma_{zs}}{dt} = -\gamma_1(\sigma_{zs} - \bar{\sigma}_z) - \frac{i\Omega}{2}(\sigma_s^- - \sigma_s^+) - \frac{g^2}{\chi}$$

在上式中，将 g^2/χ 并到 $\gamma\bar{\sigma}_z$ 中，即令 $\gamma_1\bar{\sigma}_z - \dfrac{g^2}{\chi} \to \gamma_1\bar{\sigma}_z$. 并考虑到当驱动场 $\Omega \to 0, t \to \infty$ 时，粒子处于基态， $\sigma_{zs} \to \bar{\sigma}_z = -\dfrac{1}{2}$, 则方程 (7.6.18) 为

$$\frac{d\sigma_{zs}}{dt} = -\gamma_1(\sigma_{zs} - \bar{\sigma}_{zs}) - \frac{i\Omega}{2}(\sigma_s^- - \sigma_s^+)$$

$$\frac{d}{dt}(\sigma_s^- - \sigma_s^+) = -\gamma_2(\sigma_s^- - \sigma_s^+) - i2g(y_s^- + y_s^+) - i2\Omega\sigma_{zs} \tag{7.6.29}$$

$$\frac{d}{dt}(y_s^- + y_s^+) = -\chi(y_s^- + y_s^+) - \frac{ig}{2}(\sigma_s^- - \sigma_s^+)$$

解 (7.6.19), (7.6.29) 这两组方程，将 σ_{zs}, $\sigma_s^- - \sigma_s^+$, $y_s^- + y_s^+$, $\sigma_s^- + \sigma_s^+$ 的解表示成如下的展开式：

$$\begin{aligned}
\sigma_{zs} &= q_1 + \sum_{j=1}^{3}\alpha_{1j}e^{\lambda_j t}\\
\sigma_s^- - \sigma_s^+ &= q_2 + \sum_{j=1}^{3}a_j\alpha_{1j}e^{\lambda_j t}\\
y_s^- + y_s^+ &= q_3 + \sum_{j=1}^{3}b_j\alpha_{1j}e^{\lambda_j t}\\
y_s^- - y_s^+ &= \sum_{j=4}^{5}\alpha_{2j}e^{\lambda_j t}\\
\sigma_s^- + \sigma_s^+ &= \sum_{j=4}^{5}c_j\alpha_{2j}e^{\lambda_j t}
\end{aligned} \tag{7.6.30}$$

式中

$$\begin{aligned}
q_1 &= \frac{\gamma_1\bar{\sigma}_z}{\gamma_1 + \frac{\Omega^2}{\gamma_2 + g^2/\chi}}, \quad q_2 = \frac{-i2\Omega\gamma_1\bar{\sigma}_z}{\gamma_1(\gamma_2 + g^2/\chi) + \Omega^2}\\
q_3 &= \frac{-\frac{g\Omega}{\chi}\gamma_1\bar{\sigma}_z}{\gamma_1(\gamma_2 + g^2/\chi) + \Omega^2}, \quad a_j = \frac{-i2\Omega}{\lambda_j + \gamma_2 + g^2/(\lambda_j + \chi)}\\
b_j &= \frac{-ig/2}{\lambda_j + \chi}\frac{-i2\Omega}{\lambda_j + \gamma_2 + g^2/(\lambda_j + \chi)}, \quad c_j = \frac{-i2g}{\lambda_j + \gamma_2}
\end{aligned} \tag{7.6.31}$$

当 Ω 很大时， q_2 将很小，故初值 $\sigma_{s0}^- = q_2/2$, $\sigma_{s0}^+ = -q_2/2$ 也很小. 由 (7.6.27) 式，$b_{s0}, b_{s0}^\dagger$ 也很小. 将 α_{1j}, α_{2j} 分别表示为

$$\alpha_{1j} = A_j\sigma_{z0} + B_j(\sigma_0^- - \sigma_0^+) + C_j(y_0^- + y_0^+) + D_j$$

$$\alpha_{2j} = E_j(\sigma_0^- + \sigma_0^+) + F_j(y_0^- - y_0^+)$$

代入 (7.6.30), (7.6.31) 式，比较系数即可定出 $A_j, B_j, C_j, D_j, E_j, F_j$, 于是得到解

$$\sigma_{zs}(t) = q_1 + \sum_{j=1}^{3} \alpha_{1j} e^{\lambda_j t}$$

$$\sigma_s^-(t) = \frac{1}{2}[q_2 + \sum_{j=1}^{3} a_j \alpha_{1j} e^{\lambda_j t} + \sum_{j=4}^{5} c_j \alpha_{2j} e^{\lambda_j t}] \tag{7.6.32}$$

$$\sigma_s^+(t) = -\frac{1}{2}[q_2 + \sum_{j=1}^{3} a_j \alpha_{1j} e^{\lambda_j t} - \sum_{j=4}^{5} c_j \alpha_{2j} e^{\lambda_j t}]$$

经整理，令

$$P(t) = \sum_{j=1}^{3} a_j A_j e^{\lambda_j t}, \qquad W(t) = \sum_{j=1}^{3} a_j D_j e^{\lambda_j t}$$

$$U(t) = \sum_{j=1}^{3} a_j B_j e^{\lambda_j t}, \qquad U_1(t) = \sum_{j=4}^{5} c_j E_j e^{\lambda_j t}$$

$$V(t) = \sum_{j=1}^{3} a_j C_j e^{\lambda_j t}, \qquad V_1(t) = \sum_{j=4}^{5} c_j F_j e^{\lambda_j t}$$

(7.6.32) 式可写为

$$\sigma_{zs}(t) = q_1 + P(t)\sigma_{z0} + U(t)(\sigma_0^- - \sigma_0^+) + V(t)(y_0^- + y_0^+) + W(t)$$

$$\begin{aligned}\sigma_s^-(t) = & \frac{1}{2}[q_2 + P(t)\sigma_{z0} + (U(t) + U_1(t))\sigma_0^- - (U(t) - U_1(t))\sigma_0^+ \\ & +(V(t) + V_1(t))y_0^- + (V(t) - V_1(t))y_0^+ + W(t)]\end{aligned} \tag{7.6.33}$$

$$\begin{aligned}\sigma_s^+(t) = & -\frac{1}{2}[q_2 + P(t)\sigma_{z0} + (U(t) - U_1(t))\sigma_0^- - (U(t) + U_1(t))\sigma_0^+ \\ & +(V(t) - V_1(t))y_0^- + (V(t) + V_1(t))y_0^+ + W(t)]\end{aligned}$$

7.6.2 二能级原子系统的共振荧光谱

在解 (7.6.33) 式的基础上，可写出量子回归关系

$$\begin{aligned}< \sigma^+(t)\sigma^-(t+\tau) >= & \tfrac{1}{2}[(q_2 < \sigma^+(t) > + P(\tau) < \sigma^+(t)\sigma_z(t) > + W(\tau) < \sigma^+(t) > \\ & +(U(\tau) + U_1(\tau)) < \sigma^+(t)\sigma^-(t) > -(U(\tau) - U_1(\tau)) < \sigma^+(t)\sigma^+(t) > \\ & +(V(\tau) - V_1(\tau)) < \sigma^+(t)y^-(t) > +(V(\tau) + V_1(\tau)) < \sigma^+(t)y^+(t) >]\end{aligned} \tag{7.6.34}$$

式中，$< \sigma^+(t) >$ 等等为对无规力求平均，应用对易关系及 $< \sigma > = < \sigma_s + L > = < \sigma_s >$，$\sigma_s$ 可用 $t \to \infty$ 时的稳态值 q 等来表示，即

$$< \sigma^+ > = < \sigma_s^+ > = -\frac{q_2}{2}, \qquad < \sigma^+ \sigma_z > = -\frac{< \sigma_s^+ >}{2} = \frac{q_2}{4}$$

$$< \sigma^+\sigma^- > = < \frac{1}{2} + \sigma_{zs} > = \frac{1}{2} + q_1, \qquad < \sigma^+\sigma^+ > = 0 \tag{7.6.35}$$

$$< \sigma^+ y^- > = < \sigma^+ \sigma_z \frac{ig\sigma^-}{\lambda + \chi} > = -\frac{ig/2}{\lambda + \chi} < \sigma^+\sigma^- > = -\frac{ig/2}{\lambda + \chi}(\frac{1}{2} + q_1)$$

$$< \sigma^+ y^+ > = < \sigma^+ \frac{-ig\sigma^+}{\lambda + \chi} \sigma_z > = 0$$

代入 (7.6.34) 式得

$$
\begin{aligned}
<\sigma^+(t)\sigma^-(t+\tau)>=&\frac{1}{2}\Big[-\frac{q_2}{2}(q_2+W(\tau))+\frac{q_2}{4}P(\tau)\\
&+\left(\frac{1}{2}+q_1\right)(U(\tau)+U_1(\tau))+\frac{-ig/2}{\lambda+\chi}\left(\frac{1}{2}+q_1\right)(V(\tau)-V_1(\tau))\Big]
\end{aligned}
\tag{7.6.36}
$$

由此可得共振荧光谱的非相干散射部分为

$$
\begin{aligned}
G(\omega) &= \frac{1}{\pi t}\mathrm{Re}\int_0^t e^{-s\tau}d\tau\int_0^{t-\tau}<\sigma^+(t')\sigma^-(t'+\tau)>dt'\\
&= \frac{1}{\pi}\mathrm{Re}\Big[\frac{q_2}{8}\tilde{P}(s)-\frac{q_2}{4}\tilde{W}(s)+\left(\frac{1}{2}+q_1\right)(\tilde{U}(s)+\tilde{U}_1(s))\\
&\quad+\frac{-ig/2}{\lambda+\chi}\left(\frac{1}{2}+q_1\right)(\tilde{V}(s)-\tilde{V}_1(s))\Big]_{s=i\omega}
\end{aligned}
\tag{7.6.37}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}(s)&=\sum_{j=1}^{3}\frac{a_jA_j}{s-\lambda_j}, & \tilde{W}(s)&=\sum_{j=1}^{3}\frac{a_jD_j}{s-\lambda_j}\\
\tilde{U}(s)&=\sum_{j=1}^{3}\frac{a_jB_j}{s-\lambda_j}, & \tilde{U}_1(s)&=\sum_{j=4}^{5}\frac{c_jE_j}{s-\lambda_j}\\
\tilde{V}(s)&=\sum_{j=1}^{3}\frac{a_jC_j}{s-\lambda_j}, & \tilde{V}_1(s)&=\sum_{j=4}^{5}\frac{c_jF_j}{s-\lambda_j}
\end{aligned}
\tag{7.6.38}
$$

7.6.3 计算结果与讨论

图 7.20~7.22 分别给出 $\chi=0.01, 0.1, 1$ 时的二能级原子的共振荧光谱曲线. 关于当腔的损耗 χ 继续增大，荧光向 Mollow 的三峰谱过渡趋势 (见图 7.23).

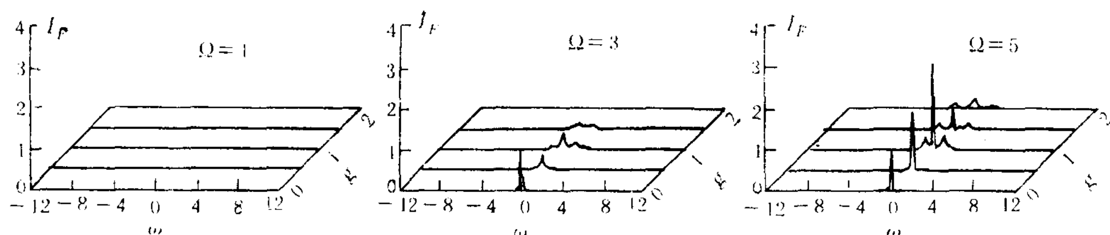


图 7.20 二能级原子的共振荧光谱 (χ=0.01)
(取自刘仁红、谭维翰 [41])

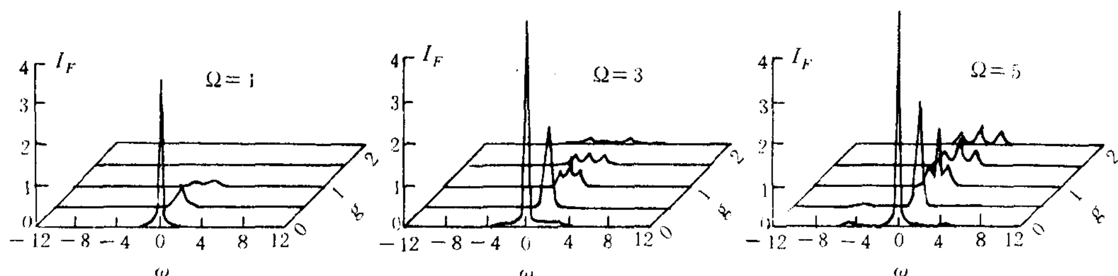


图 7.21 二能级原子的共振荧光谱 ($\chi = 0.1$)
(取自文献 [41])

对于图 7.20 所示的 $\chi = 0.01$ 情形，当 $g = 0.01$ 时，有很尖锐的中峰，其宽度远小于自然线宽 γ_2; 所有边峰，包括中峰的 Rabi 分裂均被抑制，当 g 增至 $1 \sim 2$, $\Omega = 1$, 谱很弱，而当 $\Omega = 3, 5$, 除了中峰外，还能看到中峰的 Rabi 分裂，以及由驱动场作用产生的弱的边峰；对于 $g = 2, \Omega = 3$ 情形，仅能看到中峰的 Rabi 分裂，这里很强的中峰乃是原

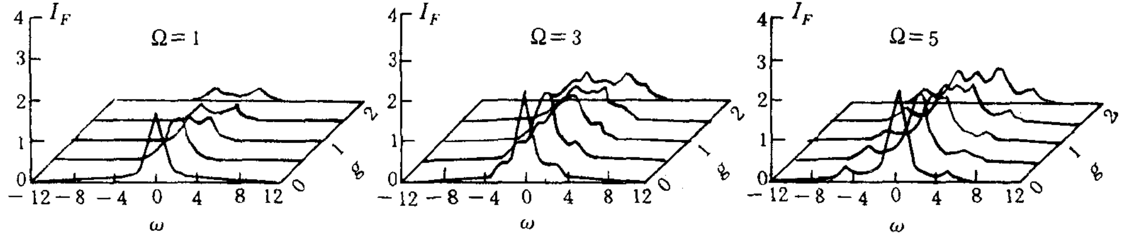


图 7.22　二能级原子的共振荧光谱 ($\chi = 1$)
(取自文献 [41])

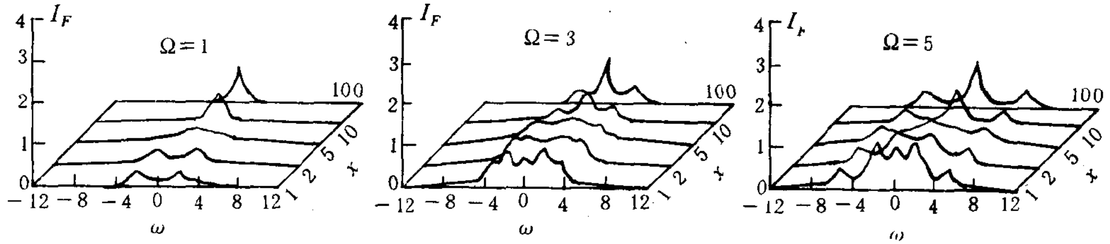


图 7.23　二能级原子的共振荧光谱 ($g = 2$)
(取自文献 [41])

来的边峰与原子的辐射场相互作用产生的，而原来的中峰 Rabi 分裂为双峰了. 对于图 7.21 和图 7.22, χ 增大，腔由良腔变为劣腔，此时 Rabi 分裂占有较突出的位置，中峰被压抑，增宽且磨平. 图 7.23 中， $g = 2$, 随 χ 增加，谱明显逐渐过渡到 Mollow 结果 — 三峰谱结构.

7.7　原子在压缩态光场中的共振荧光 [42,43]

7.7.1　原子在压缩态光场中的密度矩阵方程

求原子的密度矩阵方程与求激光场的密度矩阵方程 (5.3.25) 式相似. 设原子与热浴相互作用的哈密顿量 [44]

$$H_I = -i\hbar[\sigma^+ \sum g_k b_k - \sigma^- \sum g_k^* b_k^\dagger] \tag{7.7.1}$$

在相互作用绘景中，包括原子与热浴在内的密度矩阵 W 满足如下的运动方程：

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \frac{-i}{\hbar}[H_I, W] = \left(\frac{-i}{\hbar}\right)^2 [H_I, \int_0^t [H_I, W]d\tau] \\ &= \frac{-1}{\hbar^2}\int_0^t [H_I(t)H_I(\tau)W(\tau) - H_I(t)W(\tau)H_I(\tau) \\ &\quad -H_I(\tau)W(\tau)H_I(t) + W(\tau)H_I(\tau)H_I(t)]d\tau\end{aligned} \tag{7.7.2}$$

设 $W=\rho\rho_B,\rho,\rho_B$ 分别为原子与热浴的密度矩阵. 将 (7.7.1) 式代入 (7.7.2) 式，并对 B 求迹，注意到 $\mathrm{Tr}_B(\rho_B)=1$, 而且 $b_k,b_k^\dagger$ 为平稳随机过程，则有

$$\mathrm{Tr}_B(b_k^\dagger(t)b_{k'}(\tau)\rho_B(\tau))=<b_k^\dagger(t)b_{k'}(t)>\delta(t-\tau) \tag{7.7.3}$$

又令

$$\begin{aligned}
\kappa\frac{N}{2}&=\sum_{k,k'}g_kg_{k'}^*\int \mathrm{tr}_B(b_k^\dagger(t)b_{k'}(\tau)\rho_B(\tau))d\tau\\
&=\sum_{k,k'}g_k^*g_{k'}<b_k^\dagger(t)b_{k'}(t)>\\
\kappa\frac{N+1}{2}&=\sum_{k,k'}g_kg_{k'}^*<b_k(t)b_k^\dagger(t)>\\
\kappa\frac{M}{2}&=\sum_{k,k'}g_kg_{k'}\int \mathrm{tr}_B(b_k(t)b_{k'}(\tau)\rho_B(\tau))d\tau\\
&=\sum_{k,k'}g_kg_{k'}<b_k^\dagger(t)b_{k'}^\dagger(t)>\\
\kappa\frac{M^*}{2}&=\sum_{k,k'}g_k^*g_{k'}^*<b_k^+(t)b_{k'}^+(t)>
\end{aligned} \tag{7.7.4}$$

则 (7.7.2) 式化为

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt}=&\kappa\frac{N+1}{2}(2\sigma^-\rho\sigma^+-\sigma^+\sigma^-\rho-\rho\sigma^+\sigma^-)\\
&+\kappa\frac{N}{2}(2\sigma^+\rho\sigma^--\sigma^-\sigma^+\rho-\rho\sigma^-\sigma^+)\\
&-\kappa\frac{M}{2}(2\sigma^+\rho\sigma^+-\sigma^+\sigma^+\rho-\rho\sigma^+\sigma^+)\\
&-\kappa\frac{M^*}{2}(2\sigma^-\rho\sigma^--\sigma^-\sigma^-\rho-\rho\sigma^-\sigma^-)
\end{aligned} \tag{7.7.5}$$

现将 (7.7.5) 式应用于计算真空态 $\rho_B=|0><0|$ 及压缩真空态 $\rho_{BS}=|0>_s\ {}_s<0|$ 的 N 与 M.

(1) 真空态. 由于

$$\begin{aligned}
&<b^\dagger(t)b(t)>=<0|b^\dagger b|0>=0, &&N=0\\
&<b^\dagger(t)b^\dagger(t)>=<0|b^\dagger b^\dagger|0>=0, &&M^*=0
\end{aligned} \tag{7.7.6}$$

代入 (7.7.5) 式，得

$$\frac{d\rho}{dt}=\kappa\sigma^-\rho\sigma^+-\frac{\kappa}{2}\sigma^+\sigma^-\rho-\frac{\kappa}{2}\rho\sigma^+\sigma^- \tag{7.7}$$

(2) 压缩真空态 ($|0>_s=S|0>,S$ 为压缩态算子).

$$\begin{aligned}
<b^\dagger(t)b(t)>&=<0|S^\dagger b^\dagger SS^\dagger bS|0>=<0|(\mu b^\dagger+\nu b)(\mu b+\nu b^\dagger)|0>=\nu^2=N\\
<b(t)b^\dagger(t)>&=<0|(\mu b+\nu b^\dagger)(\mu b^\dagger+\nu^* b)|0>=\mu^2=1+\nu^2\\
<b(t)b(t)>&=<0|(\mu b+\nu b^\dagger)(\mu b+\nu b^\dagger)|0>=\mu\nu=M\\
<b(t)^\dagger b^\dagger(t)>&=<0|(\mu b^\dagger+\nu^* b)(\mu b^\dagger+\nu^* b)|0>=\mu\nu^*=M^*
\end{aligned} \tag{7.7.8}$$

式中， μ,ν 为压缩态参量， $\mu^2-\nu^2=1$.

(3) 有趋动场情形[45]. 有驱动场作用下的相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_I &= -\hbar\sigma^+\left[\frac{\mu\varepsilon(t)}{\hbar}+i\sum g_k b_k\right]+c.c. \\ &= -\hbar\sigma^+\left[\frac{\Omega(t)}{2}+i\sum g_k b_k\right]+c.c. \end{aligned} \tag{7.7.9}$$

这样，在密度矩阵运动方程 (7.7.5) 中就要加上驱动场带来的影响 $(\frac{d\rho}{dt}dt)_c$:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_c = i\left[\left\{\frac{\Omega}{2}\sigma^+ + \frac{\Omega^*}{2}\sigma^-\right\},\rho\right] \tag{7.7.10}$$

将 (7.7.5) 式的 $\frac{d\rho}{dt}$ 用 $[\frac{d\rho}{dt}]$ 标志，则总的 $\frac{d\rho}{dt}$ 应是

$$\frac{d\rho}{dt} = \left[\frac{d\rho}{dt}\right] + \left(\frac{d\rho}{dt}\right)_c \tag{7.7.11}$$

参照 (7.7.5), (7.7.10) 和 (7.7.11) 式，并令

$$\rho = <\sigma_z>\sigma_z + <\sigma^->\sigma^- + <\sigma^+>\sigma^+ \tag{7.7.12}$$

便得在压缩态光场作用下的 Bloch 方程[42]

$$\begin{aligned} \frac{d<\sigma_z>}{dt} &= -\gamma_1(<\sigma_z>-\bar{\sigma}_z) - \frac{i\Omega}{2}<\sigma^-> + \frac{i\Omega}{2}<\sigma^+> \\ \frac{d<\sigma^->}{dt} &= -z<\sigma^-> - \gamma_2<\sigma^+> - i\Omega<\sigma_z> \\ \frac{d<\sigma^+>}{dt} &= -z<\sigma^+> - \gamma_2^*<\sigma^-> + i\Omega<\sigma_z> \end{aligned} \tag{7.7.13}$$

或简写为

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_z}{dt} &= -\gamma_1(\sigma_z-\bar{\sigma}_z) - \frac{i\Omega}{2}\sigma^- + \frac{i\Omega}{2}\sigma^+ \\ \frac{d\sigma^-}{dt} &= -z\sigma^- - \gamma_2\sigma^+ - i\Omega\sigma_z \\ \frac{d\sigma^+}{dt} &= -z^*\sigma^+ - \gamma_2^*\sigma^- + i\Omega\sigma_z \end{aligned} \tag{7.7.14}$$

式中

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \kappa(\mu^2+\nu^2), \qquad \gamma_2 = \kappa\mu\nu \\ z = \frac{\gamma_1}{2} + i(\omega_0-\omega) \end{aligned} \tag{7.7.15}$$

由 Bloch 方程 (7.7.14) 可以看到，压缩真空态与原子相互作用导致了原子电偶极算符 σ^+ 与 σ^- 间耦合，耦合系数为 γ_2. 当 $\gamma_2=0$ 时，结果回到相干态驱动场.

7.7.2 原子在压缩态光场中的共振荧光谱

在 Bloch 方程 (7.7.14) 的基础上，可计算出原子在压缩态光场中的共振荧光谱，结果如图 7.24 所示. 图中 $\Delta\phi$ 为 γ_2 的幅角 $\gamma_2=|\gamma_2|e^{-i\Delta\phi}$, r 为压缩参量，$\mu=\cosh r$, $|\nu|=\sinh r$. 图 7.24(a)~(d) 均为共振情形， $\Delta\omega_a=\omega_0-\omega=0$. 图 7.24(a) 为 $\Delta\phi=0$, 共振荧光谱随压缩参量 r 的增加，表现出超加宽. 图 7.24(b) 为 $\Delta\phi=\pi$, 随 r 增加，中峰变得愈来愈细，边峰被抑制. 图 (c) 为 $\Delta\phi=\pi/2$ 的荧光谱，其变化情况介于图 7.24(a) 与 (b) 之间. 图 7.24(d) 则是荧光谱随 $\Delta\phi$ 的变化情形.

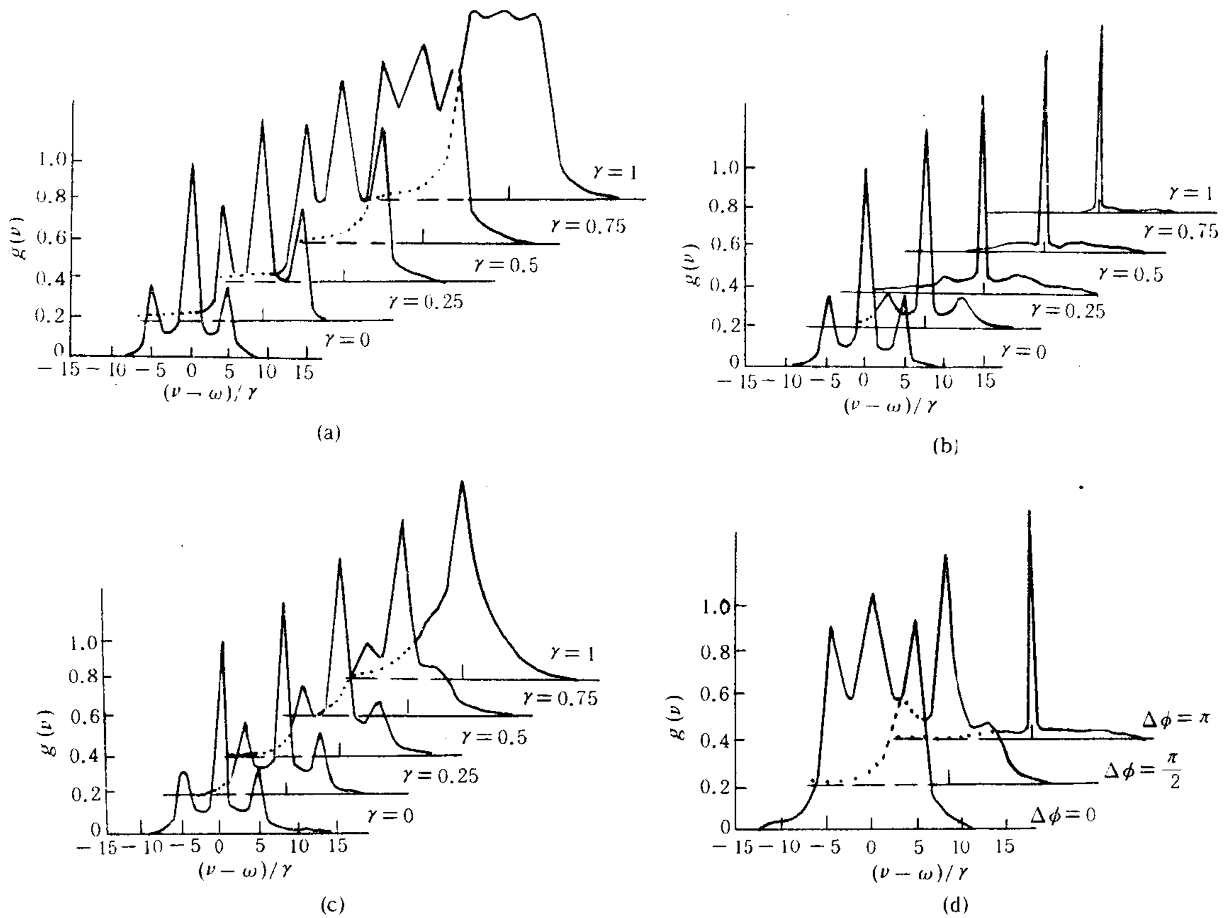


图 7.24 压缩态光场中原子的辐射光谱

(a) $\Delta\phi=0,\ \Omega/\gamma=5,\ \Delta\omega_a=0$; (b) $\Delta\phi=\pi,\ \Omega/\gamma=5,\ \Delta\omega_a=0$;
(c) $\Delta\phi=\pi/2,\ \Omega/\gamma=5,\ \Delta\omega_a=0$; (d) $\gamma_1/\gamma=2,\ \gamma_2/\gamma=0.9,\ \sigma_0=0.5,\ \Omega/\gamma=5,\ \Delta\omega_a=0$

(取自张卫平、谭维翰 [42])

7.8 含原子腔的 Q.E.D.

原子的辐射与跃迁是原子物理与量子力学中一个很基本的理论与实验课题. 自从 Einstein 引入自发与受激辐射系数后，一个很长的时间内，似乎问题已经解决. Purcell 早期的工作是很重要的 [46], 但在当时未引起足够的重视，只是若干年后，又重新提出来进行探索. 这就是目前有关原子腔量子电动力学 (Q.E.D.) 研究的开始. 下面就从自发辐射，原子与场作用 J-C 模型等方面讨论这一问题.

7.8.1 自发辐射的增强与抑制

1. 经典自发辐射理论

一带电的简谐振子在外场作用下，是吸收还是放出能量，主要依赖于简谐振子与驱动场同位相 ($\Delta\phi=0$) 还是异位相 ($\Delta\phi=\pi$), 这就是吸收与受激辐射. 此外，即使没有外加电磁场的驱动作用，由于简谐振子的加速运动，还会自发辐射出能量. 经典电动力学给出辐射的总功率 P 为

$$P=\frac{2}{3}\frac{e^2a^2}{c^3}=\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}<(-2\omega^2 r\cos\omega t)^2>=\frac{4e^2\omega^4}{3c^3}r^2 \tag{7.8.1}$$

自发辐射几率 W_s 为

$$W_s=\frac{P}{\hbar\omega}=\frac{4e^2r^2\omega^3}{3\hbar c^3} \tag{7.8.2}$$

2. 半经典理论

从计算原子的跃迁几率出发得出第二黄金律，即由激发态向基态跃迁的几率为

$$W=\frac{2\pi}{\hbar}\frac{\rho(E_k)}{\hbar}|<k|H'|m>|^2 \tag{7.8.3}$$

式中， $<k|H'|m>$ 为跃迁矩阵元， $E_k=\hbar\omega_k$, $\rho(E_k)d\omega_k$ 为原子跃迁的终态频率在 $\omega_k\to\omega_k+d\omega_k$ 范围内的终态数. 半经典理论的 (7.8.3) 式与经典理论的 (7.8.2) 式的一个很大区别在于将自发辐射跃迁几率同原子的跃迁元 $<k|H'|m>$ 及终态密度 $\rho(E_k)$ 联系起来了，而不是像经典偶极振子理论那样只涉及电子的加速而不涉及终态密度. 若 H' 采用电偶极相互作用， $H'=-\vec{E}\cdot e\vec{r}$, 场 $\vec{E}$ 用零场起伏， $\bar{E}^2=\frac{1}{2}E_\omega^2d\omega_k=\frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3}d\omega_k$, 则

$$|<k|H'|m>|^2=\frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3}d\omega_k e^2r_{km}^2\overline{\cos^2\theta} \tag{7.8.4}$$

将 (7.8.4) 式代入 (7.8.3) 式，并取定终态数 $\rho(E_k)d\omega_k=1$, 得

$$W=\frac{2\pi}{\hbar^2}\frac{2\hbar\omega^3}{\pi c^3}e^2r_{km}^2\overline{\cos^2\theta}=\frac{4e^2r_{km}^2\omega_{km}^3}{3\hbar c^3} \tag{7.8.5}$$

将这结果与经典自发辐射跃迁几率 W_s 的 (7.8.2) 式相比，形式上是一致的. 当然，$r,\omega;r_{km},\omega_{km}$ 意义是不一样的， ω 为偶极振动频率， r 为振幅； $\omega_{km}=\frac{E_m-E_k}{\hbar}$ 为电子在能级间的跃迁频率， $r_{km}=<k|r|m>$ 为 r 在能级 m,k 间的矩阵元. 而且 W 还可以写为 $W=\frac{4\pi^2e^2r_{km}^2\omega_{km}}{3\hbar}\rho_c,\rho_c=\frac{\omega_{km}^2}{\pi^2c^3}$ 为自由空间的辐射场的模式密度公式，即 Rayleigh–Jeans(R-J) 公式. 而 R–J 公式给出的是一个没有腔的自由空间密度公式. 如果有了腔，不论是闭腔还是开腔，只要腔的线度不是很大，态密度公式就要作相应的修正. 这从 R–J 公式的推导中能看出来.

3. 有损耗腔的状态密度

在射频波段的核磁共振实验中， Purcell 较早就注意到按公式 (7.8.5) 计算出的跃迁几率非常小 [46], 相应的弛豫时间则非常大 (5×10^{21}s $=1.6\times10^{14}$yr). 在进行实验的时间内到达平衡已不可能. 若考虑到核磁系统耦合到一谐振电路，而谐振电路的谱分辨率为 ν/Q, 在 $d\nu$ 内的状态数为 $\frac{2d\nu}{\nu/Q}$, 其中 2 是两个偏振分量. 三维自由空间中的态数 $\overline{\cos^2\theta}\rho_c d\omega V=8\pi\nu^2d\nu V/(3c^3)$, 在目前情况已不适用. 两种状态数的比 f 为

$$f=\frac{\frac{2d\nu}{\nu/Q}}{\frac{8\pi\nu^2d\nu V}{3c^3}}=\frac{3Q}{4\pi}\frac{\lambda^3}{V} \tag{7.8.6}$$

当 $f > 1$ 时，表明自发辐射几率增大，而弛豫时间相应减小. 根据实际达到的 Q, λ, V 值进行估算，弛豫时间已减小到分钟量级，即经几分钟后就达到热平衡.

在光频区的自发辐射跃迁中，也有如何计算有损耗的开腔的状态数及自发辐射几率问题，亦即如何计算 (7.8.6) 式中的 Q 因子. 现考虑光波在平行平板 A, B 构成的腔中传输. 如果 A, B 都是全反射的，则腔的模式频率间隔 $\delta\nu = c/l$. 这是将驻波节点取在腔面上的结果. 如果将 B 面改为部分通过 (见图 7.25), 则原来在 B 面上的节点，已通过 B 面与 A 面的内反射移至 A 面. 节点间距离也增至 $\bar{l} = 2nl$(n 为大于 1 的整数， $n = 1$ 为一次反射， $n > 1$ 为多次反射). 另一方面，在腔面 B 每反射一次便经历一次透射损失，容易计算腔内光能 Φ 的衰减 (这里不考虑侧面的逃逸损耗) 为

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1-R}{2l/c}\Phi, \qquad \Phi = \Phi_0 e^{-t/\tau_c}$$

$$\tau_c = \frac{2l}{c(1-R)} \tag{7.8.7}$$

式中， R 为反射系数， τ_c 为光子在腔内的寿命，于是可算出腔的品质因素为

$$Q = 2\pi\nu\tau_c = \frac{\nu}{\Delta\nu} = \frac{4\pi l}{1-R}\frac{1}{\lambda} = \frac{\bar{l}}{\lambda} \tag{7.8.8}$$

式中， $\Delta\nu = (2\pi\tau_c)^{-1}$ 为腔的光谱分辨，而

$$\bar{l} = \frac{4\pi l}{1-R} = 2\pi\tau_c c \tag{7.8.9}$$

于是有

$$\frac{\Delta\nu}{\delta\nu} = \frac{\nu\lambda/\bar{l}}{c/l} = \frac{l}{\bar{l}} \tag{7.8.10}$$

该式表明，由于腔内多次反射，有效长度由 l 增至 $\bar{l}$. 理想腔时，纵模间隔为 c/l, 光谱分辨率亦定为 $\delta\nu = c/l$. 对于有损耗情形，由于有效长度增至 $\bar{l}$, 光谱分辨率亦变为 $\Delta\nu = \nu\lambda/\bar{l} = c/\bar{l}$. 在 x 方向的态密度与光谱分辨成反比，由 $\tilde{\rho}_c$ 增至 $\tilde{\rho}_\lambda = \frac{\bar{l}}{l}\tilde{\rho}_c$; 在 y, z 方向没有反射或部分透过，亦即没有腔面，态密度与 R–J 公式同. 故总的态密度比 ρ_λ/ρ_c, 即沿 x 方向的态密度比 $\tilde{\rho}_\lambda/\tilde{\rho}_c$ 为

$$\rho_\lambda/\rho_c = \tilde{\rho}_\lambda/\tilde{\rho}_c = \frac{\bar{l}}{l} = Q\lambda/l \tag{7.8.11}$$

当 $Q\lambda > l$ 时，自发辐射是增强了. 当 $Q\lambda < l$ 时，自发辐射被抑制因而减弱了 [47]. 将这种计算方法推广到一个圆柱形的波导腔. 参照文献 [75], 一个圆柱形波导腔，沿轴方向传输的基模的波数 k 为

$$k = \frac{2\pi}{c}(\nu^2 - \nu_{01}^2)^{1/2}, \qquad \nu_{01} = c/\lambda_{01}$$

$$\lambda_{01} = \frac{2\pi a}{u_{01}}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \tag{7.8.12}$$

式中， ν_{01} 为截止频率； n_2, n_1, a 分别为波导的外套与内芯的折射率以及内芯的半径； u_{01} 为 Bessell 函数 $J_0(u)$ 的第一个 0 点， $u_{01} = 2.405$;$\lambda_{01} = c/\nu_{01}$ 为截止波长. 又设圆柱的长度为 L, 则驻波条件为 $kL = 2\pi m$(m 为整数), 于是有状态密度

$$\rho_g = \frac{4}{V}\frac{dm}{d\nu} = \frac{4}{\pi a^2 c}\frac{\nu}{(\nu^2-\nu_0^2)^{1/2}} \tag{7.8.13}$$

其中因子 4 是考虑到两个偏振分量及 $\pm|m|$ 而引进的.

当 $\nu > \nu_{01}$ 并接近 ν_{01} 时， ρ_g 有一共振增强；当 $\nu < \nu_{01}$ 时，自发辐射受阻不能发生.

当包括更高阶的截止波长时，(7.8.12) 式中的 $\nu_{01}, \lambda_{01}, u_{01}$ 可用 $\nu_{0j}, \lambda_{0j}, u_{0j}$ 来替代，u_{0j} 为 $J_0(u)$ 的第 j 个 0 点， (7.8.13) 式可推广为

$$\rho_g = \frac{4}{\pi a^2 c}\sum_j \frac{\nu}{(\nu^2-\nu_{0j}^2)^{1/2}} \tag{7.8.14}$$

当频率 ν 趋于很大时，态密度 ρ_g 趋近于 R–J 公式的态密度 ρ_c. 图 7.26(a) 给出 $\rho_g(\nu/\nu_0)$ 与 ν/ν_0 的关系曲线，图 7.26(b) 给出状态密度比 $R(\nu/\nu_0) = \rho_g(\nu/\nu_0)/\rho_c(\nu/\nu_0)$ 随 ν/ν_0 的变化曲线. 图 7.26(a) 中的光滑曲线为态密度 ρ_c. 在 $\nu = \nu_{0j}$ 附近的奇异行为可通过引进波导腔的阻尼及品质因素 $Q \simeq a/\delta$ 来表示，δ 为趋肤深度. 参照 (7.8.11) 式，便得

$$R(\nu_{0j}/\nu_0) \simeq Q\lambda_{0j}/a \tag{7.8.15}$$

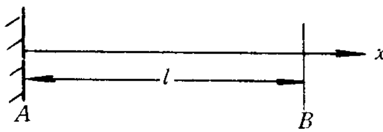


图 7.25　平行平板腔中光的传输

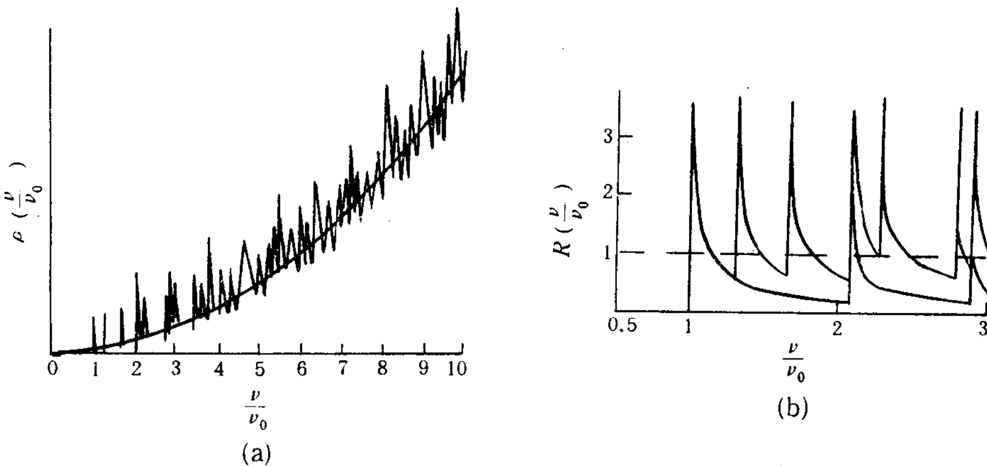


图 7.26 (a) 在一理想的圆柱形波导腔中的模式密度 (光滑曲线表示自由空间的模式密度);
(b) 波导腔的模式密度与自由空间的模式密度比 (粗线为 $|\Delta m| = 1$ 跃过的模式密度比)
(参照文献 [47])

4. 腔内单原子自发辐射的实验观察

体现腔内单原子自发辐射的增强因子 $f = \frac{3Q}{4\pi^2}\frac{\lambda^3}{V}$ 已在射频核磁共振实验中得到证实. 因 λ^3 与 V 为同一量级， Q 可做得很高，易于实现 $f \gg 1$. 但在光频区，通常使用开腔，其有效体积 V 远大于 λ^3, 即使 Q 很高， f 值仍为 $f \ll 1$. 为了观察谐振腔对原子自发辐射的影响，只有将谐振腔做得很小，或选择跃迁能级较接近，使得辐射波长 λ 足够大. 文献 [48] 中选 Na 的 Rydberg 原子进行实验，其跃迁能级为 $23S$ 至 $22P_{1/2}$ 或 $22P_{3/2}$ ($\nu_1 = 340.96$GHz 或 $\nu_2 = 340.39$GHz, $\lambda_1 \simeq \lambda_2 \simeq 0.88$mm) Fabry–Perot 开腔，腔长

$L \simeq 25$mm, 共焦腔， Gaussian 光束腰 $w \simeq 1.9$mm. Rydberg 原子 $23S$ 态是用 5ns 脉冲染料激光激励 Na 原子获得的. 脉冲重复频率为 10s^{-1}. 改变激光强度，每一脉冲激励的原子数可在 $1 \sim 10^3$ 内变化. 原子通过光腰的平均时间 $\Delta t = 2\mu$s. 腔长可调谐使得与原子跃迁能级为共振. 图 7.27 为实验布置图. 模体积 $V = \pi L w^2/4 = 70\text{mm}^3$, 腔的 f 因子为 $7.4 \times 10^{-4} Q$. Rydberg 态 $22S \to 22P$ 的自由空间跃迁几率 $W = 150\text{s}^{-1}$. 腔增强自发辐射跃迁几率 $W_c = fW = 0.11Q$. 当 $Q = 10^6$，在 $\Delta t = 2\mu$s 时间内，将有 $W_c \Delta t = 0.22$ 个原子由 $23S$ 跃迁到 $22P$. 为得到更高的 Q 值，整个系统采用超导低温 (5.7k) 冷却. 飞过谐振腔的原子，再进入一平行平板电极，上加一由 $0 \sim 1000$V 的电场，使原子离化，并用电子倍增管探测，其结果如图 7.28 所示. 曲线 a, b, c 给出被探测的离化信号，实线为有共振腔增强自发辐射，原子较多处于 $22P$ 状态；而虚线为非共振腔，无共振增强自发辐射情形，原子基本上处于 $23S$ Rydberg 态，实测得 $W_c \Delta t = 0.16, Q \simeq 7.5 \times 10^5$. 由此可算出腔的阻尼 $\delta\nu = \dfrac{2\pi\nu}{Q} \simeq 2.8 \times 10^6 \text{s}^{-1}$；而增强的自发辐射几率 $W_c = \dfrac{0.16}{2\mu\text{s}} = 8 \times 10^4 \text{s}^{-1}$, 即 $\delta\nu$ 比 W_c 大约 35 倍. 绝大部分自发辐射产生的光子均被镜面吸收所阻尼掉. 若再增加 Q 10 倍，则 $\delta\nu$ 与 W_c 分别为 $2.8 \times 10^5 \text{s}^{-1}, 8 \times 10^5 \text{s}^{-1}$. 光子产生的几率与经由腔损耗的几率为 $8/2.8 \simeq 2.8$, 故腔内光子将被储存起来，直至下一次被原子再吸收为止. 这样便形成一个能量在原子与腔的模式间来回振荡的过程.

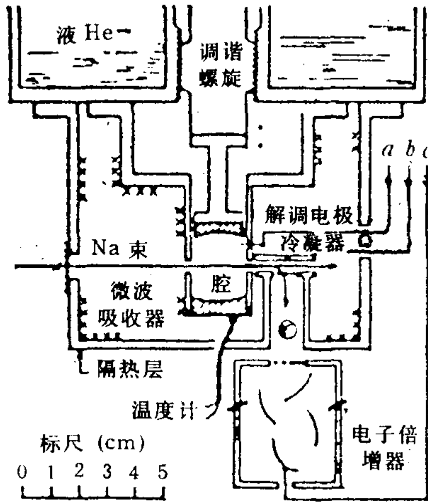


图 7.27 实验布置图
(参照 Goy 等 [48])

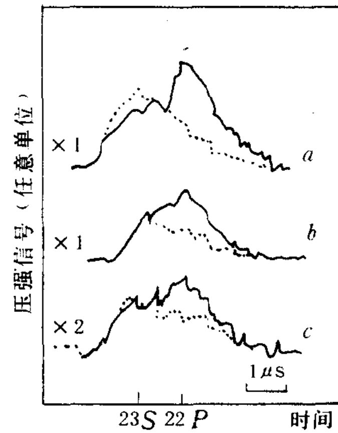


图 7.28 腔增强自发辐射 (虚线为非共振腔；实线为共振腔)
曲线 a, b, c 对应于腔内原子数分别为 3.5, 2 与 1.3.
曲线 a, c 为 $23S \to 22P_{3/2}$ 跃迁，曲线 b 为 $23S \to 22P_{1/2}$ 跃迁
(参照文献 [48])

通过原子与平行平面腔的耦合，不仅可以增强自发辐射，也可以使自发辐射完全被抑制掉 [48]. 他们采用的是处于“圆态”的铯原子束，观察的跃迁为 $(n = 22, |m| = 21) \to (n = 21, |m| = 20), \lambda = 0.45$mm. 所谓“圆态”，是指主量子数 n 很大而磁量子数 $|m| = n - 1$ [50], 原子只通过偶极跃迁辐射能量，选择定则为 $\Delta|m| = -1$, 辐射偏振垂直于量子化方向，亦即垂直于加在平行平板间的电场方向. 用通常计算自由空间模式密度方法计算间距为 d 的平行平板间的模式密度 [51]. 易证当 $d < \lambda/2$ 时模式密度为 0; 而当 $d > \lambda/2$, 原子处于离中间平面 z 处的辐射跃迁几率为

$$A' = 3A_0 \sin^2(\pi z/d - \pi/2) \tag{7.8.16}$$

式中， A_0 为 Einstein 自发辐射系数．将上式对 z 求平均便得 $A' = \frac{3}{2}A_0$, 因而平行平板间距由 $d > \lambda/2$ 逐渐减小到 $d < \lambda/2$, 原子的自发辐射几率由 $\frac{3}{2}A_0$ 急剧下降到零．同样，固定 d, 通过 Stark 效应连续改变 λ 由 $d > \lambda/2$ 变到 $d < \lambda/2$ 亦可．图 7.29 是直接观察到的自发辐射信号．当 $\lambda/2d > 1$, 自发辐射受抑制．

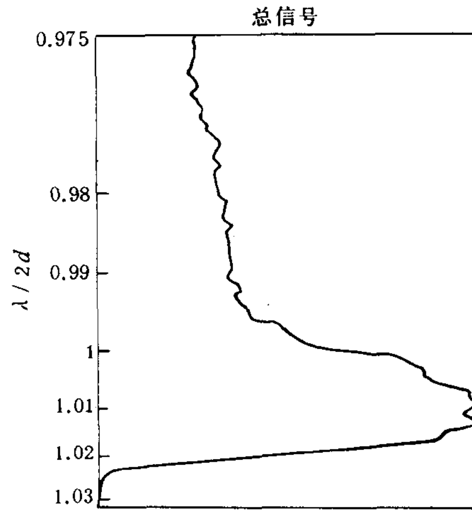


图 7.29　当 $\lambda/2d$ 接近截止值时的自发辐射信号
(参照文献 Hulet [49])

7.8.2　单模场与二能级原子相互作用的 J–C 模型

关于单模场与二能级原子相互作用，我们已经研究得很多了，其中最具概括性的方程即 (7.6.9), (7.6.10) 式．我们曾经在 Ω 很大， b_{s0}, b_{s0}^+ 很小的情况下求解了这一方程．但当 Ω 并不很大，而 b_{s0}, b_{s0}^+ 并非很小的情形，求解就要复杂得多了．现考虑另一极端情形，即驱动场 Ω 为 0(也可理解为将驱动场 Ω 并到 b 中去，并不单独分离出一经典的驱动场来), 且弛豫系数 γ_1, γ_2, χ 、失谐 $\Delta\omega, \Delta\omega_c$ 、无规力 $\Gamma_z, \Gamma^\pm, F^\pm$ 等均略去．这样原子与驱动场的相互作用问题，就是一纯粹的量子电动力学问题．方程 (7.6.9),(7.6.10) 简化为

$$\frac{d\sigma_z}{dt} = -igb^\dagger\sigma^- + ig^*b\sigma^+$$

$$\frac{d\sigma^-}{dt} = -i2g^*\sigma_z b, \qquad \frac{db}{dt} = ig\sigma^-$$

$$\frac{d\sigma^+}{dt} = i2gb^\dagger\sigma_z, \qquad \frac{db^\dagger}{dt} = -g^*\sigma^+ \tag{7.8.17}$$

这就是原子与场相互作用的 J–C 模型 [52]. 由此可求得 (下面用“ · ”表示对时间的导数)

$$\overset{\cdot}{(\sigma^-\sigma^+ + \sigma^+\sigma^-)} = 2\sigma_z(igb^\dagger\sigma^- - ig^*b\sigma^+) + 2(igb^\dagger\sigma^- - ig^*\sigma^+)\sigma_z = -2\overset{\cdot}{(\sigma_z\sigma_z)} \tag{7.8.18}$$

故有

$$\sigma^-\sigma^+ + \sigma^+\sigma^- = -2\sigma_z^2 + C \tag{7.8.19}$$

同样

$$\overset{\cdot}{(b^\dagger b)} = -ig^*\sigma^+b + igb^\dagger\sigma^- = -\dot{\sigma}_z$$

故有

$$b^\dagger b = -\sigma_z + C' \tag{7.8.20}$$

又

$$\ddot{\sigma}_z = -g^2(\sigma^-\sigma^+ + \sigma^+\sigma^-) - 2g^2(b^\dagger b + bb^\dagger)\sigma_z$$

由 (7.8.19), (7.8.20) 式及 $bb^\dagger = 1 + b^\dagger b$, 得

$$\ddot{\sigma}_z - 6g^2\sigma_z^2 + 2g^2(1+2C')\sigma_z + g^2 C = 0 \tag{7.8.21}$$

若将 (7.8.21) 式中的 σ_z 算子理解为期待值 $<\sigma_z>$, 而 $\ddot{\sigma}_z, \sigma_z^2, \sigma_z$ 分别用 $<\ddot{\sigma}_z>$, $<\sigma_z^2>, <\sigma_z>$ 来代替 [52], 并令 $C = 1/2, a = 1 + 2C'$, 则积分 (7.8.21) 式得

$$(<\dot{\sigma}>)^2 - g^2(4<\sigma_z>^2 - 1)(<\sigma_z> - a/2) = 0 \tag{7.8.22}$$

当 $<\sigma_z> = \pm 1/2$ 时，上式给出 $<\dot{\sigma}_z> = 0$. 积分 (7.8.22) 式，并令 $z = 2<\sigma_z>$, 便得

$$\sqrt{2}gt = \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(z-a)}} \tag{7.8.23}$$

此即 Jaynes, Cummings 周期解 [52]. 当 $a > 1$, 在 $z = \pm 1$ 间作周期运动， $z = \pm 1$ 为拐点；当 $a < 1$ 时，拐点为 $z = -1, a$. $C' = \frac{1}{2}(a-1) = n + 1/2$ 为腔内光子储能， 1/2 为零点能起伏. (7.8.23) 式结果可用椭圆函数表示为

$$z(t) = -1 + 2\mathrm{sn}^2\left(\sqrt{n+1}gt + Q, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \tag{7.8.24}$$

$$Q = \mathrm{sn}^{-1}\left(\sqrt{\frac{z(0)+1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \tag{7.8.25}$$

Q 为运动的初值，当 a 很大时，椭圆函数趋近于三角函数：

$$\sqrt{2}gt \simeq \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}(\sin^{-1} z(t) - 2Q)$$

$$z(t) = \sin(2\sqrt{n+1}gt + 2Q) \tag{7.8.26}$$

上式为 $a = 2(n+1)$ 很大的情形的解. 另一方面, 当 a 很小, 例如 $n = 0$ 时, 为只有起伏能的特殊情形, 这时解 (7.8.24) 不再是周期的, 因 $\mathrm{sn}(u,1) = \tanh u$, 当 $u \to \pm\infty, \tanh u \to \pm 1$, 表明当原子处于激发态时，场能已耗尽.

(7.8.22)~(7.8.25) 式是为新经典理论，不是全量子理论. 按全量子理论 $<\sigma_z^2> \neq <\sigma_z>^2, <\sigma_z^2> = 1/4, <\sigma^-\sigma^+ + \sigma^+\sigma^-> = 1$, 由 (7.8.19) 式得 $C = 3/2$. 将这些结果代入 (7.8.21) 式后并求期待值，得

$$<\ddot{\sigma}_z> + 2g^2 a <\sigma_z> = 0 \tag{7.8.27}$$

解为

$$<\sigma_z> = \frac{1}{2}\cos(g\sqrt{2a}\, t) = \frac{1}{2}\cos(2g\sqrt{n+1}\, t) \tag{7.8.28}$$

图 7.30 给出新经典理论 (7.8.24) 式与全量子理论 (7.8.28) 式的比较，按不同 n 值计算出来的 $<\sigma_z>$ 随时间 t 的变化，分别用实线与虚线来表示，当 $n=1,2$, 实线与虚线有差别，但不是很大，当 $n=9$, 实线与虚线几乎重合. 但是，实验已证明，新经典理论与实验结果不符 [53]. 现利用全量子理论来讨论谐振腔使自发辐射几率增强的效应. 以氨分子通过圆柱形谐振腔激发最低的 TM 模为例 [52], (7.8.28) 式中的 $g=\frac{\mu}{J_1}\sqrt{\frac{2\pi\omega}{\hbar V}}$. $J_1=J_1(u)=0.519, u=2.405$ 为 $J_0(u)=0$ 的第一个根，氨分子的跃迁频率为 24kMHz,$\omega=2\pi\times 24\times 10^9$, V 为谐振腔体积，腔长取 10cm,$\mu=1.47\times 10^{-18}$e.s.u, 由此算得 $g/\omega=2.08\times 10^{-10}, g\simeq 5\times 2\pi \mathrm{s}^{-1}$. 氨分子进入腔内，经过 $\frac{1}{40}$s 后，$<\sigma_z>$ 已衰减到初值的 $\cos\left(\frac{2\times 5\times 2\pi}{40}\right)=0$ 倍. 这与氨分子的自由空间跃迁谱宽 $\Delta\omega=\frac{4\omega^3\mu^2}{3\hbar c^3}\simeq 10^{-7}\mathrm{s}^{-1}$ 所对应的自发辐射寿命约几个月相比，表明谐振腔使自发辐射跃迁几率大为增强了.

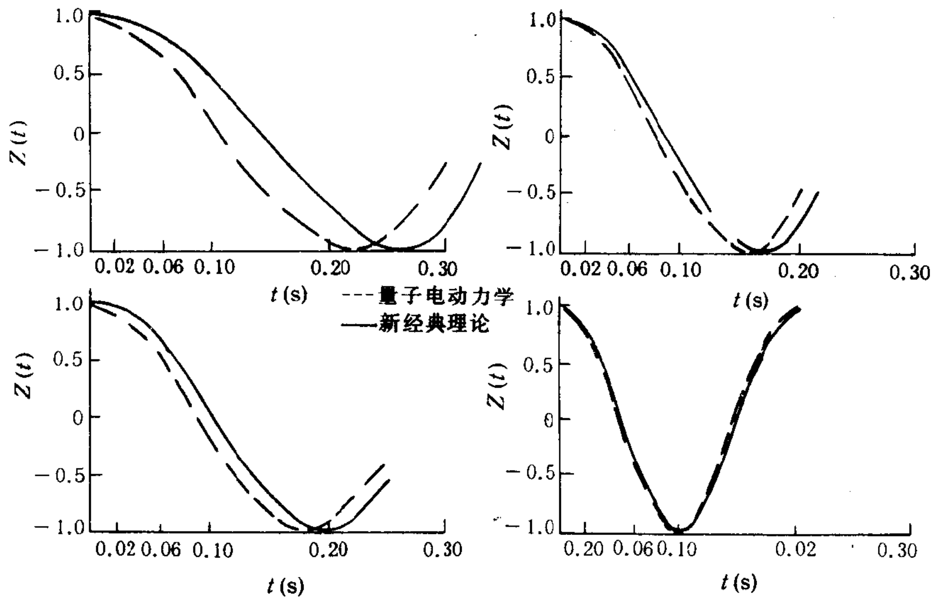


图 7.30 新经典理论 $<\sigma_z>$ 与全量子理论 $<\sigma_z>$ 曲线的比较
(参照 Jaynes [52])

由 (7.8.20),(7.8.28) 式及 $C'=\frac{a-1}{2}=\frac{2(n+1)-1}{2}=n+1/2$, 可进一步求得

$$<b^\dagger b>=-<\sigma_z>+C'=n+1/2-\frac{1}{2}\cos(2g\sqrt{n+1}t) \tag{7.8.29}$$

对于一般情形，$<(b^\dagger)^p b^p>$ 可用下面方法求解 [54]：
因

$$(b^\dagger)^p b^p=E_p+D_p(-2\sigma_z) \tag{7.8.30}$$

则

$$\begin{aligned}(b^\dagger)^p b^p b^\dagger b &= (b^\dagger)^{p+1}b^{p+1}+b^{\dagger p}(b^p b^\dagger-b^\dagger b^p)b \\ &= (b^\dagger)^{p+1}b^{p+1}+pb^{\dagger p}b^p\end{aligned} \tag{7.8.31}$$

将 (7.8.30) 式代入 (7.8.31) 式，并应用 $<(-2\sigma_z)^2>=1$, 便得如下递推关系：

$$\begin{aligned}E_{p+1}&=E_pE_1+D_pD_1-pE_p\\ D_{p+1}&=E_pD_1+D_pE_1-pD_p\end{aligned} \tag{7.8.32}$$

由 (7.8.29) 式，得

$$E_1 = n + \frac{1}{2}, \qquad D_1 = \frac{1}{2} \tag{7.8.33}$$

则

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{n!}{(n-p+1)!}(n-p/2+1) \\ D_p &= \frac{n!}{(n-p+1)!}\frac{p}{2} \end{aligned} \tag{7.8.34}$$

将解 (7.8.28) 记为 $<\sigma_z>_n$, (7.8.34) 式中的 E_p, D_p 记为 E_{np}, D_{np}, 则更一般的解可表示为

$$<\sigma_z> = \sum P_n <\sigma_z>_n \tag{7.8.35}$$

注意到 (7.8.30) 式，则得

$$\begin{aligned} C_p = <b^{\dagger p} b^p>|_{t=0} &= \sum_{n=1} P_n(E_{np} - 2D_{np} <\sigma_z>_n)|_{t=0} \\ &= \sum_{n=1} P_n(E_{np} - D_{np}) \end{aligned} \tag{7.8.36}$$

设 C_p 给定，可解联立方程 (7.8.36) 求出 P_n. 又设辐射场初始时处于相干态，则可证 (7.8.35) 式中的系数 P_n 为

$$P_n = \exp(-|\alpha|^2)|\alpha|^{2n}/n! \tag{7.8.37}$$

将 (7.8.28) 和 (7.8.37) 式代入 (7.8.35) 式中，得

$$2 <\sigma_z> = \exp(-|\alpha|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos(2g\sqrt{n+1}t) \tag{7.8.38}$$

由 (7.8.38) 式表述的动力学行为 [55, 56], 主要表现为自发辐射的崩塌与复苏 (见图 7.31).

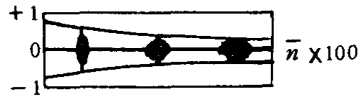


图 7.31　二能级原子的崩塌与复苏曲线

(参照 Eberly [56])

7.8.3　真空场的 Rabi 分裂

Eberly 等用瞬态荧光计算程序最先计算了 “原子在理想腔中的自发辐射谱” [57, 58]. 物理模型为一个处于激发态的原子被放置在没有损耗的谐振腔中，驱动场为 0. 初始时腔为真空，没有光子，然后观察这个原子的自发辐射谱，数值计算结果见图 7.32. 当 $\Delta = \omega_0 - \omega_c$($\omega_0, \omega_c$ 分别为原子能级跃迁频率与谐振腔的频率) 很小时，这个谱有明显的双峰结构；当 Δ 增大时，其中一峰逐渐消失. 他们称这个双峰为真空场产生的 Rabi 分裂. 因为在初始时腔内没有光子，而驱动场也为 0, 仿共振荧光边峰为驱动场产生的 Rabi 分裂的分析，故称此时的分裂为真空场的 Rabi 分裂. 图 7.32 是腔内初始光子为 0 的情形. 如果腔内在初始时光子不为 0, 其自发辐射谱由图 7.33 给出. 腔内初始光子数 n_0(在

图 7.33 中用 2α 表示) 在 $10^{-0.2} \sim 10^{1.3}$ 范围内变化，且 $\Delta = \omega_0 - \omega_c = 0$ 的瞬态共振荧光谱明显示出由真空场双分裂向三峰结构过渡的过渡过程.

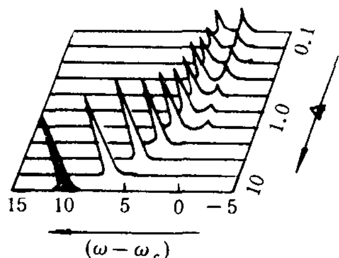


图 7.32 真空场的 Rabi 分裂谱 ($t = 20g^{-1}$) (参照 Sanchez–Mandrgon [58])

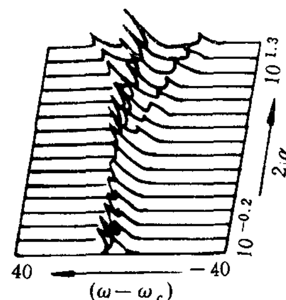


图 7.33 $t = 0$ 时腔内的辐射对二能级原子辐射谱的影响 ($t = 20g^{-1}$) 参数 2α 每一格表示增加 $10^{0.1}$. (参照文献 [58])

稍后的关于真空场 Rabi 分裂对极化率影响的研究，发现吸收谱也有双峰结构 [59,60].

真空场 Rabi 分裂的实验测定，虽有过报道，但并未真正测得真空场 Rabi 分裂，而是测得“经典线性色散理论”引起的分裂.

7.9 含二能级原子腔的透过率谱 [63]

如上节所述，含二能级原子腔的自发辐射、共振荧光、透过率谱等均表现出复杂的情形，特别是对真空场 Rabi 分裂的实验观察更引起人们的兴趣 [60~63]. 在这一节中，我们将讨论两个问题，第一个问题是在共振腔中原子极化率的计算，第二个问题是利用 Fabry-Perot 多光束干涉方法测定透过率谱，实现对真空场 Rabi 分裂的观测.

7.9.1 共振腔中原子的极化率计算

将驱动场看成经典的，其产生与湮没算子用可对易的共轭复数 b_c 与 b_c^* 来代替，令 $\Omega = 2gb_c/\hbar$, 于是参照 (7.6.9),(7.6.10) 式可写出两个方程

$$\frac{db}{dt} = -(\chi + i\Delta\omega_c)b + ig\sigma^- + F^- \tag{7.9.1}$$

$$\frac{d\sigma^-}{dt} = -\gamma_2\sigma^- - i2g^*\sigma_z b - i\sigma_z\Omega + \Gamma^- \tag{7.9.2}$$

对无规力求统计平均用记号 $<>$ 表示，$<F^-> = <\Gamma^-> = 0$. 参照解线性微分方程的方法，设 $\frac{db}{dt}, \frac{d\sigma^-}{dt}$ 在求统计平均后有：$<\frac{db}{dt}> = \lambda <b>, <\frac{d\sigma^-}{dt}> = \lambda<\sigma^->$($\lambda$ 为待定特征值), 于是 (7.9.1) 式的解可写为

$$\lambda b = -(\chi + i\Delta\omega_c)b + ig\sigma^- + F^- \tag{7.9.3}$$

$$b = \frac{ig\sigma^- + F^-}{\lambda + \chi + i\Delta\omega_c} \tag{7.9.4}$$

将 (7.9.4) 式代入 (7.9.2) 式的右端，并注意到 $<\sigma_z\sigma^-> = -<\sigma^->/2$, 于是得

$$\lambda < \sigma^- >= (-\gamma_2 - \frac{g^2}{\lambda+\chi+i\Delta\omega_c}) < \sigma^- > -i\Omega < \sigma_z >$$

$$< \sigma^- >= \frac{-i\Omega < \sigma_z >}{\lambda+\gamma_2+g^2/(\lambda+\chi+i\Delta\omega_c)} \tag{7.9.5}$$

设驱动场频率为 ω, 则 $\Omega \propto e^{-i\omega t} = (e^{-i(\omega-\omega_0)t})e^{-i\omega_0 t}$, 经旋波变换后 $\Omega \propto e^{-i(\omega-\omega_0)t}$, 代入 (7.9.5) 式，便得 $< \sigma^- > \propto e^{-i(\omega-\omega_0)t}$; 而 $< \frac{d\sigma^-}{dt} >= \lambda < \sigma^- >$, 故得

$$\lambda = -i(\omega-\omega_0) \tag{7.9.6}$$

参照文献 [64], 并恢复旋波变换因子 $e^{-i\omega_0 t}$, 则极化 $P(t)$ 及极化率 $\chi(\omega)$ 可定义为

$$\begin{aligned} P(t) &= \mu(< \sigma^- > e^{-i\omega_0 t} + < \sigma^+ > e^{i\omega_0 t}) \\ &= \varepsilon_0 E(\omega)(\chi'(\omega)\cos(\omega t+\phi) + \chi''(\omega)\sin(\omega t+\phi)) \\ &= \mathrm{Re}\left[\varepsilon_0\chi(\omega)E(\omega)\mathrm{e}^{-i\omega t}\right] \end{aligned} \tag{7.9.7}$$

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega) \tag{7.9.8}$$

注意到 $E(\omega) = \frac{\hbar}{2\mu}\Omega$, 将 (7.9.5) 式代入 (7.9.7) 式，便得原子极化率

$$\begin{aligned} \varepsilon_0\chi(\omega) &= \frac{-i2\mu^2}{\hbar}\frac{< \sigma_z >}{\lambda+\gamma_2+g^2/(\lambda+\chi+i\Delta\omega_c)} \\ &= \frac{-i2\mu^2}{\hbar} < \sigma_z > \frac{\lambda+\chi+i\Delta\omega_c}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)} \end{aligned} \tag{7.9.9}$$

式中，λ_1, λ_2 为 $(\lambda+\gamma_2)(\lambda+\chi+i\Delta\omega_c)+g^2=0$ 的根. 当腔的体积 V 很大，$g = \mu\sqrt{\frac{2\pi\omega_0}{\hbar V}} \to 0$; 或者当腔的损耗 χ 取得很大，亦即几乎没有谐振腔，这两种情形均导致原子与腔去耦合，从而 (7.9.9) 式过渡到

$$\varepsilon_0\chi(\omega) = \frac{-i2\mu < \sigma_z >}{\hbar(\lambda+\gamma_2)} = \frac{-i2\mu < \sigma_z >}{\hbar(-i(\omega-\omega_0)+\gamma_2)} \tag{7.9.10}$$

这即为通常线性色散理论的结果. 如果 V 不是很大，而腔的损耗也较小，就必须计及 (7.9.9) 式分母中的 $g^2/(\lambda+\chi+i\Delta\omega_c)$, 即原子辐射 b 的反作用带来的修正. 修正的大小取决于 $\gamma_2 = \mu^2\omega^3/(6\pi\hbar c^3)$ 与 $g^2/\chi = \mu^2 2\pi\omega_0/(\hbar V\chi)$ 之比，$\gamma_2 : g^2/\chi = 1 : \frac{3\omega_c}{2\pi\chi}\frac{\lambda^3}{V}$. 只有当 $\frac{3\omega_c}{2\pi\chi}\frac{\lambda^3}{V}$ 不小于 1, 修正才会是有效的，也正是由于这个修正才导致“真空场 Rabi 分裂”:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma_2+\chi+i\Delta\omega_c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma_2-\chi-i\Delta\omega_c}{2}\right)^2 - g^2} \tag{7.9.11}$$

当 $\Delta\omega_c = 0, \gamma_2 = \chi$,(7.9.11) 式给出

$$\lambda_{1,2} = -\gamma_2 \pm ig \tag{7.9.12}$$

代入 (7.9.9) 式，得出原子的极化率

$$\varepsilon_0\chi(\omega)=\frac{-i\mu^2<\sigma_z>}{\hbar}\left\{\frac{1}{-i(\omega-\omega_0)-ig+\gamma_2}+\frac{1}{-i(\omega-\omega_0)+ig+\gamma_2}\right\} \tag{7.9.13}$$

不难看出，当 $\omega-\omega_0=\pm g$, 便是共振吸收，亦即原子的共振吸收频率已由线性极化理论给出的 $\omega=\omega_0$ 分裂为 $\omega=\omega_0\pm g$. 实现这一分裂的十分重要的条件应是 g 与 γ_2 之比 $R\left(=\frac{|g|}{\gamma_2}=\frac{\mu\sqrt{\frac{2\pi\omega_0}{\hbar V}}}{\mu^2\omega_0^3/6\pi\hbar c^3}=\frac{6\pi c^3}{\omega_0^3}\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_0}{\hbar V\mu^2}}\right)$ 尽可能大，这由下面的数值计算可看出来.

7.9.2 含二能级原子腔的透过率谱

(7.9.4), (7.9.5) 式给出了原子辐射 $<b>$ 及 $<\sigma^->$ 的计算公式. 但 $<b>$ 还不是腔内的总辐射场，因为没有将入射场 $<b_{\text{in}}>$ 包括进去，而且在腔内还有一传播过程. 根据 (7.9.9) 式或 (7.9.13) 式就可计算原子的介电常数 $\epsilon(\omega)$

$$\epsilon(\omega)=1+4\pi\varepsilon_0\chi(\omega) \tag{7.9.14}$$

并解场强 $E(z,\omega)$ 的传播方程 [66](见图 7.34)

$$\frac{\partial^2E(z,\omega)}{\partial z^2}+\epsilon(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}E(z,\omega)=0 \tag{7.9.15}$$

$$E^{\pm}(z,\omega)=E^{\pm}e^{\pm i\sqrt{\epsilon}kz} \tag{7.9.16}$$

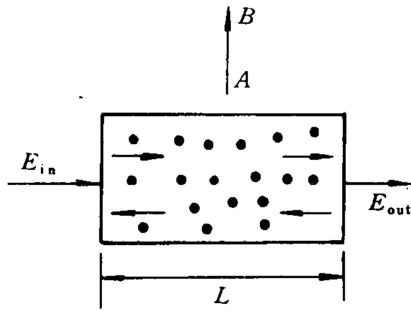


图 7.34 场强在含原子腔内的传播

在端面 $z=0$ 处的边界条件为

$$E^+=tE_{\text{in}}+rE^- \tag{7.9.17}$$

式中，t,r 为端面的透射与反射系数. 而 E^+ 传至出射端面为 $E^+e^{i\sqrt{\epsilon}kL}$, 经反射 $(r'E^+e^{i\sqrt{\epsilon}kL})$ 再传至入射端为

$$E^-=r'e^{i\sqrt{\epsilon}kL}\cdot e^{i\sqrt{\epsilon}kL}E^+ \tag{7.9.18}$$

代入 (7.9.17) 式，得

$$E^+=\frac{tE_{\text{in}}}{1-rr'e^{i2\sqrt{\epsilon}kL}} \tag{7.9.19}$$

$$E_{\text{out}}=t'E^+e^{i\sqrt{\epsilon}kL}=\frac{tt'E_{\text{in}}e^{i\sqrt{\epsilon}kL}}{1-rr'e^{i2\sqrt{\epsilon}kL}} \tag{7.9.20}$$

根据 (7.9.20) 式可定义透过率谱

$$T(\omega)=|\frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}}|^2=\frac{1}{(\frac{e^{\alpha L/2}-Re^{-\alpha L/2}}{1-R})^2+(\frac{2\sqrt{R}}{1-R}\sin(\varepsilon/2))^2} \tag{7.9.21}$$

$$R=rr',\qquad tt'=1-R,\qquad e^{i2\sqrt{\epsilon}kL}=e^{-\alpha L+i\varepsilon}$$

$$\sqrt{\epsilon}=(1+4\pi\varepsilon_0\chi(\omega))^{1/2}\simeq 1+2\pi\varepsilon_0\chi(\omega)=1+\frac{1}{2}(\chi'(\omega)+i\chi''(\omega))$$

$$\alpha = \frac{\chi''(\omega)\omega_0}{c}, \qquad k = \frac{\omega_0}{c}$$

$$\varepsilon = \frac{2L(\omega - \omega_c)}{c} + \chi'(\omega)\frac{\omega_0}{c}L$$

V 取很大， $g \to 0$, 并设 $\Delta\omega_c = \omega_c - \omega_0 = 0$, 则

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2^2 + (\omega - \omega_0)^2}, \qquad \alpha_0 = \frac{2\mu^2 < \sigma_z > \omega_0}{\hbar\gamma_2 c}$$

$$\varepsilon = \frac{2L(\omega - \omega_c)}{c} - \alpha_0 L \frac{\gamma_2(\omega - \omega_0)}{\gamma_2^2 + (\omega - \omega_0)^2} \tag{7.9.22}$$

对 $g \nrightarrow 0$ 情形，参照 (7.9.10), (7.9.13) 式，需作如下代换：

$$(\gamma_2^2 + (\omega - \omega_0)^2)^{-1} \to \frac{1}{2}[(\gamma_2^2 + (\omega - \omega_0 + g)^2)^{-1} + (\gamma_2^2 + (\omega - \omega_0 - g)^2)^{-1}]$$

$$\frac{\omega - \omega_0}{\gamma_2^2 + (\omega - \omega_0)^2} \to \frac{1}{2}\left[\frac{\omega - \omega_0 + g}{\gamma_2^2 + (\omega - \omega_0 + g)^2} + \frac{\omega - \omega_0 - g}{\gamma_2^2 + (\omega - \omega_0 - g)^2}\right]$$

图 7.35 给出透过率谱、相移以及吸收系数. 由图来看，当 $g/\gamma_2 \ll 0.5$ 时，透过率主要表现经典的双峰结构，但当 $g/\gamma_2 = 1,2$ 时，便表现出真空场 Rabi 振荡的三峰结构. 在文献 [61,62] 观察到的正是图 7.35(a), (b) 所示的由经典的线性色散关系引起的双峰结构，而由原子的自作用引起的真空场 Rabi 分裂导致透射谱的三峰结构 (如图 7.35(c), (d) 所示) 并未观察到. 如果是在偏离或垂直于入射光 E_{in}(如图 7.34 中的 AB) 方向观察原子的自发辐射谱，则由 (7.9.4), (7.9.5) 式易于判明，双峰结构恰能表现出由原子的自作用引起的真空场的 Rabi 分裂.

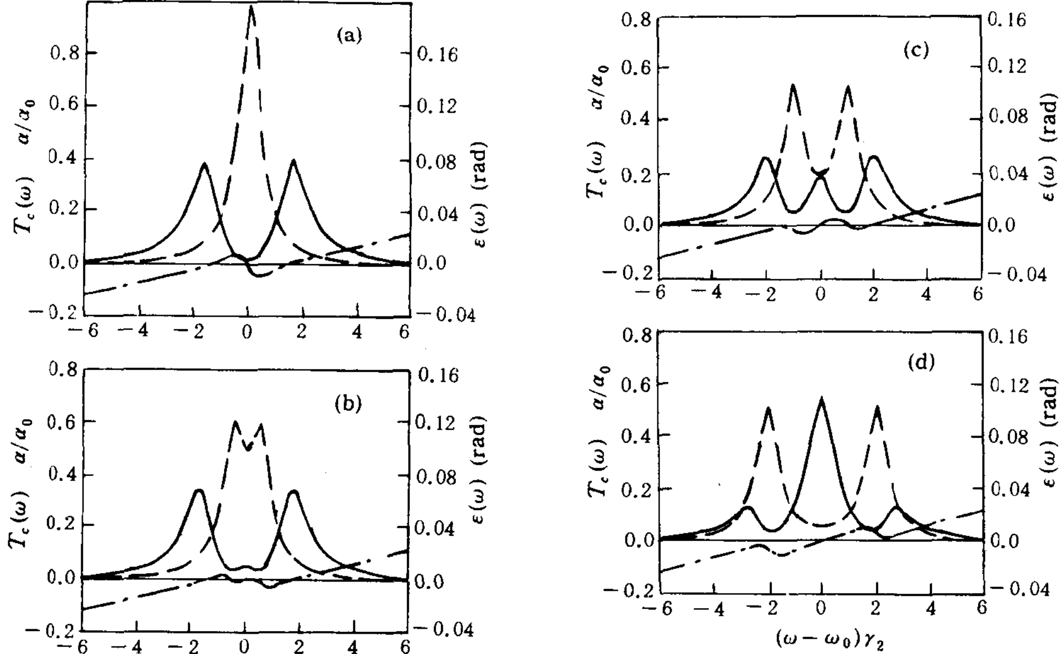


图 7.35 F.P. 腔透过率 $T_c(\omega)$(实线)、相移曲线 $\varepsilon(\omega)/2$(点划线)

以及吸收系数曲线 $\alpha(\omega)$(虚线)

图 (a), (b), (c), (d) 的 g/γ_2 分别为 0, 0.5, 1, 2

(取自谭维翰、刘仁红 [63])

7.10 多原子体系的共振荧光 [73]

单原子体系的共振荧光有两个边峰．而对于多原子体系， Senitzky 曾预测有多个边峰 ($\omega=\omega_0\pm n\Omega, n=1,2,3,\cdots,\Omega$ 为 Rabi 频率)[68,69]．Agarwal 等研究了两原子系统[70~72]，求解了两原子体系的密度矩阵元动力学方程．结果表明，在中等驱动场强度时共振荧光也只有三个峰，当驱动场很强时才会有 $\omega=\omega_0\pm 2\Omega$ 两个新的边峰，但强度很弱，只是中峰的 10^{-6} 倍，在实验上很难观察到．如果考虑偶极 - 偶极相互作用，新增边峰的强度也只达到中峰的 10^{-4} 倍，仍难被探测．推广 Agarwal 结果到多原子体系是困难的，因密度矩阵元的计算太复杂，对角化极不容易．为克服这些困难，可先将原子波函数 $|r,m>$ 耦合起来得到新的耦合波函数 $|R,M>$，然后以 $|R,M>$ 求得密度矩阵 ρ 的不可约表示，按这方法求能量矩阵元及其对角化也就容易了．当考虑到一个原子的辐射又被另一个原子所吸收时，我们发现两个原子系统的荧光谱有 5 个峰 $\omega_0,\omega_0\pm\Omega,\omega_0\pm 2\Omega$，边峰与中峰的强度具有相同的量级．这是应用 Agarwal 方法未能得到的．对于 $T_2/2T_1\ll 1$，即固体情形，五个峰也是很明显的 [21]．频率失谐将会影响光谱的对称性并产生七个峰．

7.10.1 多原子体系的再耦合波函数 [73]

利用多原子体系的耦合波函数 $|r,m>$[70] 再耦合一次，便得再耦合波函数 $\Psi_{RM}=|R,M>$，且有

$$|r,m>|r,-n>=\sum_{R,M}<r,m,r,-n|RM>\Psi_{RM} \tag{7.10.1}$$

$$\Psi_{RM}=\sum_{R,M}<r,m,r,-n|RM>|r,m>|r,-n> \tag{7.10.2}$$

式中， $<r,m,r,-n|RM>$ 为角动量耦合系数 [74]．

参照文献 [70]，原子的密度矩阵 ρ 被定义为

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{m,n}\rho_{m,n}|r,m>|r,-n> \\ &= \sum_{m,n}\rho_{m,n}\sum_{R,M}<r,m,r,-n|RM>\Psi_{RM} \\ &= \sum_{R,M}\phi_{RM}\Psi_{RM}\end{aligned} \tag{7.10.3}$$

式中

$$\phi_{RM}=\sum_{m,n}\rho_{mn}<r,m,r,-n|R,M>=\int\rho\Psi_{RM} \tag{7.10.4}$$

作为一个例子，两个原子系统的 $r=0,1;n=0,\pm1$，故再耦合波函数 $\Psi_{RM}(R=0,1,2,M=0,\pm1,\pm2)$ 可按 Clebsch-Gordan 系数或下降算子 [74] 给出．

7.10.2 多原子体系的动力学方程

现求原子密度矩阵算子 ρ 所满足的动力学方程．多个二能级原子及原子与热浴，与外场的相互作用哈密顿量为

$$\begin{aligned} H &= \hbar\omega_0\sigma^+\sigma^- + H_d + H_i \\ &= \hbar\omega_f\sigma^+\sigma^- + \hbar(\omega_0-\omega_f)\sigma^+\sigma^- + H_d + H_i \end{aligned} \tag{7.10.5}$$

$$H_d = \hbar g(\sigma^+ e^{-i\omega_f t} + \sigma^- e^{i\omega_f t})$$

$$H_i = -i\hbar[\sigma^+ \sum_k g_k b_k^- e^{-i\omega_k t} - \sigma^- \sum_k g_k^* b_k^+ e^{i\omega_k t}] \tag{7.10.6}$$

式中，H_d 为原子与外场的偶极相互作用，H_i 为原子与热浴的相互作用，ω_f 为外场的频率，ω_0 为原子的跃迁频率. 设 $\Delta\omega = \omega_0 - \omega_f$, 则

$$\frac{d\sigma^{\pm}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H,\sigma^{\pm}] = \pm i\omega_f\sigma^{\pm} + \frac{i}{\hbar}[H',\sigma^{\pm}] \tag{7.10.7}$$

式中

$$H' = H_d + H_i + \hbar\Delta\omega\sigma^+\sigma^- \tag{7.10.8}$$

故有

$$\frac{dr^{\pm}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H',r^{\pm}], \qquad r^{\pm} = \sigma^{\pm}e^{\mp i\omega_f t} \tag{7.10.9}$$

现计算在 $r^{\pm}$ 表象中 H_i 与 $\hbar\Delta\omega\sigma^+\sigma^- + H_d$ 对密度矩阵算子的影响. 参照文献 [44], 定义原子系统在 H_i 作用下随时间的演化算子为 $u(t)$, 且

$$i\frac{d}{dt}u(t) = H_i(t)u(t), \qquad u(0)=1$$

$$u(\Delta t) = 1 + u_1(\Delta t) + u_2(\Delta t)$$

$$u_1(\Delta t) = \frac{1}{i\hbar}\int_0^{\Delta t} dt' H_i(t')$$

$$u_2(\Delta t) = \frac{-1}{\hbar^2}\int_0^{\Delta t} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 H_i(t_1)H_i(t_2) \tag{7.10.10}$$

式中

$$H_i = -i\hbar[r^+ \sum_k g_k b_k^- e^{i(\omega_f-\omega_k)t} - r^- \sum_k g_k^* b_k^+ e^{-i(\omega_f-\omega_k)t}] \tag{7.10.11}$$

在 t 时，包括多原子与热浴在内的密度算子 $\tilde{\rho}(t)$ 可定义为

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t) &= \rho(t)|0>_{IB}\,|1>_{IIB} \\ &= \sum_{m,n}\rho_{mn}(t)|r,m>_I\,|r,-n>_{II}\,|0>_{IB}\,|1>_{IIB} \end{aligned} \tag{7.10.12}$$

式中 $|0>_{IB}\,|1>_{IIB}$ 为热浴初态，而在 $t+\Delta t$ 时的密度算子 $\tilde{\rho}(t+\Delta t)$ 则可写为

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(t+\Delta t) &= \sum_{m,n}[1+u_{I1}(\Delta t)+u_{I2}(\Delta t)]\times[1+u_{II1}(\Delta t)+u_{II2}(\Delta t)] \\ &\quad \times\sum_{m,n}\rho_{mn}(t)|r,m>_I\,|r,-n>_{II}\,|0>_{IB}\,|1>_{IIB} \end{aligned} \tag{7.10.13}$$

式中，u_I, u_{I2} 与 u_{II1}, u_{II2} 分别作用于 $|r,m>_I\,|0>_{IB}$ 与 $|r,-n>_{II}\,|1>_{IIB}$. 令

$$\tilde{\rho}(t+\Delta t) - \tilde{\rho}(t) = [\rho(t+\Delta t)-\rho(t)]|1>_{IB}\,|0>_{IIB} \tag{7.10.14}$$

将 (7.10.12), (7.10.13) 式代入 (7.10.14) 式，便得

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho}(t+\Delta t)-\tilde{\rho}(t) &= \textstyle\sum_{m,n}\rho_{mn}(t)[u_{I1}(\Delta t)u_{II1}(\Delta t)+u_{I2}(\Delta t)+u_{II2}(\Delta t)] \\
&\quad \times|r,m>_I\,|r,-n>_{II}\,|0>_{IB}\,|1>_{IIB}
\end{aligned}
\tag{7.10.15}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
\rho(t+\Delta t)-\rho(t) = &- r_I^- r_{II}^+\int_0^{\Delta t}\sum_{k'} g_{k'}^* e^{i(\omega_k-\omega_f)t_1}dt_1\int_0^{\Delta t}\sum_k g_k e^{i(\omega_k-\omega_f)t_2}dt_2\rho(t) \\
&- (r_I^+ r_I^- + r_{II}^- r_{II}^+)\int_0^{\Delta t}dt_1\int_0^{t_1}dt_2\sum_k g_k^2 e^{i(\omega_k-\omega_f)(t_1-t_2)}\rho(t)
\end{aligned}
\tag{7.10.16}
$$

经过较复杂的计算后，我们得因相互作用 H_i 产生的密度算子变率 $\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{H_i}$

$$
\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{H_i} = -\gamma(2r_I^- r_{II}^+ + r_I^+ r_I^- + r_{II}^- r_{II}^+)\rho \tag{7.10.17}
$$

式中，2γ 为单原子的自发辐射系数 A. 用同样方法可计算出 $\hbar\Delta\omega\sigma^+\sigma^- + H_d = \hbar\Delta\omega r^+ r^- - \hbar g(r^+ + r^-)$产生的影响为

$$
\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{\hbar\Delta\omega r^+ r^- + H_d} = -i\Delta\omega(r_I^+ r_I^- + r_{II}^+ r_{II}^-)\rho - ig(r_I^+ + r_{II}^+ + r_I^- + r_{II}^-)\rho \tag{7.10.18}
$$

将 (7.10.17), (7.10.18) 两式结合在一起，便得多原子体系密度算子 ρ 所满足的动力学方程

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} &= -\gamma(2r_I^- r_{II}^+ + r_{II}^- r_{II}^+ + r_I^+ r_I^-)\rho \\
&\quad -ig(r_I^+ + r_{II}^+ + r_I^- + r_{II}^-)\rho - i\Delta\omega(r_I^+ r_I^- + r_{II}^+ r_{II}^-)\rho
\end{aligned}
\tag{7.10.19}
$$

注意到关系

$$
\begin{aligned}
r^+ r^- &= \tfrac{1}{2}(r^+ r^- - r^- r^+) + \tfrac{1}{2}(r^+ r^- + r^- r^+) = r_z + \tfrac{1}{2} \\
R^\pm &= r_I^\pm + r_{II}^\pm, \qquad R_z = r_{zI} + r_{zII}
\end{aligned}
\tag{7.10.20}
$$

并作变换 $\rho \to \rho e^{-i\Delta\omega t}$, 则方程 (7.10.19) 可写为

$$
\frac{d\rho}{dt} = -\gamma(2r_I^- r_{II}^+ + +r_{II}^- r_{II}^+ + r_I^+ r_I^-)\rho - ig(R^+ + R^-)\rho - i\Delta\omega R_z\rho \tag{7.10.21}
$$

式中， $g = \mu E_0/\hbar = \Omega/2$.

7.10.3 原子的受激辐射对原子间 (合作) 相互作用的影响

影响原子间 (合作) 相互作用的不仅有自发辐射与外场，原子间的受激辐射也是有影



图 7.36 两原子系统的相互作用

(取自 Tan Weihan and Gu Min [73])

响的. 如图 7.36 所示，原子 1 在外场 E_0 作用下产生了受激辐射 E', E' 又作为一个新的外场作用在原子 2 上. 设

$$E' = \alpha_s E_0(r_1^+ r_1^- - r_1^- r_1^+) \tag{7.10.22}$$

式中， E_0 为外场振幅，因子 $r_1^+ r_1^- - r_1^- r_1^+$ 为原子 1 的反转粒子数， α_s 为受激辐射系数，与原子密度有关. 两原子相干自发辐射几率 [25] 较两原子自发辐射几率多一个因子 $[1+\sin(2k\Delta)\cos\delta/(2k\Delta)]$[75]. 按 Einstein 系数 A 与 B 成比例的关系，靠得很近的两原子的受激辐射几率将是离得很远的两原子受激辐射几率的 $[1+\sin(2k\Delta)\cos\delta/(2k\Delta)]$ 倍，故 $\alpha_s(r_1^+ r_1^- - r_1^- r_1^+)$ 的值可按

$$\frac{\sin(2k\Delta)}{2k\Delta}\cos\delta \simeq \cos\delta$$

来估算. 当初始相位 δ 在 $0\sim\pi$ 间变化时， $\alpha_s(r_1^+ r_1^- - r_1^- r_1^+)$ 的值将在 $-1\sim 1$ 间变化. 由 E' 作用于原子 2 上的相互作用能为 H_I'

$$\begin{aligned} H_I' =& -\hbar\alpha_s E_0\mu[(r_1^+ r_1^- - r_1^- r_1^+)r_2^+ + r_2^-(r_1^+ r_1^- - r_1^- r_1^+)] \\ & -\hbar\alpha_s E_0\mu[r_2^+(r_1^+ r_1^- - r_1^- r_1^+) + (r_1^+ r_1^- - r_1^- r_1^+)r_2^-] \end{aligned} \tag{7.10.23}$$

式中， r_1, r_2 分别作用于原子 1 与 2. H_I' 的这种形式已经考虑了它的厄米性质. 用同样方法，可得出由原子 2 的受激辐射作用于原子 1 的相互作用能 H_I'', 只需将 (7.10.23) 式的 1,2 脚标对换就可以了. 将这两项加起来，便得

$$H_I^{(1)} = H_I' + H_I'' \tag{7.10.24}$$

注意到关系式

$$\begin{gathered} r^\pm = r_1^\pm + r_2^\pm \\ r_i^- r_i^+ r_i^+ = r_i^- r_i^- r_i^+ = 0, \qquad i = 1,2 \end{gathered} \tag{7.10.25}$$

增加的偶极相互作用 $H_I^{(1)}$ 为

$$H_I^{(1)} = -\hbar\alpha_s g[r_z(r^+ + r^-) + (r^+ + r^-)r_z] \tag{7.10.26}$$

而总的电偶极相互作用为

$$H_D = \hbar g(r^+ + r^-) - \hbar\alpha_s g[r_z(r^+ + r^-) + (r^+ + r^-)r_z] \tag{7.10.27}$$

式中，第一项为激光场 E_0 与原子的相互作用能，第二项正比于 α_s, E_0 则是原子间的受激辐射引起的. 虽然 (7.10.27) 式是就两原子导出来的，但易于推广到多原子，只需应用关系 $r^\pm = \sum_{i=1}^N r_i^\pm$.

在推导方程 (7.10.21) 时，并未考虑到原子间的受激辐射的影响. 若考虑到这一点，则 (7.10.18) 式中的 H_d 应该用 (7.10.27) 式的 H_D 代替，于是 (7.10.21) 式可写为

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} =& -\gamma(r_I^+ r_I^- + r_{II}^- r_{II}^+ + 2r_I^- r_{II}^+)\rho - ig(R^+ + R^-)\rho \\ & -i\alpha_s g[r_{zI}(r_I^+ + r_I^-) - (r_{II}^+ + r_{II}^-)r_{zII} \\ & +(r_I^+ + r_I^-)r_{zI} - r_{zII}(r_{II}^+ + r_{II}^-)]\rho - i\Delta\omega R_z\rho \end{aligned} \tag{7.10.28}$$

设

$$
\begin{gathered}
H_1 = r_I^+ r_I^- + r_{II}^- r_{II}^+ + 2r_I^- r_{II}^+ \\
H_2 = R^+ + R^- \\
H_3 = r_{zI}(r_I^+ + r_I^-) - (r_{II}^+ + r_{II}^-)r_{zII} + (r_I^+ + r_I^-)r_{zI} - r_{zII}(r_{II}^+ + r_{II}^-) \\
H_4 = R_z
\end{gathered}
\tag{7.10.29}
$$

则

$$
H' = \gamma H_1 + igH_2 + i\alpha_s g H_3 + i\Delta\omega H_4 \tag{7.10.30}
$$

方程 (7.10.28) 变为

$$
\frac{d\rho}{dt} = -H'\rho \tag{7.10.31}
$$

应用 (7.10.3) 式，则多原子系统的动力学方程可写成

$$
\frac{d\phi_{RM}}{dt} = -\sum_{R'M'} < R, M|H'|R', M' > \phi_{R'M'} - \gamma_h(1 - \delta_{M,0})\phi_{RM} \tag{7.10.32}
$$

为了研究横向驰豫，在 (7.10.32) 式中我们唯象地引进了 γ_h，它与 T_2, T_1 的关系为

$$
\gamma_h + \gamma = 1/T_2, \qquad 2\gamma = 1/T_1
$$

作为一个例子，以两原子系统的再耦合波函数为基础，则 H' 的矩阵为

$$
\mathrm{H}' = \begin{bmatrix}
2\gamma + i2\Delta\omega & i2g & 0 & 0 & 0 & i2\alpha_s g & 0 & 0 & 0 \\
i2g & 5\gamma + i\Delta\omega & i\sqrt{6}g & 0 & 0 & -3\gamma & -i\sqrt{2}\alpha_s g & 0 & 0 \\
0 & i\sqrt{6}g & 6\gamma & i\sqrt{6}g & 0 & -i\sqrt{6}\alpha_s g & -2\sqrt{3}\gamma & -i\sqrt{6}\alpha_s g & 0 \\
0 & 0 & i\sqrt{6}g & 5\gamma - i\Delta\omega & i2g & 0 & -i\sqrt{2}\alpha_s g & -3\gamma & 0 \\
0 & 0 & 0 & i2g & 2\gamma - i\Delta\omega & 0 & 0 & i2\alpha_s g & 0 \\
i2\alpha_s g & \gamma & -i\sqrt{6}\alpha_s g & 0 & 0 & \gamma + i\Delta\omega & i\sqrt{2}g & 0 & 0 \\
0 & -i\sqrt{2}\alpha_s g & 2\gamma/\sqrt{3} & -i\sqrt{2}\alpha_s g & 0 & i\sqrt{2}g & 2\gamma & i\sqrt{2}g & -8\gamma/\sqrt{6} \\
0 & 0 & -i\sqrt{6}\alpha_s g & \gamma & i2\alpha_s g & 0 & i\sqrt{2}g & \gamma - i\Delta\omega & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \tag{7.10.33}
$$

波函数的排列次序为 $\Psi_{22}, \Psi_{21}, \cdots, \Psi_{00}$. 以 Ψ_{RM} 为基，H_1 有对角矩阵元 $< R, M|H_1|R, M >= 2[(R+1)R - M^2] < R||H_1||R >$，而在 Ψ_{2i}, Ψ_{1i} 间有交叉矩阵元 (具有因子 γ). H_2, H_4 不为 0 的矩阵元分别为

$$
\begin{aligned}
< R, M|H_2|R', M' > \; = \; & \sqrt{(R-M)(R+M+1)}\delta_{R,R'} \cdot \delta_{M,M'-1} \\
& + \sqrt{(R+M)(R-M+1)}\delta_{R,R'} \cdot \delta_{M,M'+1}
\end{aligned} \tag{7.10.34}
$$

$$
< R, M|H_4|R', M' >= M\delta_{R,R'} \cdot \delta_{M,M'} \tag{7.10.35}
$$

所有交叉矩阵元将确定了第二共振荧光边峰的强度. 如果略去 H_3 的交叉矩阵元，我们便回到 Agarwal 讨论的两原子共振荧光的情形. 若将 Ψ_{2i} 与 Ψ_{1i} 间的耦合矩阵元略去，我们便回到单原子 $\Psi_{1\pm1}, \Psi_{10}$ 满足的 Bloch 方程.

7.10.4 两原子的共振荧光谱

以再耦合波函数为基，求解两原子动力学方程 (7.10.32),(7.10.33), 并应用量子回归定理，最后计算出两原子系统的共振荧光谱 [73].

数值计算结果如下.

1. 共振情形 ($\Delta\omega = 0$)

(1) 取 $T_2/2T_1 = 1$, 这对应于无碰撞情形 $\gamma_h = 0$. 若取 $\alpha_s = 0, \alpha = \alpha_s\beta = 0$, 荧光谱与文献 [70] 给出的一致. 与中间的三峰相比, 第二对边峰很弱, 不易观察到. 这是因为 β 很小, 而谱为 Lorentzian 型. 不同 R 间的耦合不能产生强的第二对边峰. 若 $\alpha \neq 0$(见图 7.37), 第二对边峰随着 $|\alpha|$ 的增加逐渐增强. 当 $\alpha = -3$, 边峰的高度已超过了中峰 (图 7.37(a), $\beta = 2.5$). 因 $\alpha = \alpha_s\beta$, 在 α 不变而 β 增加的情况下, $\alpha_s = \alpha/\beta$ 将减小. 这将导

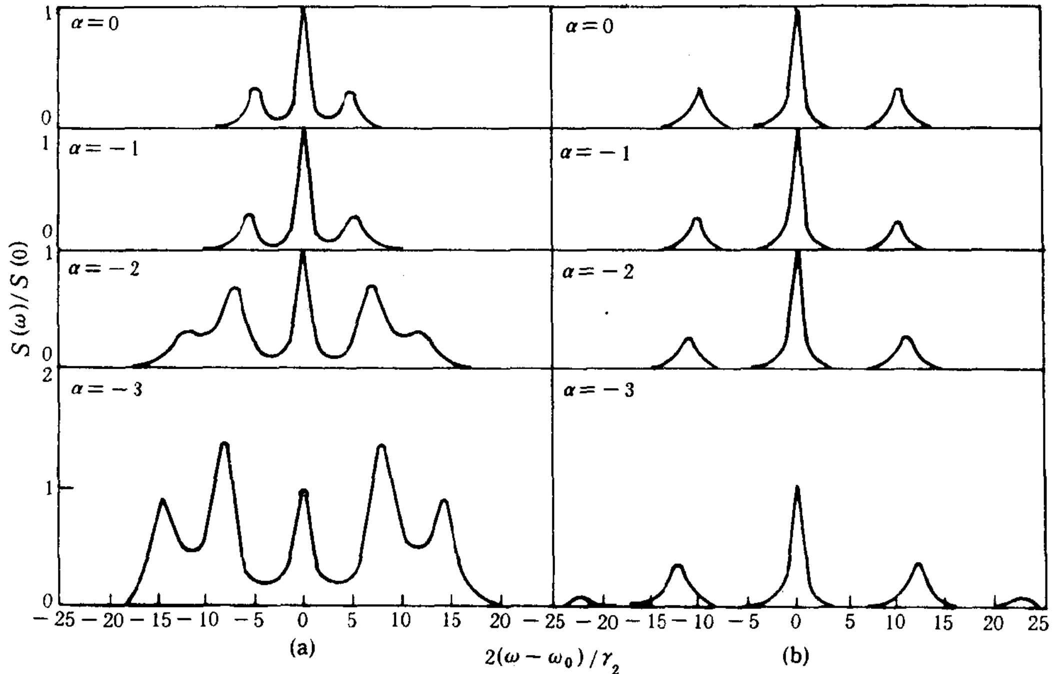


图 7.37 $T_2/(2T_1) = 1$, $\Delta_0 = -1$ 情形的共振荧光谱. (a) $\beta = 2.5$; (b) $\beta = 5.0$ (取自文献 [73])

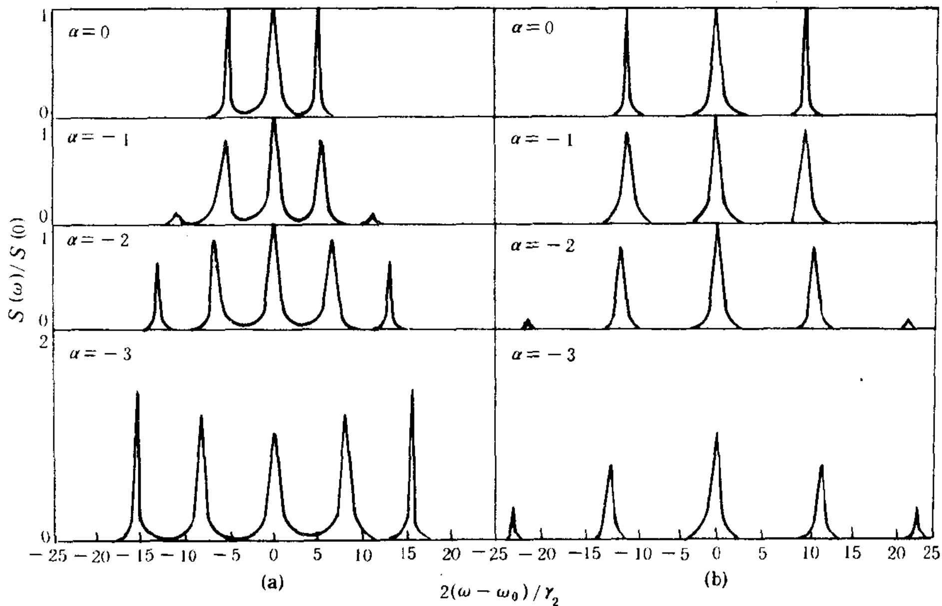


图 7.38 $T_2/(2T_1) \ll 1$, $\Delta_0 = -1$ 情形的共振荧光谱. (a) $\beta = 2.5$; (b) $\beta = 5.0$ (取自文献 [73])

致第二对边峰的减小，此即图 7.37(b) 中 $\beta = 5.0$ 的情形. 注意谱是在稳态情况下计算的， $\Delta_0 = -1, \Delta = -10^{-1} \sim -10^{-2} < 0$, 故有场强 $E' \propto \alpha_s E_0 \Delta > 0$, 亦即两原子的初始相位差 $\delta \simeq 0$, 处于相干自发辐射状态 [76].

(2) $T_2/(2T_1) = 5 \times 10^{-7}$ 对应于固体介质，如红宝石. 随着 $|\alpha|$ 的增加，共振荧光谱的变化情况如图 7.38. 当 $\alpha = 0$, 有三峰结构，当 $\alpha \neq 0$, 出现了较高的第二边峰，而且还出现凹陷光谱 (见图 7.39). 数值计算又表明在某些情况下中峰及第一对边峰，每一峰均由两个小峰构成；但第二对边峰不包含两个小峰.

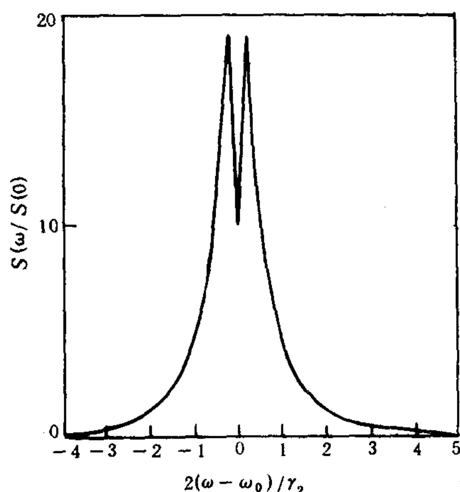


图 7.39 凹陷谱 ($\alpha = -0.02$, $\beta = 0.05$, $\Delta_0 = -1$, $T_2/2T_1 = 5 \times 10^{-1}$)
(取自文献 [73])

2. 偏离共振情形 ($\Delta\omega \neq 0$)

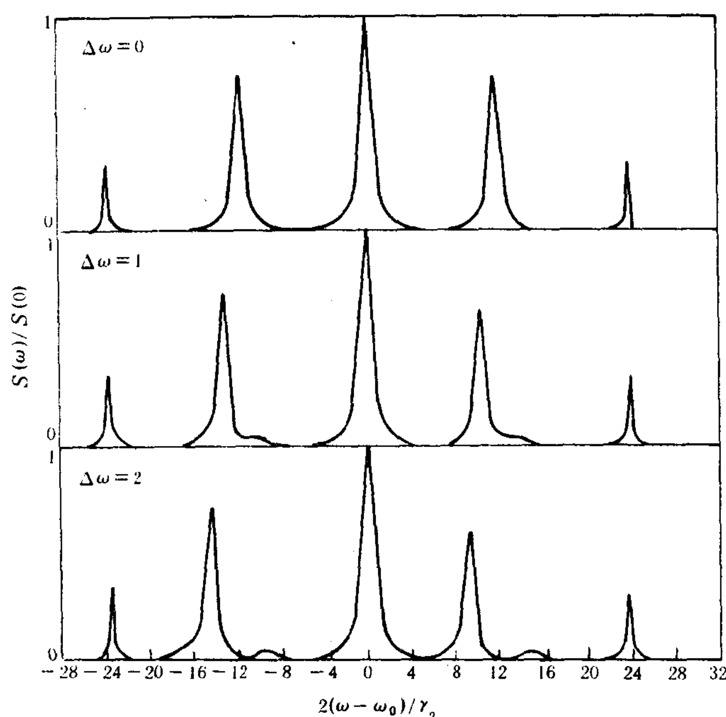


图 7.40 频率失谐对谱的影响 ($\alpha = -3$, $\beta = 5.0$, $\Delta_0 = -1$, $T_2/2T_1 = 5 \times 10^{-7}$)
(取自文献 [73])

当驱动场频率偏离了原子跃迁频率，谱将会是非对称的 (见图 7.40). 当 $\Delta\omega = 1$ 时，第一对边峰中的每一个均分裂为两个，但第二对边峰及中峰未出现这种分裂.

附　录 A

参照文献 [19,20] 及 (7.2.3) 式，探针光与原子相互作用哈密顿量为

$$H' = -\frac{i\hbar\Omega'}{2}(a(t)e^{i\nu t} - a^{+}(t)e^{-i\nu t}) \tag{A1}$$

H' 对密度矩阵 ρ 带来的变化 $\Delta\rho$ 为

$$\Delta\rho = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\rho}{dt}dt = \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t}[H'(t'), \rho]dt' \tag{A2}$$

微扰 H' 对系统的作功率 W' 为

$$W' = \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{tr}[H'(t)\Delta\rho] = \mathrm{tr}\left[\frac{\partial H'(t)}{\partial t}\Delta\rho\right] + \mathrm{tr}[H'(t), [H'(t), \Delta\rho]]/i\hbar \tag{A3}$$

由于 $\mathrm{tr}[H', [H', \Delta\rho]] = 0$, 故当 t 很大时，有

$$\begin{aligned} W' &= \mathrm{tr}\left[\frac{\partial H'(t)}{\partial t}\Delta\rho\right] = \frac{1}{i\hbar}\mathrm{tr}\left[\frac{\partial H'(t)}{\partial t}\int_{-\infty}^{t}[H'(t'), \rho]dt'\right] \\ &= \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t}dt'\mathrm{tr}\left\{\rho\left[\frac{\partial H'(t)}{\partial t}, H'(t')\right]\right\} \\ &= \hbar\nu\left(\frac{\Omega'}{2}\right)^2\int_{-\infty}^{t} < [a(t'), a^{\dagger}(t)] > e^{i\nu(t'-t)}dt' \\ &\simeq \hbar\nu\left(\frac{\Omega'}{2}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty} < [a(t'), a^{\dagger}(t)] > e^{i\nu t'}dt' = \hbar\nu\left(\frac{\Omega'}{2}\right)^2\tilde{g}_a(\nu) \end{aligned} \tag{A4}$$

第八章 激光偏转原子束

1970 年，A.Ashkin 提出用共振光压偏转原子束[1];1975 年，Hänsch 与 Schawlow[2]，Wineland 与 Dehmelt[3] 分别提出激光冷却原子的设想. 近年，Balykin 等提出水晶片原子镜对原子能态起到选择反射的作用[4],Cook 又建议用激光在介质表面的衰波作为反射原子的原子镜[5]. 这些虽大体上可看作激光光压对原子束产生的力学效应，但原子束光学不仅涉及原子在原子镜或驻波栅上的反射、衍射，也还涉及原子内部能态的选择等一系列复杂的问题. 本章将按上面顺序，逐一对这些物理问题进行探讨.

8.1 激光偏转原子束

8.1.1 早期的激光偏转原子束方案

A.Ashikin 最早提出共振光偏转原子束方案 (如图 8.1 所示): 来自 x 方向的光子被二能级原子吸收，便获得动量 $\hbar\vec{k}$, 然后以自发辐射或受激辐射形式释放光子，回到基态. 如果是自发辐射形式辐射出去，其方向在 4π 立体角内均匀分布，给予原子的平均动量为 0, 故原子获得的即吸收光子时的动量 $\hbar\vec{k}$. 如果是按受激辐射方式辐射出光子 $\hbar\vec{k}'$, 而且是沿着 x 方向，则原子获得的净动量为 $\hbar\vec{k}-\hbar\vec{k}'$.Ashkin 建议的共振光压，属于 $\hbar\vec{k}=\hbar\vec{k}'$, 在受激辐射过程获得的净动量为 0, 他也只讨论了通过自发辐射过程原子获得的动量 $\hbar\vec{k}$.

图 8.1 原子吸收光子示意图

考虑到在热平衡情况下，二能级原子处于激发态的几率为

$$f=\frac{n_2}{n_2+n_1}=\frac{B_{12}W}{B_{12}W+A_{21}+B_{21}W}=\frac{\dfrac{g_2}{g_1}B_{21}W}{\dfrac{g_2}{g_1}B_{21}W+A_{21}+B_{21}W}=\frac{x}{1+\dfrac{Ax}{BW(\nu)}} \tag{8.1.1}$$

式中，$A=A_{21}$，$B=\dfrac{g_2}{g_1}B_{21}$,A_{21} 与 B_{21} 为 Einstein 自发与受激辐射系数；$W(\nu)$ 为辐射的能密度，在热平衡情况下，即 (6.1.18) 式表示的 $u(\omega,T)$. $x=\dfrac{1}{1+g_2/g_1}$，g_1、g_2 分别为 1,2 能级简并度. 又设激发态原子的自发辐射寿命为 τ_N, 则作用于原子的力 $\vec{F}$ 为

$$\vec{F}=\frac{\hbar\vec{k}f}{\tau_N}=\frac{\hbar\vec{k}}{\tau_N}\frac{x}{1+\dfrac{Ax}{BW(\nu)}} \tag{8.1.2}$$

当入射光的谱密度 $W(\nu)$ 很强，以致 $\dfrac{Ax}{BW(\nu)}\ll 1$, 则作用力 $\vec{F}$ 达于饱和值 $\vec{F}_{\rm sat}$

$$\vec{F}_{\rm sat}\simeq\frac{\hbar\vec{k}x}{\tau_N} \tag{8.1.3}$$

(8.1.1)~ (8.1.3) 式即 Ashikin 从原子吸收并自发辐射光子过程得出的作用于原子的力 $\vec{F}$ 的公式. 他还设计了如图 8.2 所示的实验装置，以观察原子束的偏转. 由原子炉出来的

原子束经过窗口射出，激光以垂直于原子束方向作用于原子束，使之在横向加速．当横向速度增大到一定程度，由于 Doppler 效应，激光已是偏离共振相互作用，这就限制了原子的最大偏转．为保持初始时的位置，使得激光束总是与原子运动轨迹成垂直 (见图 8.2)，总是处于共振相互作用地位．设原子的初速为 v_0，且光的谱密度 $W(\nu)$ 很强，以致作用力 F 达到饱和，于是有

$$|\vec{F}_{\text{sat}}| = \left|\frac{\hbar\vec{k}x}{\tau_N}\right| = \frac{mv_0^2}{\rho} \tag{8.1.4}$$

式中，ρ 为速度为 v_0 的原子的轨道半径．以 v_0 运动的粒子与激光束成垂直，没有 Doppler 失谐．对于那些速度为 v_0，但入射方向稍偏离于激光的垂直方向的粒子，设在半径方向的偏离量为 δ，则可证

$$r = \rho + \delta, \qquad \frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} + \frac{3v_0^2}{\rho^2}\delta = 0$$

其解为

$$\delta = \delta_0 \sin\left(\frac{\sqrt{3}v_0 t}{\rho}\right) \tag{8.1.5}$$

这些粒子的速率

$$|\vec{v}| = \left|v_0\vec{e}_\theta + \frac{\sqrt{3}v_0}{\rho}\delta_0\vec{e}_r\right| = v_0\sqrt{1+\frac{3\delta_0^2}{\rho^2}} \simeq v_0$$

因 $\delta_0/\rho \ll 1$，由一点出发，经 $t = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\frac{\rho}{v_0}$ 后又会聚到一点．如图 8.2 所示的装置恰是一个原子速度谱分析器．

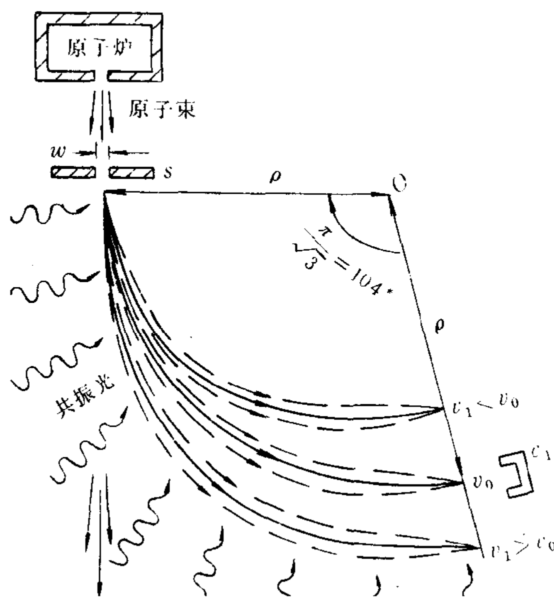


图 8.2 速度分析器

(参照 Ashkin [1])

参照 (6.1.18) 式，$B_{21}W(\nu)$ 可用 Lorentz 线型 $S(\nu)$ 及入射光的强度 $I(\nu_0)$ 表示：

$$B_{21}W(\nu) = A\frac{\pi^2c^3}{\hbar\omega^3}\frac{1}{c}I(\nu_0)S(\nu) = \frac{A\lambda^2}{8\pi\hbar\nu}I(\nu_0)S(\nu)$$

$$S(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\nu_N/2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\nu_N/2)^2} \tag{8.1.6}$$

式中， $\nu_N = \dfrac{1}{2\pi\tau_N}$ 为自然线宽， $A = 1/\tau_N$ 为自发辐射跃迁几率．参照 (8.1.1) 式中 x 的定义，可定义饱和参量 $p(\nu)$

$$BW(\nu) = p(\nu)Ax \tag{8.1.7}$$

于是由 (8.1.6) 式得

$$p(\nu) = \frac{\lambda_0^2(1+\dfrac{g_2}{g_1})I(\nu_0)S(\nu)}{8\pi\hbar\nu} = p(\nu_0)\frac{S(\nu)}{4\tau_N} \tag{8.1.8}$$

现考虑文献 [1] 中例子，用激光照射 Na 原子． Na 的 D_2 共振线 λ_0 = 5890 Å,γ_N = 10.7 MHz.$Na^{23}(I = 3/2)$ 的核自旋使得基态 $3^2S_{1/2}$ 已分裂为 $F = 1$, 2; 激发态 $3^2P_{3/2}$ 分裂为 $F = 0$, 1, 2, 3 的精细结构．跃迁的选择定则为 $\Delta F = \pm 1$, 0. 用圆偏振 (σ^+) 光激发，由基态 $3^2S_{1/2}$，$F = 2$, $m_F = 2$ 到激发态 $3^2P_{3/2}$，$F = 3$, $m_F = 3$. 按选择定则 $\Delta m_F = \pm 1$, 由激发态 $F = 3$, $m_F = 3$ 向任何其它的基态 $F = 1$, 2 的 m_F 子能级跃迁均是禁止的，这样我们便有了一个理想的二能级系统，即 $3^2P_{3/2}$，$F = 3$, $m_F = 3 \to 3^2S_{1/2}$，$F = 2$, $m_F = 2$, $g_2/g_1 = 1$. 按 (8.1.8) 式，并取 $I(\nu_0) = I_0$, 得

$$p(\nu_0) = \frac{I_0(\text{W/cm}^2)}{2.1 \times 10^{-2}} \tag{8.1.9}$$

参见图 8.2, 收集器 C_1 探测再聚束的粒子．非共振作用的样品飞行到 C_2.Na 原子的速度 $v_0 = 2 \times 10^4$ cm/s, 被与 Na 原子的 D_2 线为共振的激光所偏转， $\rho = 4.0$ cm. 由原子炉出来的原子束经过与纸面垂直高度 $\bar{h}$ 的窗口，按 $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\rho\bar{h}$ 计算激光通光面．炉温 510°,Na 原子蒸气压为 10^{-3} torr, 原子密度 $n_0 = 3.4 \times 10^{13}$ 原子 /cm^3, 平均速度 $v_{ar} = (2kT/m)^{1/2} = 6.1 \times 10^4$ cm/s, 平均自由程 L = 30cm. 若将 v_0 设计在 $v_0 = v_{ar}/3 = 2 \times 10^4$ cm/s, 则 (8.1.4) 式定出 $\rho = 4.0$ cm. 又取窗口 $\bar{h} = 0.1$ cm, $p(\nu_0)=10^2$, 则入射激光功率为 1.5 W, 而 $p(\nu)$ 在 $10 \sim 10^2$ 间调变．对应于原子束角度 ±2.6°, 因速度 v_0 与轨道成 ±2.6° 运动的原子，将产生 $\nu - \nu_0 = 1.5\nu_N$ 的 Doppler 频移，即 $p(\nu) = 10$. 取定窗口宽度，高度 w, $\bar{h}$ 分别为 0.04 cm, 0.1cm, 可估算出通过窗口的原子束流 $\sim 10^8$ 原子 /s, 可作许多实验用的原子束源．如果激光束是分布在球面上，还可获得空间会聚的原子束．

8.1.2 激光作用于原子上的力

在上述讨论的基础上，我们可以更仔细地讨论作用于原子上的力．这个力 $\vec{F}(\vec{r},\vec{v})$ 可表示为 [6~10]

$$\vec{F}(\vec{r},\vec{v}) = \nabla\vec{E}\cdot\vec{\mu}(\rho_{ab} + \rho_{ba}) \tag{8.1.10}$$

即作用于原子的力为场的梯度与原子极化的标积．参照 (2.5.19) 式，在共振光的作用下，单原子的极化为

$$\vec{p}^{\,(1)} = \vec{\mu}(\rho_{ab} + \rho_{ba}) = i\frac{\mu^2}{\hbar}\frac{\vec{E}}{\gamma_2}$$

代入 (8.1.10) 式，得

$$\vec{F}(\vec{r},\vec{v}) = i\frac{\mu^2}{\hbar\gamma_2}\vec{E}\cdot\nabla\vec{E} \tag{8.1.11}$$

式中，i 表示 $\vec{p}^{(1)}$ 相对于 $\vec{E}$ 有 $\pi/2$ 角的相移. 将这个力与电磁波对自由电子有质动力 $\vec{F}_p = -\frac{-2e^2}{m\omega^2}\vec{E}\cdot\nabla\vec{E}$ 进行比较 [9], 得

$$\frac{|\vec{F}_p|}{|\vec{F}|} = \frac{2e^2}{m\omega^2}\frac{\hbar\gamma_2}{\mu^2} = \frac{2\gamma_2}{\omega}\frac{a^2}{r_{ab}^2} \tag{8.1.12}$$

式中，$a^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ 为氢原子的玻尔半径；r_{ab} 为 a, b 能级间的跃迁矩阵元；γ_2 为横弛豫系数. 一般地来说，由于 $\gamma_2/\omega \ll 1$, 故偶极作用力 $\vec{F}$ 要比 $\vec{F}_p$ 大得多.

现按 (5.1.28) 式计算密度矩阵元 ρ_{ab}, 得

$$\rho_{ab} = \frac{i\mu}{\hbar}\sum_n \left\{ \frac{E_n u_n \Delta}{\frac{1}{T_2} + i(\omega_0 - kv - \omega_n)} + \frac{E_n u_n \Delta}{\frac{1}{T_2} + i(\omega_0 + kv - \omega_n)} \right\} e^{-i(\omega_n t + \phi_n)} \tag{8.1.13}$$

式中，n 为模式指标，如果是单模，则 n 以及对 n 的求和可略去. 为简化起见，将相位 ϕ_n 去掉，并分两种情形计算光压作用于电偶极的力 $\vec{F}$. 一种情形是行波场：

$$\begin{aligned} &u = e^{ikz} \\ &\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ikz - i\omega t} + c.c = 2\vec{E}_0\cos(\omega t - kz) \\ &\nabla\vec{E} = 2\vec{k}\vec{E}_0\sin(\omega t - kz) \end{aligned} \tag{8.1.14}$$

由于 Doppler 效应，以速率 v 向前运动的原子所见到的场的频率为 $\omega + kv$, 于是

$$\vec{\mu}(\rho_{ab} + \rho_{ba}) = \frac{i\mu^2}{\hbar}\vec{E}_0\Delta\frac{e^{-i(\omega t - kz)}}{\frac{1}{T_2} + i(\omega_0 - kv - \omega)} + c.c \tag{8.1.15}$$

将 (8.1.14) 和 (8.1.15) 式代入 (8.1.10) 式，便得

$$\begin{aligned} \vec{F}(z,v,t) &= \frac{4T_2\mu^2E_0^2\Delta\vec{k}}{\hbar}\sin(\omega t - kz) \\ &\times [T_2(\omega_0 - kv - \omega)\cos(\omega t - kz) + \sin(\omega t - kz)]\, L(\omega_0 - kv - \omega) \\ L(\omega_0 - kv - \omega) &= \frac{(\frac{1}{T_2})^2}{(\frac{1}{T_2})^2 + (\omega_0 - kv - \omega)^2} \end{aligned} \tag{8.1.16}$$

对时间求平均，得

$$< \vec{F}(z,v,t) > = \frac{2T_2\mu^2E_0^2\Delta\vec{k}}{\hbar}L(\omega_0 - kv - \omega) \tag{8.1.17}$$

式中的粒子数反转 Δ, 可参照 (5.1.18), (5.1.19) 式，得

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{1 + 2T_1R}, \quad R = \frac{2E_0^2\mu^2}{\hbar^2}T_2L(\omega_0 - kv - \omega) \tag{8.1.18}$$

引进参量 $G = \frac{2E_0^2\mu^2}{\hbar^2}T_2^2$, 并注意到 $2T_1 = T_2$, 则行波场 e^{ikz} 作用于原子的力为

$$< \vec{F}(z,v,t) > = \frac{\hbar\vec{k}}{T_2}G\frac{L(\omega_0 - kv - \omega)\Delta_0}{1 + GL(\omega_0 - kv - \omega)} \tag{8.1.19}$$

现考虑驻波情形：

$$
\begin{aligned}
u &= e^{ikz} + e^{-ikz} \\
\nabla \vec{E} &= 2\vec{k}\vec{E}_0[\sin(\omega t - kz) - \sin(\omega t + kz)] \\
&= -4\vec{k}\vec{E}_0 \cos \omega t \sin kz
\end{aligned} \tag{8.1.20}
$$

ρ_{ab} 仍按 (8.1.13) 式计算. 经过与行波场类似的运算，最后得

$$
< \vec{F}(z,v,t) >= \vec{F}_{sp} + \vec{F}_{ind} \tag{8.1.21}
$$

$$
\vec{F}_{\rm sp} = \frac{2\hbar\vec{k}}{T_2} \frac{G\left[L(\omega_0 - kv - \omega) - L(\omega_0 + kv - \omega)\right]\Delta_0}{1 + G[L(\omega_0 - kv - \omega) + L(\omega_0 + kv - \omega)]} \sin^2 kz \tag{8.1.22}
$$

$$
\vec{F}_{\rm ind} = \frac{\hbar\vec{k}G\left[(\omega_0 - kv - \omega)L(\omega_0 - kv - \omega) + (\omega_0 + kv - \omega)L(\omega_0 + kv - \omega)\right]\Delta_0}{1 + G(L(\omega_0 - kv - \omega) + L(\omega_0 + kv - \omega))} \sin 2kz \tag{8.1.23}
$$

$\vec{F}_{\rm sp}$，$\vec{F}_{\rm ind}$ 分别为自发辐射力与感生力，$\vec{F}_{\rm sp} \propto 1/T_2$，而 $\vec{F}_{\rm ind} \propto (\omega_0 - kv - \omega)$ 与 $(\omega_0 + kv - \omega)$. 由 (8.1.19) 式，行波情形的作用力 $\propto \dfrac{1}{T_2}$，属自发辐射力，与 (8.1.2) 式同，但数值上有些差异，主要是两者物理模型不一样引起的.

8.1.3 原子在速度空间的扩散

上面讨论了辐射场作用于原子的力. 原子在力 $\vec{F}$ 作用下，将沿一确定的轨道作有规运动. 但除了这一运动外，原子还会因在速度空间的分布不均 (即存在速度梯度) 而产生扩散. 这就需要对密度矩阵所满足的运动方程 (5.1.2) 和 (5.1.5) 式作进一步分析，特别是在导出这些方程时，并没有考虑光量子在被原子辐射或吸收时对原子的反冲速度 $V_r = \dfrac{\hbar\vec{k}}{M}$. 在考虑到这些因素后，适用于二能级原子气体的输运方程为 [11]

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho_{ab}(z,v,t) = &-\left(i\omega_0 + \frac{1}{T_2}\right)\rho_{ab}(z,v,t) \\
&- \frac{i\mu}{\hbar}E(\vec{r},t)\left[\rho_{aa}\left(z, v - \frac{V_r}{2}, t\right) - \rho_{bb}\left(z, v + \frac{V_r}{2}, t\right)\right]
\end{aligned} \tag{8.1.24}
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho_{aa}(z,v,t) = \lambda_a - \gamma_a\rho_{aa}(z,v,t) - \frac{i\mu}{\hbar}E(\vec{r},t)\left[\rho_{ab}\left(z, v + \frac{V_r}{2}, t\right) - \rho_{ba}\left(z, v + \frac{V_r}{2}, t\right)\right] \tag{8.1.25}
$$

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho_{bb}(z,v,t) = \lambda_b - \gamma_b\rho_{bb}(z,v,t) + \frac{i\mu}{\hbar}E(\vec{r},t)\left[\rho_{ab}\left(z, v - \frac{V_r}{2}, t\right) - \rho_{ba}\left(z, v - \frac{V_r}{2}, t\right)\right] \tag{8.1.26}
$$

式中， V_r 为原子与辐射场交换一个光量子所获得的反冲速度； $\lambda_b(z,v,t)$, $\lambda_a(z,v,t)$ 分别为原子被抽运到基态、激发态的速率； γ_b, γ_a 分别为基态、激发态的阻尼系数， $\dfrac{1}{T_2} = \dfrac{1}{2}(\gamma_a + \gamma_b)$. (8.1.24) 式的解仍可近似写为 (8.1.13) 的形式，反转粒子数密度 Δ 由下式给出：

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \rho_{aa}\left(z, v - \frac{V_r}{2}, t\right) - \rho_{bb}\left(z, v + \frac{V_r}{2}, t\right) \\
&= \rho_{aa}(z,v,t) - \rho_{bb}(z,v,t) - \frac{V_r}{2}\frac{\partial}{\partial z}[\rho_{aa}(z,v,t) + \rho_{bb}(z,v,t)]
\end{aligned} \tag{8.1.27}
$$

而

$$
\rho_{ab}\left(z, v \pm \frac{V_r}{2}, t\right) - \rho_{ba}\left(z, v \pm \frac{V_r}{2}, t\right) = \left(1 \pm \frac{V_r}{2}\frac{\partial}{\partial v}\right)[\rho_{ab}(z,v,t) - \rho_{ba}(z,v,t)] \tag{8.1.28}
$$

将 (8.1.27) 式代入 (8.1.13) 式便得 ρ_{ab}, 进一步求出

$$\frac{i\mu E(\vec{r},t)}{\hbar}\left\{\rho_{ab}(z,v,t)-\rho_{ba}(z,v,t)\right\}=R\left\{\rho_{aa}-\rho_{bb}-\frac{V_r}{2}\frac{\partial}{\partial v}(\rho_{aa}+\rho_{bb})\right\} \tag{8.1.29}$$

于是将 (8.1.28), (8.1.29) 式代入 (8.1.25), (8.1.26) 式后，得

$$\dot{\rho}_{aa}\simeq\lambda_a-\gamma_a\rho_{aa}-R\left(1+\frac{V_r}{2}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left\{\rho_{aa}-\rho_{bb}-\frac{V_r}{2}\frac{\partial}{\partial v}(\rho_{aa}+\rho_{bb})\right\} \tag{8.1.30}$$

$$\dot{\rho}_{bb}\simeq\lambda_b-\gamma_b\rho_{bb}+R\left(1-\frac{V_r}{2}\frac{\partial}{\partial v}\right)\left\{\rho_{aa}-\rho_{bb}-\frac{V_r}{2}\frac{\partial}{\partial v}(\rho_{aa}+\rho_{bb})\right\} \tag{8.1.31}$$

对于定态 $\dot{\rho}_{aa}=\dot{\rho}_{bb}=0$, 取定

$$N=\frac{\lambda_a}{\gamma_a}-\frac{\lambda_b}{\gamma_b},\qquad R_s=\frac{\gamma_a\gamma_b}{\gamma_a+\gamma_b} \tag{8.1.32}$$

将 (8.1.30), (8.1.31) 两式相减，并设 $\gamma_a\simeq\gamma_b$, 便得

$$\rho_{aa}-\rho_{bb}=\frac{N+\dfrac{R}{R_s}\dfrac{V_r}{2}\dfrac{\partial}{\partial v}(\rho_{aa}+\rho_{bb})}{1+R/R_s} \tag{8.1.33}$$

这个结果即为考虑到光子对原子反冲作用后的 (5.1.18), (5.1.19) 式. $N=N(z,v,t)$ 为不计光场作用时的初始反转粒子数，即 (8.1.18) 式中的 Δ_0; $\dfrac{R}{R_s}\dfrac{V_r}{2}\dfrac{\partial}{\partial v}(\rho_{aa}+\rho_{bb})$ 为计及光子对原子的反冲后带来的修正.

对于处于平衡态附近的非定态，可定义为光泵浦抽运与原子的阻尼达到平衡，即

$$\lambda_a+\lambda_b-\gamma_a\rho_{aa}-\gamma_b\rho_{bb}=0 \tag{8.1.34}$$

于是由 (8.1.30), (8.1.31) 两式相加得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+v\frac{\partial}{\partial z}\right)(\rho_{aa}+\rho_{bb})\simeq\frac{-RV_r\dfrac{\partial}{\partial v}N+\dfrac{RV_r^2}{2}\dfrac{\partial^2}{\partial v^2}(\rho_{aa}+\rho_{bb})}{1+R/R_s} \tag{8.1.35}$$

式中，N 为不计及光场作用时的反转粒子密度，基本上处于基态，$N=2\rho_{bb}-(\rho_{aa}+\rho_{bb})\simeq-(\rho_{aa}+\rho_{bb})$. 又注意到 (8.1.18), (8.1.17) 式，当 $\Delta_0=-1$ 时，$\Delta=\dfrac{-1}{1+R/R_s}$, 故有

$$V_rR=\frac{\hbar k}{M}\frac{2E_0^2\mu^2}{\hbar^2}T_2L(\omega_0-kv-\omega)=-\frac{F}{M}\left(1+\frac{R}{R_s}\right) \tag{8.1.36}$$

于是 (8.1.35) 式可写为

$$\begin{gathered}W=\rho_{aa}+\rho_{bb}\\ \left(\tfrac{\partial}{\partial t}+v\tfrac{\partial}{\partial z}\right)W=-\tfrac{\partial}{\partial v}\left(\tfrac{F}{M}W+\tfrac{V_r}{2}\tfrac{F}{M}\tfrac{\partial}{\partial v}W\right)\end{gathered} \tag{8.1.37}$$

等式右端第一项为驱动项，第二项为扩散项，一般较小. 因 $W=W(z,v,t)$, 而我们关心的是原子的速度分布，故可对空间坐标 z 求积分，令

$$W(v,t) = \int_{-\infty}^{\infty} W(z,v,t)dz \tag{8.1.38}$$

取规一化

$$\delta = T_2(\omega - \omega_0), \quad T_2 kv \to v, \quad \frac{\hbar k^2}{M} t \to t \tag{8.1.39}$$

在略去扩散项后，$W(v,t)$ 满足如下的方程：

$$\frac{\partial}{\partial t} W(v,t) = \frac{\partial}{\partial v}[A(v)W(v,t)] \tag{8.1.40}$$

参照 (8.1.37),(8.1.19), 式并经规一化，有

$$A(v) = \frac{GL(\omega_0 - kv - \omega)}{1 + GL(\omega_0 - kv - \omega)} = \frac{G}{1 + G + (v+\delta)^2} \tag{8.1.41}$$

(8.1.40) 式可表示为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A(v)\frac{\partial}{\partial v}\right) \ln W(v,t) = \frac{\partial A(v)}{\partial v} \tag{8.1.42}$$

(8.1.42) 式齐次部分的解为

$$c_1 = Gt + (1+G)(v+\delta) + \frac{1}{3}(v+\delta)^3 \tag{8.1.43}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A(v)\frac{\partial}{\partial v}\right) c_1 = 0 \tag{8.1.44}$$

易于求出 $W(v,t)$ 的通解

$$W(v,t) = W(c_1) e^{-\int_{v(c_1)}^{v} \frac{\partial A(v)}{\partial v}/A(v)dv} = \frac{A(v(c_1))}{A(v)} W(c_1) \tag{8.1.45}$$

式中，v 满足 $t=0$ 时的 (8.1.43) 式，而 $v(c_1)$ 满足 $t \neq 0$ 时的 (8.1.43) 式. $v(c_1)$ 的解可表示为

$$\begin{aligned}
&v(c_1) + \delta = \alpha(v,t) + \beta(v,t) \\
&\alpha(v,t) = \left[q^{1/2}(v,t) + \frac{3}{2}c_1(t)\right]^{1/3} \\
&\beta(v,t) = -\left[q^{1/2}(v,t) - \frac{3}{2}c_1(t)\right]^{1/3} \\
&q(v,t) = (1+G)^3 + \frac{9}{4}c_1^2(t) \\
&c_1(t) = c_1 - Gt
\end{aligned} \tag{8.1.46}$$

又设初始分布为平衡分布

$$W(v,0) = g \exp\left\{-4\ln 2\left(\frac{v - v_0}{\Delta v}\right)^2\right\} \tag{8.1.47}$$

则由 (8.1.41), (8.1.43), (8.1.45)~(8.1.47) 式得

$$W(v,t) = g\frac{1 + G + (v+\delta)^2}{1 + G + [\alpha(v,t) + \beta(v,t)]^2} \exp\left\{-4\ln 2\left[\frac{\alpha(v,t) + \beta(v,t) - \delta - v_0}{\Delta v}\right]^2\right\} \tag{8.1.48}$$

式中，g 为归一化因子，选择 g 使得 $W(v,t)$ 满足归一化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(v,t)dv = 1 \tag{8.1.49}$$

上面我们假定了原子的初始速度分布为平衡分布，其速度宽度为 Δv, 峰值在 $v = v_0$, 而解是普适的．当原子与场处于共振相互作用时，其作用力最大．由 (8.1.41) 式给出 $A(v) = \dfrac{G}{1+G}$. 当 $\vec{k}$ 与 $\vec{v}_0$ 同方向时为加速，反方向时为减速．由于加速 (或减速), 使得原子束 $(v = v_0 \pm \Delta v)$ 会很快由共振相互作用进入非共振相互作用 $|v+\delta| \geq \Delta v$, 作用力 $A(v)$ 随之逐渐减小．当然这不仅与原子束流的速度宽度 Δv 有关，还与光的频宽 $\Delta\omega$ 有关． $\Delta\omega$ 愈宽，共振相互作用的时间愈长，反之愈短．易于看出，考虑到激光谱宽后，共振相互作用可定义为 $|v+\delta| \leq \Delta v + \Delta\omega$. 但谱宽 $\Delta\omega$ 增大后，平均功率下降， G 的值也就下降．因此，我们曾提出利用序列脉冲激光 [12] 的光压力，实现对原子的减速与冷却．因为序列脉冲激光包含许多旁频，将中心频率调谐到 Doppler 谱增宽的低频侧，通过适当调整序列脉冲参数，可使其旁频布满了低频侧，从而加宽原子与辐射的共振相互作用区．我们的计算结果表明，采用序列脉冲激光可以更有效地降低原子的速度和动能．要进行这个计算，还要推广作用力的表达式 (8.1.17), (8.1.19), 使之适用于包含多个谐波分量的情形．设

$$\begin{aligned} E &= E_0 F(t,z) e^{-i(\omega t + kz)} + c.c \\ F(t,z) &= e^{-a^2 \sin^2(\Delta\omega t + \Delta k z)} = \sum_{n=0}^{\infty} J_n \cos 2n(\Delta\omega t + \Delta k z) \end{aligned} \tag{8.1.50}$$

式中， $E_0F(t,z)$ 为序列脉冲波包， $F(t,z)$ 为调制函数， $\Delta\omega$ 为调制频率， $\Delta k = \dfrac{\Delta\omega}{c}$, a^2 决定脉冲的半宽度和调制深度 (见图 8.3,a$^2=4$),J_n 为

$$J_0 = e^{-a^2/2} I_0(a^2/2), \qquad J_n = 2e^{-a^2/2} I_n(a^2/2)$$

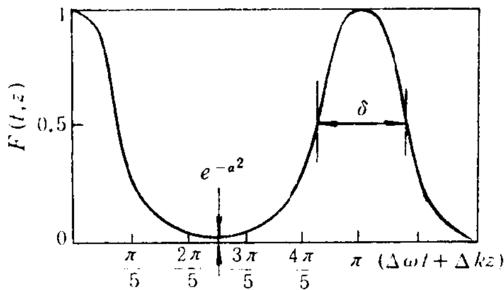


图 8.3 序列脉冲振幅调制函数 $F(t,z)$

(取自栾绍金、谭维翰 [12])

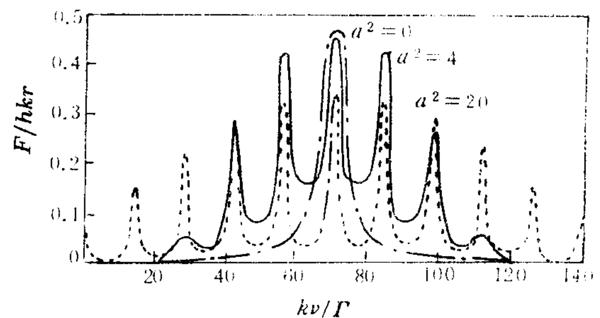


图 8.4 不同脉宽参数 a^2 下光压力速度分布

(取自文献 [12])

表 8.1 调制参量

a^2	1	4	10	20
e^{-a^2}	0.368	1.83×10^{-2}	4.54×10^{-5}	2.06×10^{-9}
$\eta = \dfrac{\delta}{2\pi}$	31.3%	13.7%	8.48%	5.96%

I_n 为虚宗量的 Bessel 函数．表 8.1 给出不同 a^2 值下的调制参数．随着 a^2 的增大，序列脉冲的脉冲宽度和脉冲的最小值减小．当场为 (8.1.50) 式表示的多模场时，重复 (8.1.14)~(8.1.17) 式的推导，得出

$$< \vec{F}(z,v,t) >= \frac{\vec{k}T_2\mu^2E_0^2\Delta}{\hbar}\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\left(1-2n\frac{\Delta k}{k}\right)L(\Delta\omega_n^+)+\left(1+2n\frac{\Delta k}{k}\right)L(\Delta\omega_n^-)\right]J_n^2 \tag{8.1.51}$$

式中

$$\Delta\omega_n^{\pm}=(\omega_0-\omega-kv)\pm 2n(\Delta\omega+\Delta kv)$$

参照 (5.1.18), (5.1.19) 式，多模情形的粒子反转 Δ 为

$$\Delta=\frac{\Delta_0}{1+2T_1R},\quad R=\frac{E_0^2\mu^2}{\hbar^2}T_2\sum_{-\infty}^{\infty}\left[L(\Delta\omega_n^+)+L(\Delta\omega_n^-)\right]J_n^2 \tag{8.1.52}$$

同样引进参数 $G=\dfrac{2E_0^2\mu^2}{\hbar^2}T_2^2$, 将 (8.1.52) 式代入 (8.1.51) 式，得

$$< \vec{F}(z,v,t) >= \frac{\hbar\vec{k}\Delta_0}{2T_2}G\,\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[\left(1-2n\frac{\Delta k}{k}\right)L(\Delta\omega_n^+)+\left(1+2n\frac{\Delta k}{k}\right)L(\omega_n^-)\right]J_n^2}{1+\frac{G}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[L(\Delta\omega_n^+)+L(\Delta\omega_n^-)\right]J_n^2} \tag{8.1.53}$$

用 (8.1.53) 式代替 (8.1.44) 式中的 $A(v)$, 虽然也可求出相应的积分

$$C_1=t+\int\frac{dv}{< \vec{F}(z,v,t) > /M} \tag{8.1.54}$$

但这个解是形式解. 一方面积分求不出来，另一方面也无法通过解方程求解 $v=v(C_1,t)$. 但有了 (8.1.53) 式后，就可按 $A(v)=-\dfrac{< F(z,v,t) >}{M}$ 数值求解 (8.1.40) 式.

图 8.4 给出激光对原子产生的光压力速度分布函数，其中脉宽参数 a^2 分别取 0, 4, 20, 计算时取调制频率 $\Delta\omega=7/T_2$, 激光频率调谐到 $\omega-\omega_0=-\dfrac{70}{T_2}$, 激光强度参数 $\bar{G}$ 为

$$\bar{G}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{G}{2}F^2(t)dt=\frac{G}{2}e^{-a^2}I_0(a^2) \tag{8.1.55}$$

在此取值为 $\bar{G}$=6.7. 对连续激光 ($a^2=0$) 情形，光压力的速度分布具有 Lorentz 线型；而序列脉冲的情形 (即图中 $a^2=4$ 和 $a^2=20$), 光压力速度分布出现多峰结构，并且随着脉冲的变窄，即 a^2 的增大，高级子峰增大，光压力速度分布范围增宽.

图 8.5~8.7 为数值求解 (8.1.40) 式的结果. 计算时取原子初始分布宽度 $\Delta v=80$, 平动速度 $v_0=70$. 原子沿 z 轴的平均平动速度

$$< v >=\int_{-\infty}^{\infty}vW(v,t)dv \tag{8.1.56}$$

原子的平均动能用均方速度表示为

$$< v^2 >=\int_{-\infty}^{\infty}v^2W(v,t)dv \tag{8.1.57}$$

图 8.5 为不同时刻原子的速度分布. 图中实线为 $a^2=4$, 虚线为 $a^2=0$. 激光参数均为 $\bar{G}=10$, 初始条件亦相同. 由图 8.5 看出, 在激光与原子相互作用的初阶段, 原子速度分布函数发生了很复杂的变化. 但是经过一定的时间以后, 原子速度分布函数变窄, 并向低速方向发生了显著的移动. 在相同激光强度条件下, 序列脉冲光压可比连续激光光压更加迅速地使原子速度分布函数发生变化.

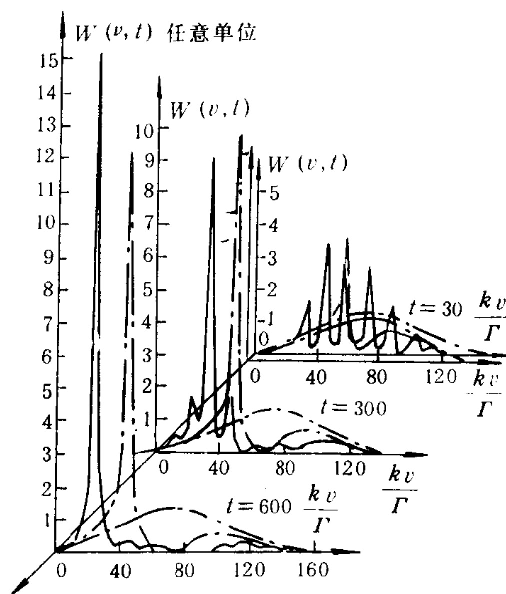


图 8.5 原子的速度分布函数 $W(v,t)$

(取自文献 [12])

图 8.6 、图 8.7 比较了序列脉冲激光和连续激光光压的减速、冷却作用. 图中虚线代表连续激光的作用, 实线代表序列脉冲的作用. 参数为 $a^2=4$, $\Delta\omega=\dfrac{7}{T_2}$, $\omega-\omega_0=\dfrac{70}{T_2}$. 图中的 1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9 各曲线的参数分别为 $\bar{G}=1$, 0.67, 1; 10, 6.7, 10; 100, 67, 100. 可以看出, 当平均功率相同或者下降 1/3, 使用序列脉冲激光对原子的减速和冷却效应都比连续激光有效, $<v>$, $<v^2>$ 均下降得很快.

由上面分析计算表明, 采用序列脉冲激光并适当选择调制函数, 能够获得较宽的光压力分布, 从而比相同功率的连续激光更有效地使原子束冷却或减速. 以 Na 原子 $3^2S_{1/2}$-$3^2P_{3/2}$ 跃迁为例, 不计超精细子能级影响, 取 $\lambda=5890°$, $\dfrac{1}{2\pi T_2}=10$ MHz, 则图 8.6 和图 8.7 所示的 Na 原子初始在激光传播相反方向的平均速度为 4.1×10^4 cm/s, 平均

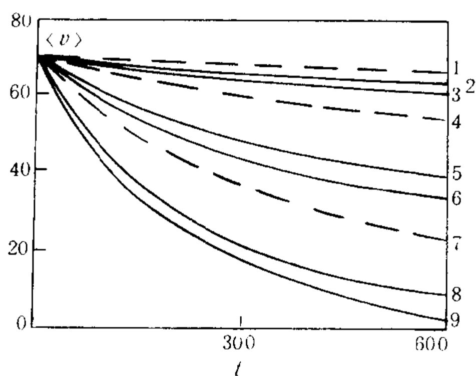


图 8.6 原子的速度平均值 $<v>$ 随时间的变化

(取自文献 [12])

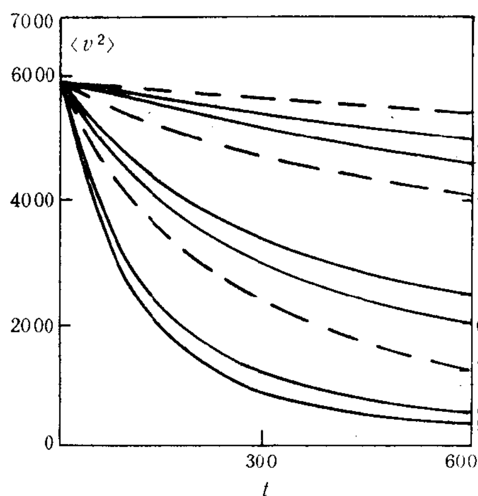


图 8.7 原子的速度平方平均值 $<v^2>$ 随时间的变化

(取自文献 [12])

速度平方为 2.0×10^9 cm^2/s^2. 图中 $\bar{G}=10$, 相应于激光平均强度为 500 mW/cm^2, 无量纲时间 $t=600$, 相当于 1.92 ms. 当采用连续激光, 经过 1.92 ms 后 Na 原子气体在激光传播相反方向的平均速度下降为 3.2×10^4 cm/s, 均方速度下降为 1.4×10^9cm^2/s^2. 如果使用平均强度为 330 mW/cm^2, 重复频率为 70 MHz 的序列脉冲激光经过相同的时间作用

后，平均速度下降为 2.2×10^4 cm/s, 平均速度平方下降为 8.5×10^8 $(\text{cm/s})^2$. 低强度序列脉冲激光也可产生速度分布范围较宽的光压力，不需采用频率扫描就可能使整个原子气体实现深度冷却.

8.2 激光冷却原子与光学粘胶

前一节讨论了，只要激光频率 ω 相对于原子跃迁的频率 ω_0 为红移，即 $\omega-\omega_0<0$, 在激光作用下的原子，会由于 Doppler 效应被减速和致冷，即图 8.6 和图 8.7 所示的 $<v>$, $<v^2>$ 随作用时间 t 的增加而下降. 但这只是受到迎面而来的激光辐射压力作用的结果. 如果是受到正、反方向传播的激光作用，这原子将在传播方向，例如 x 轴方向，被减速. 如果是采用 6 个光束沿 x, y, z 正、反方向作用于原子，则原子将被禁锢在 6 束光作用的小区域内，又考虑到原子的速度扩散，原子很像是在一带有粘性的液体即光学粘胶中运动. 又假定沿 x, y, z 轴进行的光束是彼此不相干的，即是光学粘胶模型 [13]. 现分析这一模型的一维问题，即在 z 方向加上一驻波场对原子所产生的减速、阻尼、速度扩散与加热.

参照 (8.1.22) 和 (8.1.23) 式，辐射场作用于原子的力 $\vec{F}_{\rm sp}+\vec{F}_{\rm ind}$ 对 z 求平均后，由于 $\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l\sin^2 kzdz=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l\sin 2kzdz=0$, 仅 $\vec{F}_{\rm sp}$ 有贡献，去掉矢量记号，用 F 来表示，并取初始反转粒子 $\Delta_0=-1$, 则有

$$F=\frac{-\hbar k}{T_2}\frac{G\left[L(\omega_0-kv-\omega)-L(\omega_0+kv-\omega)\right]}{1+G[L(\omega_0-kv-\omega)+L(\omega_0+kv-\omega)]} \tag{8.2.1}$$

对于弱场 $G\ll1$, 又设 $\bar\Delta=\omega-\omega_0$, 则上式可简化为

$$F=\frac{\hbar k}{T_2}Gkv\cdot2T_2\frac{\bar\Delta\cdot2T_2}{1+2(\bar\Delta^2+k^2v^2)T_2^2+(\bar\Delta^2-k^2v^2)^2T_2^4} \tag{8.2.2}$$

又参照 (8.1.37) 式，在驻波场作用下，原子的扩散方程为

$$\frac{d}{dt}W=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{F}{M}W\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(D\frac{\partial}{\partial v}W\right) \tag{8.2.3}$$

$$D=-\frac{\hbar k}{M^2}\frac{\hbar k}{T_2}\frac{G\left[L(\omega_0-kv-\omega)+L(\omega_0+kv-\omega)\right]}{1+G[L(\omega_0-kv-\omega)+L(\omega_0+kv-\omega)]}$$

同样令 $\bar\Delta=\omega-\omega_0$, 并设 $|kv|\ll|\bar\Delta|$, $G\ll1$, 则得

$$D\simeq\frac{(\hbar k)^2}{M^2}\frac{2G}{T_2}\frac{1}{1+(\bar\Delta T_2)^2} \tag{8.2.4}$$

(8.2.2) 式为驻波场对原子产生的辐射压力，而行波场的辐射压力则由 (8.1.19) 式给出，即

$$F_\pm=\pm\hbar k\frac{1}{T_2}\frac{G}{1+G+((\bar\Delta\mp kv)T_2)^2} \tag{8.2.5}$$

图 8.8 为 F(实线),$F_\pm$(点线) 相对于 kvT_2 的变化曲线. 我们注意到, 在 $v=0$ 附近 F 与 v 为线性关系, $F\simeq-\alpha v$,α 为阻尼系数. 由 (8.2.2) 式, 有

$$\alpha=-4\hbar k^2 G\frac{\bar{\Delta}\bar{T}_2}{(1+(\bar{\Delta}T_2)^2)^2} \qquad (8.2.6)$$

故在 $kv\simeq0$ 附近原子动能 $\mathcal{E}$ 的减少率, 即冷却速率为

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_c=Fv=-\alpha v^2 \qquad (8.2.7)$$

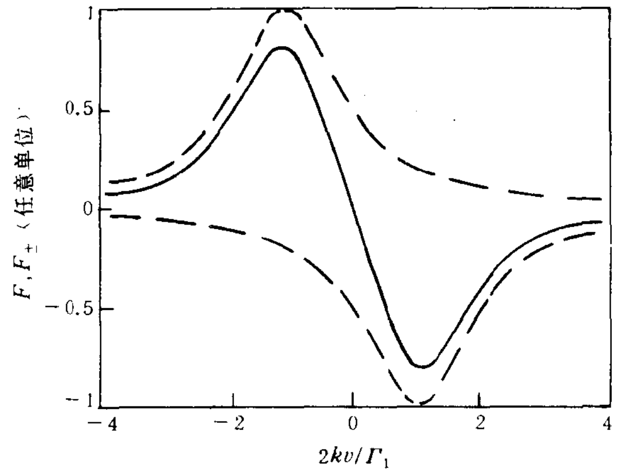


图 8.8 F, $F\pm$ 随 $2kv/\Gamma_1$ 的变化曲线 (参照 Lett [13])

另一方面参照第十章方法, 将 Fokker-Planck 方程等价为 Ito 方程, (8.2.3) 式可写为

$$dv(t)=\frac{F}{M}dt+\sqrt{D}\xi(t)dt=-\frac{\alpha}{M}v(t)dt+\sqrt{D}\xi(t)dt \qquad (8.2.8)$$

$$<\xi(t)\xi(t')>=\delta(t-t'),\quad <\xi(t)>=0$$

(8.2.8) 式的解可写为

$$v(t)=v(0)e^{(-\frac{\alpha}{M}t)}+\sqrt{D}\int_0^t e^{(-\frac{\alpha}{M}(t-t'))}\xi(t')dt' \qquad (8.2.9)$$

由此可得速度 $v(t)$ 的均方差及平均值

$$<(\Delta v)^2>=<(v(t)-<v(t)>)^2>$$
$$=D\int_0^t\int_0^t dt'dt''e^{-\frac{\alpha}{M}(t-t')-\frac{\alpha}{M}(t-t'')}<\xi(t')\xi(t'')>=\frac{DM}{2\alpha}(1-e^{-\frac{2\alpha}{M}t}) \qquad (8.2.10)$$

$$<v(t)>=<v(0)>e^{-\frac{\alpha}{M}t} \qquad (8.2.11)$$

当 $t\to\infty$ 时, (8.2.10) 式给出

$$<(\Delta v)^2>\simeq\frac{MD}{2\alpha} \qquad (8.2.12)$$

当 t 很小时, (8.2.10) 式给出

$$<(\Delta v)^2>\simeq Dt,\qquad \frac{d<(\Delta v)^2>}{dt}=D \qquad (8.2.13)$$

上式用 $\frac{M}{2}$ 乘, 便得加热原子的速率为 $\frac{MD}{2}$. 但为保持原子的动量 Mv 在 0 点附近, 故吸收一光子后又辐射一光子. 总的加热速率 [13] 应为

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_h=2\frac{MD}{2}=MD \qquad (8.2.14)$$

平衡时, 应有 $\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_c+\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_h=0$. 将 (8.2.7), (8.2.14) 式代入, 便得

$$v^2=\frac{MD}{\alpha} \tag{8.2.15}$$

与 (8.2.12) 式比较，得知平衡时的 v^2 恰为 $<(\Delta v)^2>$ 当 $t\to\infty$ 时的取值的两倍. 将原子的热动能 $Mv^2/2$ 与按能量均分定理每一个自由度的热能 $kT_B/2$ 相等，便得

$$kT_B=Mv^2=\frac{M^2D}{\alpha}=\frac{\hbar}{2T_2}\frac{1+(\bar{\Delta}T_2)^2}{-\bar{\Delta}T_2} \tag{8.2.16}$$

当 $\bar{\Delta}T_2=-1$ 时，上式取极小值

$$kT_{\min}=\frac{\hbar}{T_2} \tag{8.2.17}$$

这个温度称为 Doppler 冷却极限. 对于钠原子 5890 Å 线，$\dfrac{1}{T_2}=\dfrac{1}{2T_1}=2\pi\times10^7$ Hz, 故有

$$kT_{\min}=6.62\times10^{-27}\times10^7\ \text{erg}=240\mu\text{K}$$

但实验测得的温度要比极限温度 240μK 低得多.

扩散系数及阻尼系数的表式 (8.2.4), (8.2.6) 是就 $G=I/I_0\ll1$ 情形导出的. 若 G 并不很小，则 D 与 α 的表式分别为

$$D\simeq\frac{(\hbar k)^2}{M^2}\frac{2G}{T_2}\frac{1}{1+2NG+(\bar{\Delta}T_2)^2} \tag{8.2.18}$$

$$\alpha\simeq-4\hbar k^2G\frac{\bar{\Delta}T}{(1+2NG+(\bar{\Delta}T_2)^2)^2} \tag{8.2.19}$$

式中， $N=1,\ 2,\ 3,$ 分别对应于 1, ,2, 3 维光学粘胶. 相应地冷却温度 (8.2.16) 式也应修正为 [13]

$$kT_B=\frac{\hbar}{2T_2}\frac{1+2NG+(\bar{\Delta}T_2)^2}{-\bar{\Delta}T_2} \tag{8.2.20}$$

为了描述原子在光学粘胶中受阻冷却，现定义速度衰减时间常数 τ_d

$$\tau_d=\frac{-v}{\left(\dfrac{dv}{dt}\right)_c}=\frac{M}{\alpha} \tag{8.2.21}$$

对于钠原子，冷却极限温度 $kT_{\min}=240\mu$K, 对应的速度为 30 cm/s. 原子在光胶中作 Brownian 运动，其扩散距离 r 的均方值 $<r^2>$ 与扩散时间 t_D 的关系为

$$<r^2>=N<x^2>,\quad <x^2>=2D_xt_D,\quad D_x=\frac{kT_B}{\alpha} \tag{8.2.22}$$

由 (8.2.19), (8.2.20) 式消去 (8.2.22) 式中的 kT_B 和 α, 得

$$t_D=\frac{<r^2>}{N}\frac{2\alpha}{kT_B}=\frac{8k^2<r^2>T_2}{N}G\frac{(\bar{\Delta}T_2)^2}{(1+2NG+(\bar{\Delta}T_2)^2)^3} \tag{8.2.23}$$

将上式对 G 及失谐 $\bar{\Delta}$ 求极值，得

$$t_D=\frac{4k^2<r^2>}{27N^2}T_2,\quad 当\ \bar{\Delta}T_2=-1,\ \ G=\frac{1}{2N} \tag{8.2.24}$$

用钠原子 $\lambda = 5890$ Å, $1/T_2 = 2\pi \times 10^7$Hz 及扩散距离 $<r^2>= 0.5^2$ cm^2, $N = 3$ 代入 t_D 的表式，得扩散时间 $t_D = 742$ ms. 如果不是光学粘胶，而是按 240 μK 的平动速度 30 cm/s 逃逸 0.5 cm 距离，则只需 17 ms, 约为 742 ms 的 1/44. 这一结果是假定了光学粘胶的体积为无限大时，求得的原子的扩散距离均方值 $<r^2>$ 与扩散时间 t_D 的关系. 如果一开始光学粘胶的体积就是一个半径为 r 的球，原子一扩散到球面，便很快逃逸. 又设球内初始原子数为 n_0, 经过 t 时的扩散，球内的原子数 $n(t)$ 将按指数衰减 [14, 15]

$$n(t) = n_0 \exp(-t/\tau_M), \quad \tau_M = \frac{r^2}{\pi^2 D_x} \tag{8.2.25}$$

仍取 $r = 0.5$ cm, 则按 (8.2.25) 式计算得 $\tau_M = 450$ ms, 这些是设计观察原子冷却温度实验的依据. 在没有讨论这些实验以前，应指出已测到冷却温度 25 μK [16], 远低于钠原子的 Doppler 冷却极限 240 μK, 究其原因，除了上述冷却机制外，还存在新的冷却机制 [17], 即偏振梯度冷却.

8.3 激光偏振梯度冷却原子

利用激光偏振梯度冷却原子的机制由 J.Dalibard, C.Cohen-Tannoudji 和 S.Chu 分别独立提出 [15~17]. 基本原理是基态与激发态均包含了简并的子能级. 当激光的偏振随空间坐标变化，亦即存在偏振梯度时，对与之相互作用的原子呈现出阻力，而且当原子的速度 $v \to 0$ 时的阻尼系数几乎与光强无关. 偏振梯度有两种，一种是 $\sigma^+\sigma^-$ 型，另一种是 $\pi^x\pi^y$ 型，分别如图 8.9(a), (b) 所示. 图 8.9(a) 示出 $\sigma^+\sigma^-$ 型为两束沿相反方向传输的左右椭圆偏振光，总的电场 $E(z,t)$ 可表示为

$$E(z,t) = \mathcal{E}^+(z)e^{-i\omega_L t} + c.c \tag{8.3.1}$$

正频分量 $\mathcal{E}^+(z)$ 由下式给出：

$$\mathcal{E}^+(z) = \varepsilon_0 \epsilon e^{ikz} + \varepsilon_0' \epsilon' e^{-ikz} \tag{8.3.2}$$

$$\begin{aligned} \epsilon = \epsilon_+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_x + i\epsilon_y) \\ \epsilon' = \epsilon_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_x - i\epsilon_y) \end{aligned} \tag{8.3.3}$$

式中，ε_0, ε_0' 分别为沿 z 轴正、反方向传输的光的振幅，可取为实值；ϵ_-, ϵ_+ 为左、右旋圆偏振. 将 (8.3.3) 式代入 (8.3.2) 式，得

$$\mathcal{E}^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_0' - \varepsilon_0)\epsilon_{\bar{x}} - \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon_0' + \varepsilon_0)\epsilon_{\bar{y}} \tag{8.3.4}$$

式中

$$\begin{aligned} \epsilon_{\bar{x}} &= \epsilon_x \cos kz - \epsilon_y \sin kz \\ \epsilon_{\bar{y}} &= \epsilon_x \sin kz - \epsilon_y \cos kz \end{aligned} \tag{8.3.5}$$

合成后为一椭圆偏振光，而且椭圆轴绕 z 轴转动角 $\varphi = -kz$.

在负失谐条件下，原子从 σ^- 光场中吸收光子数比 σ^+ 光场中吸收的光子数多，阻尼系数为

$$\alpha = -\frac{120}{17}\frac{\bar{\Delta}T_2}{5+(\bar{\Delta}T_2)^2}\hbar k^2 \tag{8.3.6}$$

平衡温度为

$$kT_B = \frac{\hbar\Omega^2}{\bar{\Delta}}\left[\frac{29}{300}+\frac{354}{75}\frac{1}{1+(\bar{\Delta}T_2)^2}\right]$$

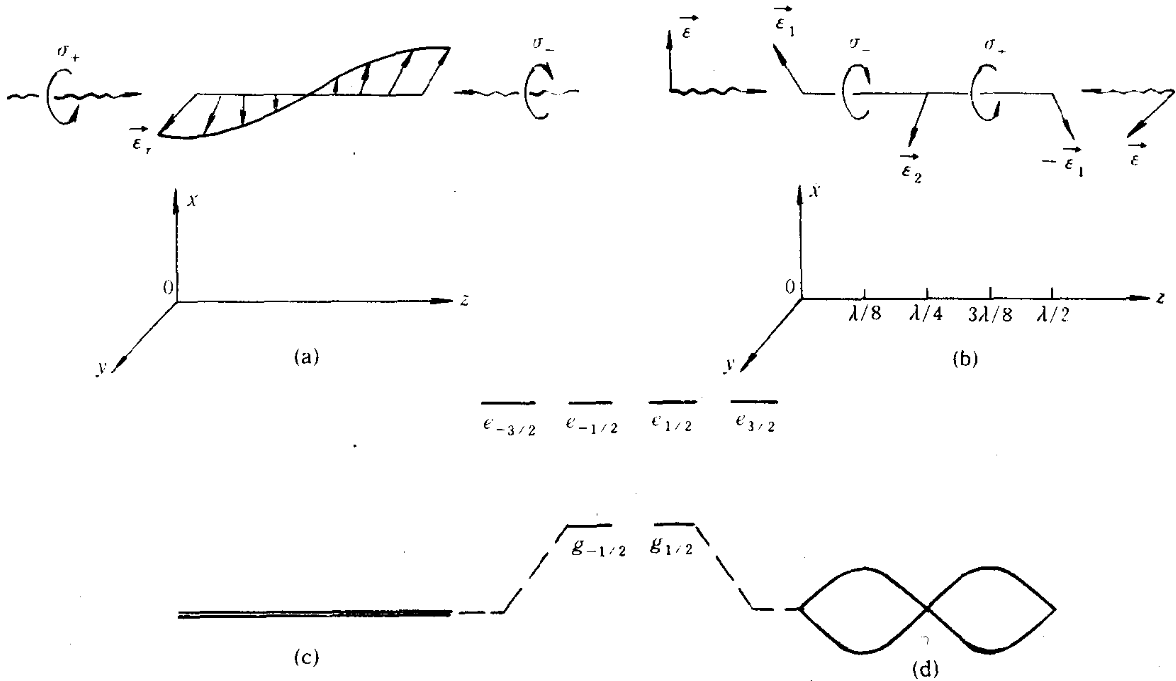


图 8.9 两种类型的偏振梯度及对应的光移位基态子能级，跃迁为 $J_g = 1/2 \leftrightarrow J_e = 3/2$.(a)$\sigma^+\sigma^-$ 型；(b)$\pi^x\pi^y$ 型；(c) 对应于 $\sigma^+\sigma^-$ 型的光移位基态子能级；(d) 对应于 $\pi^x\pi^y$ 型的光移位基态子能级（参照 [13]）

对于 $\pi^x\pi^y$ 型两束沿相反方向传播且偏振方向互相垂直的线偏振光，即有

$$\epsilon = \epsilon_x \qquad \epsilon' = \epsilon_y \tag{8.3.7}$$

将 (8.3.7) 式代入 (8.3.2) 式，并令 $\varepsilon_0 = \varepsilon_0'$, 则得

$$\mathcal{E}^+(z) = \varepsilon_0\sqrt{2}\left(\cos kz\frac{\epsilon_x+\epsilon_y}{\sqrt{2}} - i\sin kz\frac{\epsilon_x-\epsilon_y}{\sqrt{2}}\right) \tag{8.3.8}$$

由 (8.3.8) 式看出合成后的场强 $\mathcal{E}^+(z)$ 在 $z=0$ 处为线偏振光，在 $z=\lambda/8$ 处为椭圆偏振光 (σ^-). 当原子沿 z 轴飞行时，原子基态子能级由于光所产生的能级移位的大小随空间位置交替变化. 光抽运总是将基态高子能级的粒子抽至低子能级，如图 8.10 所示. 这样，原子在运动时，总是吸收红移光子，放出蓝移光子，导至原子动能的损耗. 对于弱光强、负失谐情况，一维 $\pi^x\pi^y$ 光胶的阻尼系数为

$$\alpha = -3\hbar k^2\frac{\bar{\Delta}T_2}{2} \tag{8.3.9}$$

平衡温度为

$$kT_B = \frac{\hbar\Omega^2}{8\tilde{\Delta}} \tag{8.3.10}$$

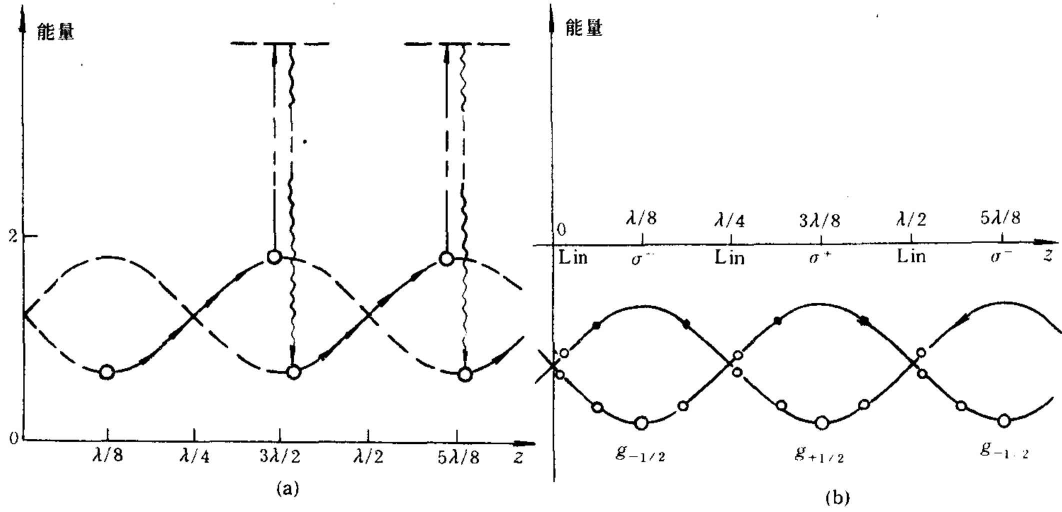


图 8.10 (a)$\pi^x\pi^y$ 型的基态子能级光移位与光抽运；
(b) 在基态子能级上的粒子数分布 (用实心点的大小来表示)
(参照 [13])

$\sigma^+\sigma^-$ 和 $\pi^x\pi^y$ 激光场对原子的辐射压力和速度的关系如图 8.11 所示. 从图中可以看出，在低速范围，偏振梯度冷却更有效；而在高速范围，Doppler 冷却更有效. 因此，利用偏振梯度冷却，在光强很弱、失谐很大时，可使冷却温度低于 Doppler 极限. 这由 (8.3.6), (8.3.10) 式可以看出来.

现对一维 $\pi^x\pi^y$ 光胶作更仔细地讨论. 设基态为二重简并，简并能级为 $g_{1/2}$, $g_{-1/2}$, 激发态为四重简并，能级为 $e_{\pm 1/2}$, $e_{\pm 2/3}$, 它们之间的 Clebsh-Gordon 系数如图 8.12. 采用旋波近似后，原子与光场间的电偶极相互作用 V 为

$$V = -\left(D^+ \cdot \mathcal{E}^+(r)e^{-i\omega_L t} + D^- \cdot \mathcal{E}^-(r)e^{i\omega_L t}\right) \tag{8.3.11}$$

式中，D^+, D^- 为原子电偶极上升与下降算子；$\mathcal{E}^+(r)$, $\mathcal{E}^-(r)$ 为激光场的正频、负频分量，$\mathcal{E}^- = (\mathcal{E}^+)^*$,$\mathcal{E}^+(r)$ 由 (8.3.8) 定义. 根据 (8.3.8), (8.3.11) 式及图 8.12 得出相互作用 V 的矩阵元为

$$\begin{aligned}
&< e_{3/2}|V|g_{1/2} >= \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}} \sin kz e^{-i\omega_L t} \\
&< e_{1/2}|V|g_{-1/2} >= \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{6}} \sin kz e^{-i\omega_L t} \\
&< e_{-3/2}|V|g_{-1/2} >= \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}} \cos kz e^{i\omega_L t} \\
&< e_{-1/2}|V|g_{1/2} >= \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{6}} \cos kz e^{i\omega_L t}
\end{aligned} \tag{8.3.12}$$

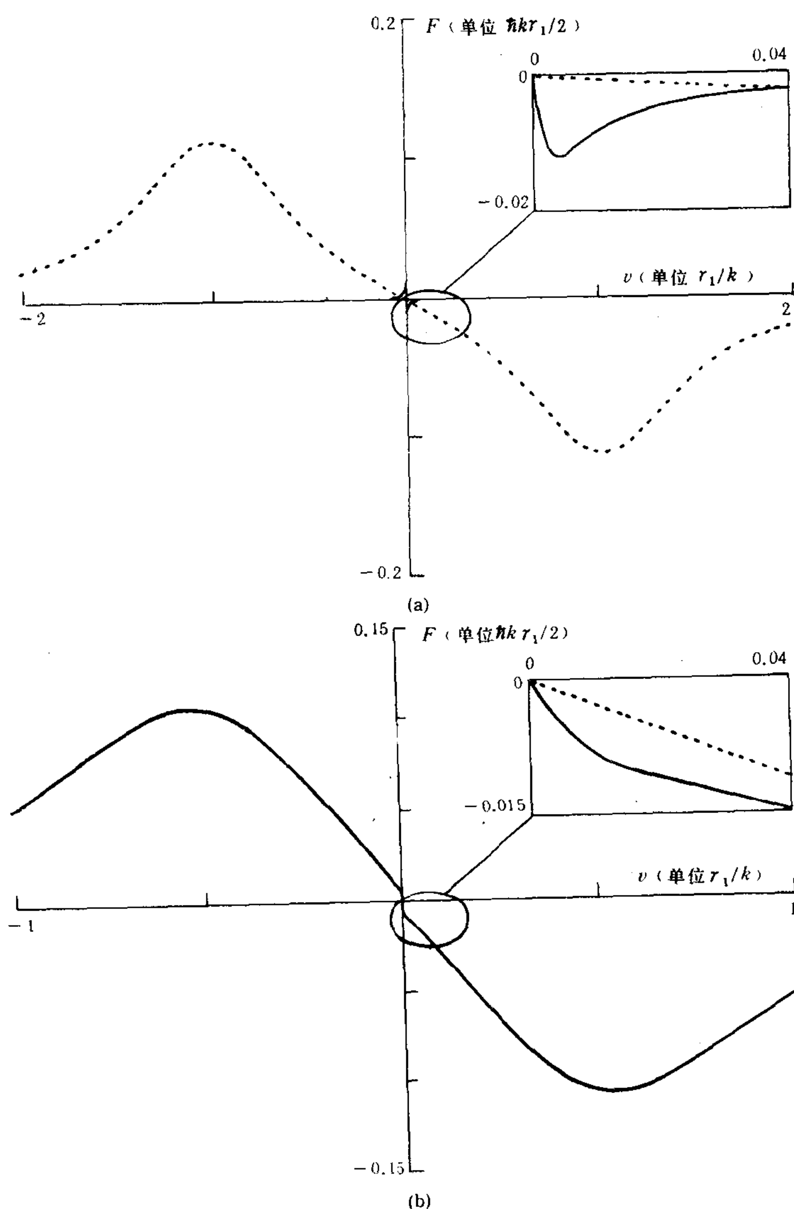


图 8.11 (a)$\pi^x\pi^y$ 型激光场对原子的辐射压力 F(单位为 $\hbar k\Gamma_1/2$) 随速度 v(单位为 Γ_1/k) 的变化曲线 ($\Omega=0.3\gamma_1$, $\delta=-\gamma_1$);

(b)$\sigma^+\sigma^-$ 型的辐射压力 F 随 v 的变化 ($\Omega=0.25\gamma_1$, $\delta=-0.5\gamma_1$)

(实线为偏振梯度压力，虚线为 Doppler 失谐相对传播光束辐射压力之和)

(参照 Dalibard 等 [17])

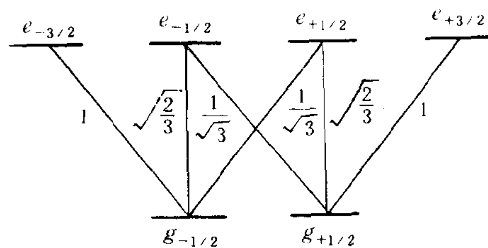


图 8.12 $J_g=1/2\longleftrightarrow J_e=3/2$ 跃迁的 Clebsh-Gordon 系数

(参照 [13])

由激光场产生的能级移位为

$$
\begin{aligned}
\Delta E_{1/2} &= \mathrm{Re}\sum_{m}\frac{< g_{1/2}|V|m >< m|V|g_{1/2} >}{\hbar(\bar{\Delta}+i1/T_2)} \\
&= \hbar\bar{\Delta}s_0(\sin^2 kz+\tfrac{1}{3}\cos^2 kz)=E_0-\frac{\hbar\bar{\Delta}s_0}{3}\cos 2kz
\end{aligned}
\tag{8.3.13}
$$

$$
E_0=\frac{2}{3}\hbar\bar{\Delta}s_0,\qquad s_0=\frac{\Omega^2/2}{\bar{\Delta}^2+(1/T_2)^2}
$$

同样可以求得

$$
\Delta E_{-1/2}=\hbar\bar{\Delta}s_0\left(\cos^2 kz+\frac{1}{3}\sin^2 kz\right)=E_0+\frac{\hbar\bar{\Delta}s_0}{3}\cos 2kz \tag{8.3.14}
$$

将能级移位 $\Delta E_{1/2}$，$\Delta E_{-1/2}$ 对 z 作图，便得图 8.10. 注意 (8.3.12) 式也可用另一种方式表述. 定义基态与相互作用为

$$
\begin{aligned}
g &= \sin kz g_{1/2}+\cos kz g_{-1/2} \\
V &= \frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}}(D^+e^{-i\omega_L t}+D^-e^{i\omega_L t})
\end{aligned}
\tag{8.3.15}
$$

于是有

$$
< e_{3/2}|V|g >=\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_L t}\sin kz < e_{3/2}|D^+|g_{1/2} >=\frac{\hbar\Omega}{\sqrt{2}}e^{-i\omega_L t}\sin kz \tag{8.3.16}
$$

将这结果与 (8.3.12) 式比较,完全相同. 同样，$< e_{-3/2}|V|g >$，$< e_{1/2}|V|g >$，$< e_{-1/2}|V|g >$ 也与 (8.3.12) 式其余等式 $< e_{-3/2}|V|g_{-1/2} >$ 等一致. 故 (8.3.12) 式各矩阵元均可看成不同激发态向一基态跃迁的矩阵元. 一个很重要的结论是由 g 的定义 (8.3.15) 式，得知原子处于 $g_{1/2}$，$g_{-1/2}$ 态的几率分别为 $\sin^2 kz$, $\cos^2 kz$. 由 (8.3.13), (8.3.14) 式得出产生 $\Delta E_{\pm 1/2}$ 能级移位的力 $f_{\pm 1/2}$ 为

$$
f_{\pm 1/2}=-\frac{d}{dz}\Delta E_{\pm 1/2}=\mp\frac{2}{3}\hbar k\bar{\Delta}s_0\sin 2kz \tag{8.3.17}
$$

对状态 $g_{1/2}$，$g_{-1/2}$ 求平均后，得

$$
f=f_{1/2}\pi_{1/2}+f_{-1/2}\pi_{-1/2} \tag{8.3.18}
$$

式中，$\pi_{\pm 1/2}$ 为处于状态 $g_{\pm 1/2}$ 的几率. 如果用 $\sin^2 kz$, $\cos^2 kz$ 代入，便得

$$
f(z)=\frac{2}{3}\hbar k\bar{\Delta}s_0\sin 2kz\cos 2kz \tag{8.3.19}
$$

注意到 $\sin^2 kz$, $\cos^2 kz$ 可看成初始时的几率 $\pi_{1/2}(z)$, $\pi_{-1/2}(z)$, 经 τ_p 时原子已由 z 运动到 $z-v\tau_p$, 则有

$$
\pi_{\pm 1/2}(z-v\tau_p)\simeq\pi_{\pm 1/2}(z)-v\tau_p\frac{d\pi_{\pm 1/2}(z)}{dz} \tag{8.3.20}
$$

将 (8.3.20) 式代入 (8.3.18) 式，得

$$
f(z-v\tau_p)=f(z)+\frac{4}{3}\hbar k^2\bar{\Delta}s_0 v\tau_p\sin^2(2kz) \tag{8.3.21}
$$

将上式对空间 z 求平均，有 $\bar{f}(z)=0$, 所以

$$\bar{f}(z - v\tau_p) = -\alpha v, \quad \alpha = -\frac{2}{3}\hbar k^2 \bar{\Delta} s_0 \tau_p \tag{8.3.22}$$

式中， τ_p 为原子在基态逗留的时间， $1/\tau_p = \dfrac{4}{T_2}\dfrac{s_0}{9}$, 代入上式得 $\alpha = -3\hbar k^2(\bar{\Delta}T_2/2)$, 此即 (8.3.9) 式. 文献 [17] 中还求得了扩散系数 $D_p = \dfrac{3}{8}\hbar^2 k^2 \bar{\Delta}^2 T_2 s_0$, 于是按 $kT_B = \dfrac{D_p}{\alpha}$, 求得平衡温度 $kT_B = \dfrac{\hbar|\bar{\Delta}|^2}{4}s_0 \simeq \dfrac{\hbar\Omega^2}{8|\bar{\Delta}|}$, 即 (8.3.10) 式.

8.4 光学粘胶温度测量

三维光学粘胶是 S.Chu 等在 1985 年提出来的. 他们用观察在光胶中的原子的荧光随时间的衰变, 也称之为 R & R (Release & Recapture) 方法来测定原子温度. 如图 8.13 所示 [18], 由原子炉出来经 Zeeman 调谐磁铁线圈并被迎面来的激光束对撞冷却后的慢原子束逃离至光轴旁 (约 2.5 cm) 的光学粘胶区被俘获. 设被俘获的原子数为 n_0, 这些原子将按 (8.2.25) 式指数律衰减, 观察到的光粘胶中原子的荧光强度也同样按 (8.2.25) 式指数衰减. 如果挡掉形成光胶的激光一段时间 $t_{\rm off}$(例如 $t_{\rm off} = 20$ ms), 然后又将激光加上, 在 $t_{\rm off}$ 时间内光胶已去掉, 原子将以热速度逃离光胶区. 温度和热速度高, 逃离快; 反之逃离慢. $t_{\rm off}$ 后, 光胶又恢复了, 荧光又按 $t_{\rm off}$ 前的指数衰减, 但强度起点要比 $t_{\rm off}$ 前低 (见图 8.14). 据此可测定在 $t_{\rm off}$ 时间内逃离的原子数及热速度与温度. 应用这种方法测得的钠原子的光胶冷却温度为 240 μK, 铯原子的光胶冷却温度为 100 μK [19], 分别与 Doppler 冷却极限 240 μK, 120 μK 接近. 进一步实验, 发现结果与经典光胶理论及 Doppler 极限均不符合 [13]. 图 8.15 是周期地挡掉与加上激光束 (即光胶) 的原子荧光强度随时间的变化曲线. 这曲线反映了光胶慢化与聚集原子的效果. 使人感到惊奇的是, 即使激光失谐大到 $\bar{\Delta} = -6/T_2$(这已经远远偏离于 (8.2.24) 式给出的最佳失谐 $\bar{\Delta} \simeq -1/T_2$), 仍能有图 8.15 所示的慢化与聚集原子的效果. 这表明经典光胶理论的失效. 又由荧光强度的衰变, 可测定 τ_M 及 t_D. 按 (8.2.23) 式, t_D 与失谐 $\bar{\Delta}$ 的变化关系即图 8.16 中的实线, 极大在 $-\bar{\Delta}T_2 = 1$. 但实验测得的点则红移许多, 极大在 $-\bar{\Delta}T_2 \simeq 3$ 处. 经典理论与实验不符, 还可从飞行时间 (TOF) 测量得到证明, 即在光胶下面与光胶相距 $1 \sim 2$ 个光胶直径的地方加一探测光, 当原子在 $\rm t_{off}$ 时间内由光胶逃离并进入探测光时, 便发荧光. 图 8.17 为荧光强度随时间的变化, TOF 给出 $kT_B = 250$ μK, 25 μK 实线. 实验数据与 25 μK 理论曲线相符合. 这表明光胶中原子处于温度 25 μK, 而不是 Doppler 极限 250 μK.

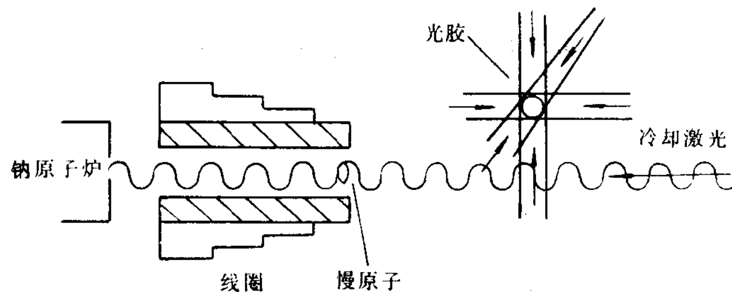


图 8.13 Zeeman 调谐磁铁与光胶区位置示意图 (参照 [13])

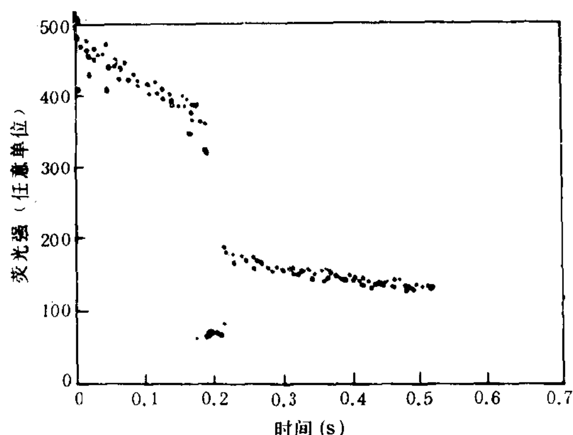


图 8.14 光胶区原子的荧光衰减示意图

(参照 [13])

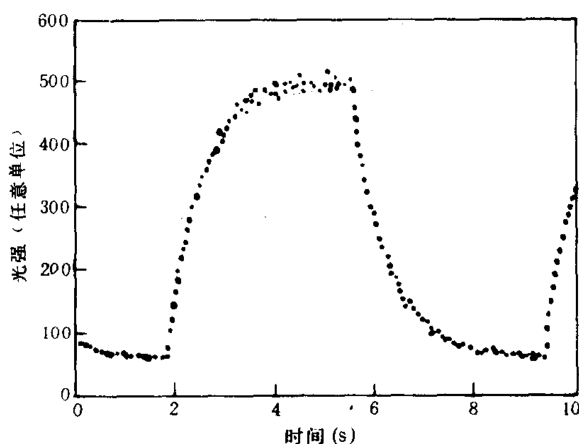


图 8.15 光胶中原子荧光的上升与衰减曲线

(参照 [13])

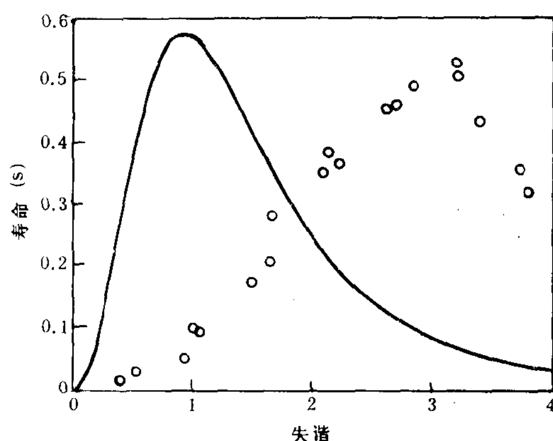


图 8.16 光胶中原子寿命随失谐的变化

"—" 为理论曲线 ($G \simeq 0.5$),"○" 为实验点

(参照 [13])

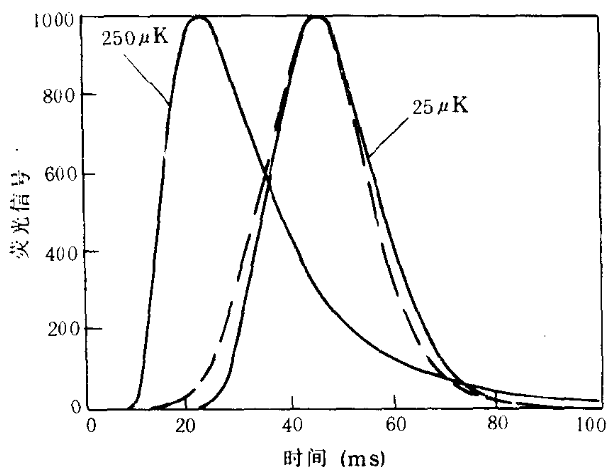


图 8.17 光胶中原子飞行的时间测量 ($\Delta = -2.5\gamma_1$)

(参照 [13])

8.5 电磁衰波场对原子的作用力与原子镜

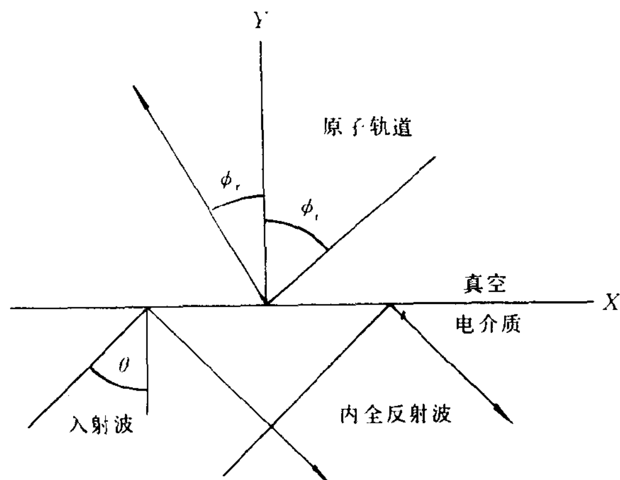
激光辐射压力可以使原子减速并冷却，同样也可以应用激光辐射压力作成反射原子的原子镜 [5,20,24,25] 和衍射原子的原子栅. 图 8.18 就是通过平面电磁波在电介质的内全反射产生的衰波做成的原子镜. $y > 0$ 为真空, $y < 0$ 为电介质，激光透过介面 $y = 0$ 产生的衰波为

$$\vec{E}(x,t) = \vec{\epsilon}\varepsilon \exp(-\alpha y) \left[e^{i(\omega t - kt)} + c.c\right] \tag{8.5.1}$$

式中, $\vec{\epsilon}$ 为偏振矢量, ε 为 y=0 处的波幅

$$\alpha = \frac{\omega}{c}\left(n^2 \sin^2\theta - 1\right)^{1/2}, \qquad k = \frac{\omega}{c} n \sin\theta \tag{8.5.2}$$

θ 为平面波在介质内的入射角，产生内全反射的条件为 $\theta > \theta_c = \sin^{-1}(1/n)$. 衰波沿界面 x 方向传播，衰波对原子产生的力可参照 (8.1.14), (8.1.15) 式求得，并注意到衰波的梯度



$$\nabla\vec{E}(x,t)=\epsilon\mathcal{E}\left[(-\vec{\alpha}-i\vec{k})e^{-\alpha y+i(\omega t-kx)}+c.c\right] \tag{8.5.3}$$

将 (8.1.15), (8.5.3) 式代入 (8.1.10) 式，便得

$$\vec{F}=\frac{\vec{\alpha}}{\alpha}F_y+\frac{\vec{k}}{k}F_x \tag{8.5.4}$$

式中，$\vec{\alpha}$, $\vec{k}$ 分别平行于 y 与 x 轴，

图 8.18 平面电磁波在真空 - 电解质表面的内全反射形成的衰波

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{4T_2\mu^2\mathcal{E}^2\Delta k}{\hbar}\sin(\omega t-kx)e^{-2\alpha y}\left[T_2(\omega_0-kv_x-\omega)\cos(\omega t-kx)\right. \\ &\quad \left.+\sin(\omega t-kx)\right]L(\omega_0-kv_x-\omega) \\ F_y &= \frac{-4T_2\mu^2\mathcal{E}^2\alpha\cos(\omega t-kx)e^{-2\alpha y}}{\hbar}\Delta\left[T_2(\omega_0-kv_x-\omega)\cos(\omega t-kx)\right. \\ &\quad \left.+\sin(\omega t-kx)\right]L(\omega_0-kv_x-\omega) \end{aligned} \tag{8.5.5}$$

将上式对 t 求平均，并应用 (8.1.18) 式，便得

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\hbar k}{T_2}\frac{GL(\omega_0-kv_x-\omega)}{1+GL(\omega_0-kv_x-\omega)} \\ F_y &= -\frac{\alpha}{k}(\omega-kv_x-\omega)T_2F_x \\ G &= \frac{2\mathcal{E}^2e^{-2\alpha y}\mu^2T_2^2}{\hbar^2} \end{aligned} \tag{8.5.6}$$

对于正失谐 $\bar{\Delta}=\omega-\omega_0>0$ 且 $\Delta\gg kv_x$ 的情形，上式可化简为

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\hbar k}{T_2}\frac{G}{G+1+\bar{\Delta}^2T_2^2} \\ F_y &= \hbar\alpha\frac{\bar{\Delta}G}{G+1+\bar{\Delta}^2T_2^2} \end{aligned} \tag{8.5.7}$$

对应于 F_y 的势为

$$V(y)=\frac{\hbar\bar{\Delta}}{2}\ln\left[1+G+\bar{\Delta}^2T_2^2\right] \tag{8.5.8}$$

具有质量 M 、初速 v_y 的原子，只要 $\dfrac{Mv_y^2}{2}<V(0)$, 当运动到薄层衰波势附近时被反射回来，亦即被反射回来的原子在 y 方向的速度分量最大值应是

$$v_y^{\max}=\left[\frac{\hbar\bar{\Delta}}{M}\ln(1+G+\bar{\Delta}^2T_2^2)\right]^{1/2} \tag{8.5.9}$$

值得一提的是将图 8.18 结构稍加改变，便可做成原子衍射栅 [22]. 主要是加了一面

与激光束成垂直的全反射镜，于是在界面 $y=0$ 附近形成激光场驻波栅，由真空 $(y>0)$ 来的原子在其上衍射.

8.6 原子镜面对原子量子态选择反射实验 [23]

如图 8.19 所示，激光束射入石英片，在其内全反射，透过介面的衰波形成原子镜. 参照 (8.5.8), (8.5.7) 式，并考虑到 Doppler 修正后，可将作用力 F_y 及势 $V(y)$ 写为

$$\begin{aligned} F_y &= \hbar\alpha\frac{(\bar{\Delta}-k_xv_x)G}{G+1+(\bar{\Delta}-k_xv_x)^2T_2^2} \\ k_x &= k\sin\theta \\ \alpha &= k(\sin^2\theta-n^{-2})^{1/2} \\ \bar{\Delta} &= \omega-\omega_0 \end{aligned} \tag{8.6.1}$$

$$V(y)=\frac{\hbar}{2}(\bar{\Delta}-k_xv_x)\ln\left[1+G+(\bar{\Delta}-k_xv_x)^2T_2^2\right] \tag{8.6.2}$$

F_y, $V(y)$ 均与失谐 $(\bar{\Delta}-k_xv_x)$ 成正比. 若为正失谐，$\bar{\Delta}-k_xv_x>0$, $F_y>0$ 为排斥力，原子被原子镜所反射；若为负失谐，$\bar{\Delta}-k_xv_x<0$, $F_y<0$ 为吸引力，原子将被吸附在镜面. 为观察此效应，可选择基态有精细结构的钠原子. 基态 $3S_{1/2}$ 有两个超精细结构 $F=1$, 2, 间距 1772 MHz. 在热平衡情况下，$F=2$ 能态的原子占 37.5%,$F=1$ 能态的原子占 62.5%. 若将激光频率调谐到各能态之间，即 $\omega_{20}+k_xv_x<\omega<\omega_{10}+k_xv_x$, ω_{10}, ω_{20} 分别为 $F=1$, 2 能态到激发态 $3P_{3/2}$ 间的跃迁频率. 很明显，ω 相对 $F=2$ 能态为正失谐，将反射 $F=2$ 能态的原子；而对 $F=1$ 能态来说，ω 便是负失谐，将吸附 $F=1$ 能态的原子. 被镜面反射的原子，再用探测激光通过观测其吸收谱. 如图 8.20(a) 所示，

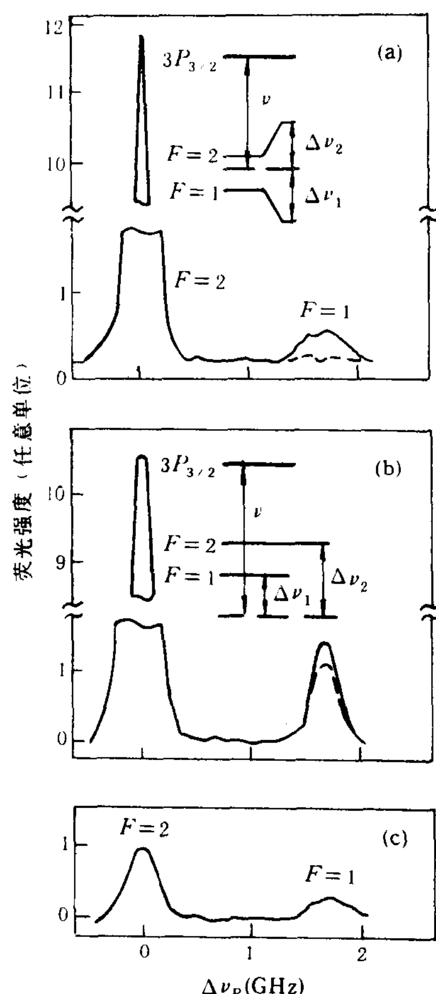


图 8.19 原子在原子栅镜面的反射实验装置

(参照 Balykin [23])

$\dfrac{\omega-(\omega_{10}+k_xv_x)}{2\pi}=-1.2$ GHz, $\dfrac{\omega-(\omega_{20}+k_xv_x)}{2\pi}=0.5$ GHz, 热原子平动速度 $v_x=8.2\times10^4$ cm/s,$F=2$ 能态吸收谱的强度远大于 $F=1$ 能态. $F=1$ 能态的小峰，是由于背景信号引起的. 这个结果恰表明 $F=2$ 能态原子被原子镜反射，$F=1$ 能态原子被镜面吸附. 在 (图 8.20(b) 中，$\dfrac{\omega-(\omega_{10}+k_xv_x)}{2\pi}=2.9$ GHz, $\dfrac{\omega-(\omega_{10}+k_xv_x)}{2\pi}=4.6$ GHz, 均为正失谐，$F=1$, 2 均被反射，均有吸收峰. 图 8.21(c) 为撤掉激光束，无原子镜，小量散射原子形成的吸收背景信号。

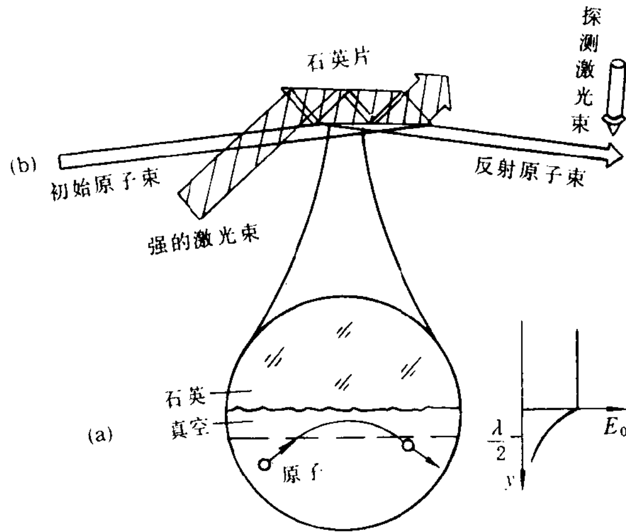


图 8.20 钠原子在原子镜面选择反射后的吸收谱 (参照 [23])

8.7 二能级原子在激光衰波场中反射的准确解

上节已讨论二能级原子在激光衰波镜面的反射，并研究了作用于原子上的力 F_y 随着激光的正失谐或负失谐 Δ 而表现出的差异. 这些结论已从实验上得到证实. 但从原子与光场相互作用满足的 Schrödinger 方程来准确求解，是很有实际意义的. 这一节就在准确求解二能级原子与场相互作用的 Schrödinger 方程的基础上，讨论原子波函数的边界条件及反射率随 Rabi 频率的变化规律 [26].

8.7.1 二能级原子在激光衰波场中满足的 Schrödinger 方程及其解

原子在衰波场中总的哈密顿量 H 可表示为原子内部的哈密顿量 H_a, 原子重心 (x,y,z) 的动能 $\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)$ 及原子与激光场 $\vec{\varepsilon}(x,y,t)$ 的耦合能 $-\vec{\mu}\cdot\vec{\varepsilon}$ 之和 [11], 即

$$H = H_a + \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2) - \vec{\mu}\cdot\vec{\varepsilon} \tag{8.7.1}$$

参照图 8.19, 在 $x-y$ 平面内的平行光束在玻璃介质的内全反射形成的衰波 $\vec{\varepsilon}(x,y,t)$ 与 z 无关. 原子在 z 方向的动量 p_z 将是一个常数. 为方便起见，已去掉相应的动能部分 $p_z^2/2m$, 即得到 (8.7.1) 式，这样便得出原子满足的 Schrödinger 方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi + H_a(\vec{q})\psi - \vec{\mu}\cdot\vec{\varepsilon}\psi \tag{8.7.2}$$

式中， $\vec{q}$ 为原子内部坐标. 假定原子只有两个能级，即基态与激发态，则定态解为

$$\begin{aligned} H_a(\vec{q})\phi_e(\vec{q}) &= E_e\phi_e(\vec{q}) \\ H_a(\vec{q})\phi_g(\vec{q}) &= E_g\phi_g(\vec{q}) \end{aligned} \tag{8.7.3}$$

又设激光场为单频的，其频率为 ω, 则有

$$\vec{\varepsilon}(x,y,t) = \vec{\varepsilon}(x,y)e^{-i\omega t} + \vec{\varepsilon}^*(x,y)e^{i\omega t} \tag{8.7.4}$$

$$\psi = u_e(x,y)\phi_e(\vec{q})\exp\left(-i\frac{E_e+E_g}{2\hbar}t - i\frac{\omega t}{2} - \frac{iEt}{\hbar}\right)$$
$$+u_g(x,y)\phi_g(\vec{q})\exp\left(-i\frac{E_e+E_g}{2\hbar}t + i\frac{\omega t}{2} - \frac{iEt}{\hbar}\right) \tag{8.7.5}$$

将 (8.7.4),(8.7.5) 式代入 (8.7.2) 式中，应用 (8.7.3) 式，然后用 $\int \phi_e(\vec{q})dq$, $\int \phi_g(\vec{q})dq$ 作用于等式两边，采用旋波近似，将电偶极 $\vec{\mu} = -e\vec{q}$ 的矩阵元 $\int \phi_e(\vec{q})\vec{\mu}\phi_g(\vec{q})dq$ 仍记为 $\vec{\mu}$, 最后得

$$\begin{aligned} Eu_e &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - \frac{\hbar}{2}\Delta\right]u_e - \vec{\mu}\cdot\vec{\varepsilon}u_g \\ Eu_g &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{\hbar}{2}\Delta\right]u_g - \vec{\mu}\cdot\vec{\varepsilon}u_e \end{aligned} \tag{8.7.6}$$

式中， $\Delta = \omega - \dfrac{E_e - E_g}{\hbar}$, 为激光频率 ω 相对于二能级原子跃迁频率的失谐. 激光通过介面内全反射形成的衰波场为

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}(x,y) &= \vec{\epsilon}\varepsilon e^{-\eta y + i\xi x} \\ \eta &= k_0\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}\ \ ,\ \ \xi = k_0 n\sin\theta \end{aligned} \tag{8.7.7}$$

这是一沿 x 轴方向传播的波，其偏振方向 $\vec{\epsilon}$ 与 z 轴平行，即 s 偏振. 波幅沿 y 轴方向指数衰减，下面为书写方便起见，略去单位矢量 $\vec{\epsilon}$, 并将 $\vec{\mu}$ 写成 μ. 将 (8.7.7) 式代入 (8.7.6) 式，得 u_e, u_g 的解为

$$\begin{aligned} u_e &= u_e(y)e^{ip_e x/\hbar} \\ u_g &= u_g(y)e^{ip_g x/\hbar}\ \ ,\ \ p_g = p_e - \hbar\xi \end{aligned} \tag{8.7.8}$$

将 (8.7.8) 式代入 (8.7.6) 式得出 $u_e(y)$, $u_g(y)$ 满足的方程

$$\begin{aligned} Eu_e &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{p_e^2}{2m} - \frac{\hbar\Delta}{2}\right)u_e - \mu\varepsilon e^{-\eta y}u_g \\ Eu_g &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} + \frac{p_g^2}{2m} + \frac{\hbar\Delta}{2}\right)u_g - \mu\varepsilon e^{-\eta y}u_e \end{aligned} \tag{8.7.9}$$

(8.7.8) 式表明，在反射过程中，可能发生由基态跃迁到激发态，并吸收一个光子的能量与动量. 现在对方程 (8.7.9) 式进行规一化，引进 Rabi 频率 $\Omega = \dfrac{2\mu\varepsilon}{\hbar}$, 规一化频率 $\Omega_0 = \hbar\eta^2/m$, 并取如下规一化式：

$$\begin{aligned} \frac{T_{ey}}{\hbar\Omega_0/2} &= \frac{E + \hbar\Delta/2 - p_e^2/2m}{\hbar\Omega/2} = \gamma_1 \\ \frac{T_{gy}}{\hbar\Omega_0/2} &= \frac{E - \hbar\Delta/2 - p_g^2/2m}{\hbar\Omega/2} = \gamma_2 \\ \frac{\hbar^2/2m}{\hbar\Omega_0/2}\frac{d^2}{dy^2} &= \frac{1}{\eta^2}\frac{d^2}{dy^2} \Rightarrow \frac{d^2}{dy^2}, \qquad \frac{\Omega}{\Omega_0} \Rightarrow \Omega \\ \gamma_1 - \gamma_2 &= \frac{\hbar\Delta - (\hbar\xi)^2/2m - p_g\hbar\xi/m}{\hbar\Omega/2} \end{aligned} \tag{8.7.10}$$

式中， T_{ey}, T_{gy} 分别为激发态、基态原子垂直于靶面的平动能； $\hbar\Omega_0/2$ 为光子在 y 方向对原子产生的反冲移位；而 $\dfrac{p_g\hbar\xi}{2m}$, $\dfrac{(\hbar\xi)^2}{2m}$ 分别为 Doppler 移位能及光子的反冲能. 当

$\gamma_1-\gamma_2>0$ 时为正失谐，当 $\gamma_1-\gamma_2<0$ 时为负失谐. 经规一化后，方程 (8.7.9) 便可写为

$$\frac{d^2}{dy^2}u=-\bar{\gamma}u+\bar{M}e^{-y}u \tag{8.7.11}$$

式中，$u=\begin{pmatrix}u_e\\u_g\end{pmatrix}$，$\bar{\gamma}=\begin{pmatrix}\gamma_1&0\\0&\gamma_2\end{pmatrix}$，$\bar{M}=\begin{pmatrix}0&-\Omega\\-\Omega&0\end{pmatrix}$. 将 (8.7.11) 式写为一阶方程，便得

$$\frac{du}{dy}=v,\quad \frac{dv}{dy}=-\bar{\gamma}u+\bar{M}e^{-y}u \tag{8.7.12}$$

或

$$\frac{dw}{dy}=-\Gamma w+Ne^{-y}w \tag{8.7.13}$$

式中

$$w=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix},\quad \Gamma=\begin{pmatrix}0&-1\\\bar{\gamma}&0\end{pmatrix},\quad N=\begin{pmatrix}0&0\\\bar{M}&0\end{pmatrix} \tag{8.7.14}$$

对 (8.7.13) 式进行 Laplace 变换，得

$$\tilde{w}=\int_0^\infty e^{-sy}w(y)dy$$

$$s\tilde{w}=w(0)-\Gamma\tilde{w}(s)+N\tilde{w}(s+1)$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}(s)\ &=\ \frac{w(0)}{s+\Gamma}+\frac{1}{s+\Gamma}N\tilde{w}(s+1)=\left(\frac{1}{s+\Gamma}+\frac{1}{s+\Gamma}N\frac{1}{s+1+\Gamma}\right.\\&+\ \left.\tfrac{1}{s+\Gamma}N\tfrac{1}{s+\Gamma+1}N\tfrac{1}{s+\Gamma+2}+\cdots\right)w(0)\end{aligned} \tag{8.7.15}$$

由 (8.7.14) 式得

$$s+\Gamma=\begin{pmatrix}s&-1\\\bar{\gamma}&s\end{pmatrix} \tag{8.7.16}$$

可证逆阵

$$\frac{1}{s+\Gamma}=\frac{1}{s^2+\gamma}\begin{pmatrix}s&1\\-\bar{\gamma}&s\end{pmatrix} \tag{8.7.17}$$

$$(s+\Gamma)\frac{1}{s+\Gamma}=\frac{1}{s^2+\gamma}\begin{pmatrix}s&-1\\\bar{\gamma}&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s&1\\-\bar{\gamma}&s\end{pmatrix}=1 \tag{8.7.18}$$

注意到

$$N\frac{1}{s+1+\Gamma}\quad=M\frac{1}{(s+1)^2+\gamma}\begin{pmatrix}0&0\\s+1&1\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}\bar{M}&0\\0&\bar{M}\end{pmatrix} \tag{8.7.19}$$

$$N\frac{1}{s+1+\Gamma}N\frac{1}{s+2+\Gamma}=M^2\frac{1}{(s+1)^2+\tilde{\gamma}}\ \frac{1}{(s+2)^2+\gamma}\begin{pmatrix}0&0\\s+2&1\end{pmatrix} \tag{8.7.20}$$

式中，矩阵 γ 中的 γ_1，γ_2 互换便得到 $\tilde{\gamma}$ 矩阵，又注意到 $M^2=\Omega^2$, 故有

$$N\frac{1}{s+1+\Gamma}N\frac{1}{s+2+\Gamma}=\frac{\Omega}{(s+1)^2+\tilde{\gamma}}\ \frac{\Omega}{(s+2)^2+\gamma}\begin{pmatrix}0&0\\s+2&1\end{pmatrix} \tag{8.7.21}$$

又引进记号

$$\begin{aligned}
&d_0 = D_0, \quad \cdots, \quad d_{2n} = D_0\tilde{D}_1\cdots D_{2n} \\
&\tilde{d}_1 = \tilde{D}_0 D_1, \quad \cdots, \quad \tilde{d}_{2n+1} = \tilde{D}_0 D_1 \tilde{D}_2 \cdots D_{2n+1} \\
&d_1 = D_0\tilde{D}_1, \quad \cdots, \quad d_{2n+1} = D_0\tilde{D}_1 D_2 \cdots D_{2n+1}
\end{aligned} \tag{8.7.22}$$

$$D_n = \frac{1}{(s+n)^2+\gamma} \quad , \quad \tilde{D}_n = \frac{1}{(s+n)^2+\tilde{\gamma}}$$

注意到

$$\begin{pmatrix} s & 1 \\ -\bar{\gamma} & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s+n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+n & 1 \\ s+n & s \end{pmatrix} \tag{8.7.23}$$

于是有

$$\begin{aligned}
\tilde{w}(s) = \Bigg\{ & d_0\begin{pmatrix} s & 1 \\ -\bar{\gamma} & s \end{pmatrix} + d_2\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ s(s+2) & s \end{pmatrix} + d_4\begin{pmatrix} s+4 & 1 \\ s(s+4) & s \end{pmatrix} + \cdots \\
& + \frac{M}{\Omega}\left[\tilde{d}_1\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ s(s+1) & s \end{pmatrix} + \tilde{d}_3\begin{pmatrix} s+3 & 1 \\ s(s+3) & s \end{pmatrix} + \cdots\right]\Bigg\} w(0)
\end{aligned} \tag{8.7.24}$$

注意到 $M\tilde{d}_1 = d_1 M$, $M\tilde{d}_3 = d_3 M, \cdots$, 将 (8.7.24) 式中的 $M\tilde{d}_{2n+1}$ 换成 $d_{2n+1}M$, 再对 (8.7.24) 式求逆变换，便得 $u(y)$, $v(y)$. 主要涉及如下逆变换：

$$\begin{aligned}
&l_1 = \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}(s+2n) \quad , \quad l_2 = -\sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1}(s+(2n+1)) \\
&l_3 = \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} \quad , \quad l_4 = -\sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1}
\end{aligned} \tag{8.7.25}$$

设 $l_i(i=1,2,3,4)$ 的逆变换为 L_i

$$L_i = \begin{pmatrix} I_i & & & \\ & \tilde{I}_i & & \\ & & I_i & \\ & & & \tilde{I}_i \end{pmatrix} \tag{8.7.26}$$

$I_i(i=1,2,3,4)$ 的详细计算在附录 A 中给出. 根据 (8.7.24), (8.7.26) 式, 可得出 u_e, u_g, v_e, v_g 的解

$$\begin{pmatrix} u_e \\ u_g \\ v_e \\ v_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ \tilde{I}_2 & \tilde{I}_1 & \tilde{I}_4 & \tilde{I}_3 \\ \dfrac{dI_1}{dy} & \dfrac{dI_2}{dy} & \dfrac{dI_3}{dy} & \dfrac{dI_4}{dy} \\ \dfrac{d\tilde{I}_2}{dy} & \dfrac{d\tilde{I}_1}{dy} & \dfrac{d\tilde{I}_4}{dy} & \dfrac{d\tilde{I}_3}{dy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_e(0) \\ u_g(0) \\ v_e(0) \\ v_g(0) \end{pmatrix} \tag{8.7.27}$$

式中, $u_e(0), u_g(0), v_e(0), v_g(0)$ 为边值; $\tilde{I}_1, \cdots, \tilde{I}_4$ 及 $\dfrac{d\tilde{I}_1}{dy}, \cdots, \dfrac{d\tilde{I}_4}{dy}$, 由 $\mathrm{I}_1, \cdots, I_4$ 及 $\dfrac{dI_1}{dy}, \cdots, \dfrac{dI_4}{dy}$

的 γ_1, γ_1 互换得到.

8.7.2 二能级原子波函数的边值条件及反射率计算

由于自发辐射，激发态原子在离靶面很远的 y_m 处几乎全部向基态原子跃迁，故有

$$
\begin{aligned}
&u_e(y_m) \simeq 0, \qquad v_e(y_m) \simeq 0 \\
&y_m \gg 1, \quad y_m \gg \frac{p_{ey}}{m} \times k_0\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}
\end{aligned} \tag{8.7.28}
$$

其中 1 为规一化的衰波厚度， $y_m \gg 1$ 表明衰波已完全不起作用了；第二个条件中的 $\dfrac{p_{ey}}{m} \times k_0\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1}$ 项表示激发态原子在自发辐射时间 T_1 内飞行的距离，而 y_m 远大于此距离，即激发态原子在到达 y_m 处前已经跃迁到基态. 典型的数据为： $k_0 = \dfrac{2\pi}{640nm}$, 激光在玻璃介质内的全反射角 $\theta = 45°, n = 1.5$, 原子的自发辐射寿命 $T_1 = 10^{-8}$ s,$p_{ey}/m =$ 0.5 m/s, 于是有 $\dfrac{p_{ey}}{m} \times k_0\sqrt{n^2\sin^2\theta - 1} \simeq 1.73$, 如取 $y_m = 7$, 则条件 (8.7.28) 是满足的. 应用 (8.7.27) 式可将 (8.7.28) 式的第一式表示为

$$
\begin{aligned}
u_e(y_m) = I_{1m}u_{e0} + I_{2m}u_{g0} + I_{3m}v_{e0} + I_{4m}v_{g0} = 0 \\
v_e(y_m) = I'_{1m}u_{e0} + I'_{2m}u_{g0} + I'_{3m}v_{e0} + I'_{4m}v_{g0} = 0
\end{aligned} \tag{8.7.29}
$$

下标“ m ”表示在 $y = y_m$ 处取值. 右上标“ $\prime$ ”表示对 y 求导. 由 (8.7.27) 式消去 u_{e0}, v_{e0}, 便得

$$
\begin{aligned}
u_e &= \begin{vmatrix} I_4 & I_1 & I_3 \\ I_{4m} & I_{1m} & I_{3m} \\ I'_{4m} & I'_{1m} & I'_{3m} \end{vmatrix} \frac{v_{g0}}{W(I_{1m}, I_{3m})} + \begin{vmatrix} I_2 & I_1 & I_3 \\ I_{2m} & I_{1m} & I_{3m} \\ I'_{2m} & I'_{1m} & I'_{3m} \end{vmatrix} \frac{u_{g0}}{W(I_{1m}, I_{3m})} \\
&= u_{e1}u_{g0} + u_{e2}v_{g0}
\end{aligned} \tag{8.7.30}
$$

$$
\begin{aligned}
u_g &= \begin{vmatrix} \tilde{I}_3 & \tilde{I}_2 & \tilde{I}_4 \\ I_{4m} & I_{1m} & I_{3m} \\ I'_{4m} & I'_{1m} & I'_{3m} \end{vmatrix} \frac{v_{g0}}{W(I_{1m}, I_{3m})} + \begin{vmatrix} \tilde{I}_1 & \tilde{I}_2 & \tilde{I}_4 \\ I_{2m} & I_{1m} & I_{3m} \\ I_{2m} & I'_{1m} & I'_{3m} \end{vmatrix} \frac{u_{g0}}{W(I_{1m}, I_{3m})} \\
&= u_{g1}u_{g0} + u_{g2}v_{g0}
\end{aligned} \tag{8.7.31}
$$

式中， W 为 Wranski 行列式.

另一方面，我们假定那些已经透过衰波的原子全部被吸附在靶面上. 这就意味着在靠近靶面，即 y 很小时，基态原子波函数具有行波结构：

$$
u_g(y) = u_{g0}e^{i\sqrt{\gamma_2}y} = [\cos(\sqrt{\gamma_2}y) + i\sin(\sqrt{\gamma_2}y)]u_{g0} \tag{8.7.32}
$$

将上式与附录 B 中的方程 (B4) 给出的表示式相比较，可得

$$
v_{g0} = i\sqrt{\gamma_2}u_{g0} \tag{8.7.33}
$$

将上式代入 (8.7.31) 式，给出

$$
\begin{aligned}
&u_g(y) = [u_{g1}(y) + i\sqrt{\gamma_2}u_{g2}]u_{g0} = u_{g0}\rho_g e^{i\theta_g} \\
&\rho_g = \sqrt{u_{g1}^2 + \gamma_2 u_{g2}^2}, \quad \theta_g = \tan^{-1}\frac{\sqrt{\gamma_2}u_{g2}}{u_{g1}}
\end{aligned} \tag{8.7.34}
$$

当 $y_m \gg 1$ 处，波函数 $u_g(y)$ 可表示为入射波 $|A|e^{i\sqrt{\gamma_2}y+\varphi}$ 与反射波 $|B|e^{-i\sqrt{\gamma_2}y+\varphi}$ 的叠加. 于是

$$
\begin{aligned}
u_g(y) = |A|e^{i(\sqrt{\gamma_2}y+\varphi)} + |B|e^{-i(\sqrt{\gamma_2}y+\varphi)} = \rho_{AB}e^{i\varphi_{AB}} = u_{g0}\rho_g e^{i\theta_g} \\
\rho_{AB} = \sqrt{|A|^2 + |B|^2 + 2|AB|\cos 2(\sqrt{\gamma_2}y+\varphi)} = |u_{g0}|\rho_g
\end{aligned}
\tag{8.7.35}
$$

当 $\sqrt{\gamma_2}y + \varphi = n\pi$ 时， $\rho_{AB_{\max}} = |A| + |B| = |u_{g0}|\rho_{\max}$; 当 $\sqrt{\gamma_2}y + \varphi = (n+1/2)\pi$ 时，$\rho_{AB_{\min}} = |A| - |B| = |u_{g0}|\rho_{\min}$. 故反射率 R 可写为

$$
R = \frac{|B|}{|A|} = \frac{\rho_{AB_{\max}} - \rho_{ABmin}}{\rho_{AB_{\max}} + \rho_{AB_{\min}}} = \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{\rho_{\max} + \rho_{\min}} \tag{8.7.36}
$$

将 ρ_g 与 y 的曲线给出的 $\rho_{\max}$，$\rho_{\min}$ 代入上式，便能算出反射率 R.

8.7.3 数值计算与讨论

参见 (8.7.10) 式，我们取定数值计算中的规一化参量为

$$
\begin{aligned}
\gamma_1, \gamma_2 &= \begin{cases} 1.96,\ 12.6 & \text{(负失谐)} \\ 12.6,\ 1.96 & \text{(正失谐)} \end{cases} \\
y_m &= 7, \qquad \Omega = 25.0
\end{aligned}
\tag{8.7.37}
$$

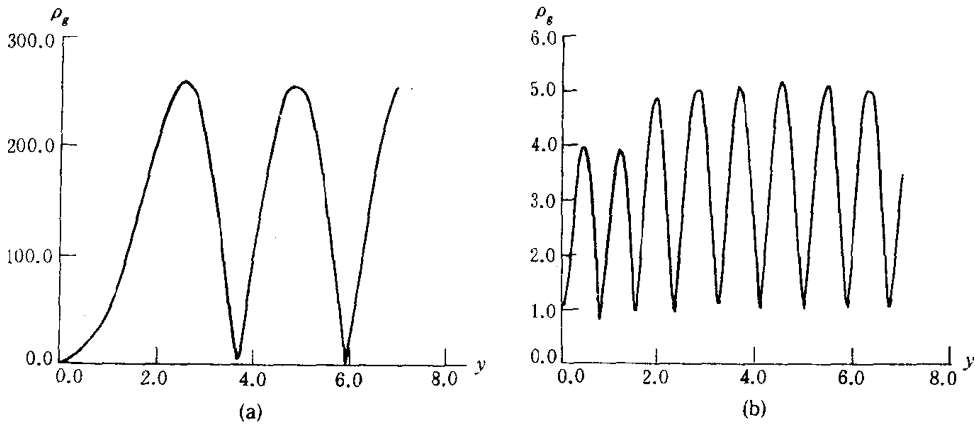


图 8.21 (a) 正失谐情形 ρ_g 随 y 的变化；(b) 负失谐情形 ρ_g 随 y 的变化

(取自文献 [26])

计算出的 ρ_g 随 y 变化的曲线如图 8.21 所示. 分别由图 8.21(a)(b) 读出 $\rho_{\max}$，$\rho_{\min}$，代入方程 (8.7.36), 得 $R = \dfrac{253.89 - 1.09}{253.89 + 1.09} = 0.991$(正失谐), $R = \dfrac{5.156 - 0.928}{5.156 + 0.928} = 0.695$(负失谐). 由于垂直于靶面的平动能 $\gamma_2 = 1.96$, 12.6, 比规一化的 Rabi 频率 $\Omega = 25$ 小很多，故不论是正失谐还是负失谐，反射率 R 均是很高的. 现在改变 Rabi 频率 Ω, 计算正失谐、负失谐情况下，反射系数 R 随 Ω 变化，这时 γ_1, γ_2 保持图 8.21 中的数值. 计算结果见图 8.22，从中可见三点：第一，当 Ω 很小时，作用于原子上的力趋于 0, 像预期的那样，这时的反射率 R 不论是正失谐还是负失谐情形均趋于 0; 第二，一般来讲，正失谐情形的反射率要比负失谐情形的反射率高很多；第三，负失谐情形的 R 曲线表现出振荡，其

极大值发生在 $\Omega = 12.5,\ 25,\ 37.5,\ 50,\ \cdots$, 相邻极大值的间距 $\Delta\Omega \simeq 12.5$.

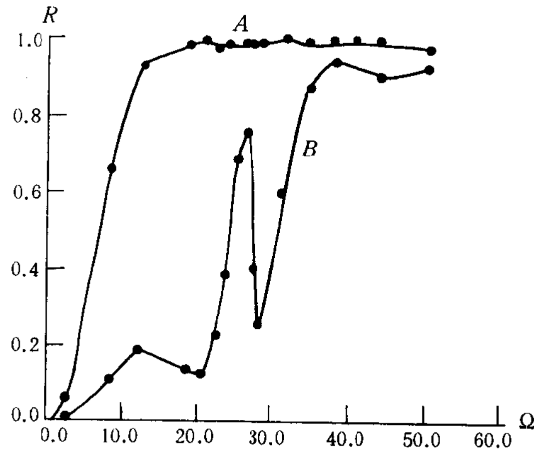


图 8.22 曲线 A: 正失谐情形反射率 R 随 Rabi 频率 Ω 的变化；曲线 B: 负失谐情形反射率 R 随 Rabi 频率 Ω 的变化 (取自文献 [26])

附录 A　$I_1,\ I_2,\ I_3,\ I_4$ 的计算

首先我们求出 l_3 的反演 L_3. 按 (8.7.25) 式，有

$$l_3 = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_{2n} \tag{A1}$$

这里

$$d_0 = D_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2+\nu_1^2} & & & \\ & \frac{1}{s^2+\nu_2^2} & & \\ & & \frac{1}{s^2+\nu_1^2} & \\ & & & \frac{1}{s^2+\nu_2^2} \end{pmatrix} \tag{A2}$$

$\nu_1 = \sqrt{\gamma_1}$, $\nu_2 = \sqrt{\gamma_2}$, $d_{2n}(= D_0\tilde{D}_1 \cdots D_{2n})$ 是一个 4×4 对角矩阵. 为了方便起见，我们这里仅给出对角矩阵中第一个对角矩阵元的反演，并且采用相同的记号来表示. 例如，d_0 的第一个对角矩阵元的反演可表示为

$$d_0 = \frac{1}{s^2+\nu_1^2} = \frac{1}{(s+i\nu_1)(s-i\nu_1)} \Rightarrow \frac{\sin\nu_1 y}{\nu_1} \tag{A3}$$

比较复杂的 d_{2n} 的反演可按以下步骤进行：

$$d_{2n} = D_0\tilde{D}_1 D_2 \cdots D_{2n} = (D_0 D_2 \cdots D_{2n})(\tilde{D}_1\tilde{D}_3 \cdots \tilde{D}_{2n-1}) \tag{A4}$$

其中因子 $D_0\ D_1 \cdots D_{2n}$ 有如下的反演：

$$\begin{aligned} D_0 D_2 \cdots D_{2n} \;=\;& \Omega^n \frac{1}{(s+i\nu_1)(s+2+i\nu_1)\cdots(s+2n+i\nu_1)} \\ & \times \frac{1}{(s-i\nu_1)(s+2-i\nu_1)\cdots(s+2n-i\nu_1)} \\ \Rightarrow\;& \frac{\Omega^n}{(n!)^2}\int_0^y e^{-i\nu_1 y'+i\nu_1(y-y')}\left(\frac{1-e^{-2y'}}{2}\times\frac{1-e^{-2(y-y')}}{2}\right)^n dy' \end{aligned} \tag{A5}$$

同理 $\tilde{D}_1\cdots\tilde{D}_{2n-1}$ 的反演为

$$\begin{aligned}
&\tilde{D}_1\tilde{D}_3\cdots\tilde{D}_{2n-1}\\
=\ &\Omega^n\frac{1}{(s+1+i\nu_2)\cdots(s+(2n-1)+i\nu_2)}\\
&\times\frac{1}{(s+1-i\nu_2)\cdots(s+(2n-1)-i\nu_2)}\\
\Rightarrow\ &\frac{\Omega^n}{(n-1)!^2}\int_0^y e^{-y-i\nu_2 y'+i\nu_2(y-y')}\left(\frac{1-e^{-2y'}}{2}\times\frac{1-e^{-2(y-y')}}{2}\right)^{n-1}dy'
\end{aligned}\tag{A6}$$

因此 l_3 的反演对角矩阵 L_3 的第一个矩阵元 $I_3=(L_3)_{11}$ 为

$$\begin{aligned}
I_3=(L_3)_{11}=\frac{\sin\nu_1 y}{\nu_1}+&\int_0^y dy_1\int_0^{y_1/2}du_1\int_0^{(y-y_1)/2}du_2 4e^{-(y-y')}\cos(2\nu_1)\cos(2\nu_2 u_2)\\
&\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega^{2n}}{(n!)^2((n-1)!)^2}\left(\frac{1-e^{-2(u_1+y_1/2)}}{2}\times\frac{1-e^{-2(-u_1+y_1/2)}}{2}\right)^n\\
&\times\left(\frac{1-e^{-2(u_2+(y-y_1)/2)}}{2}\times\frac{1-e^{-2(-u_2+(y-y_1)/2)}}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}\tag{A7}$$

至此，我们已经求得 I_3 的表示式，I_1，I_2，I_4 的计算可按上述过程进行，这里直接给出它们的最终表示式：

$$\begin{aligned}
I_1=(L_1)_{11}\ =\ &\cos(\nu_1 y)+\int_0^y dy_1\int_0^{y_1/2}du_1\int_0^{(y-y_1)/2}du_2 4e^{-(y-y_1)}\cos(2\nu_1 u_1)\cos(2\nu_2 u_2)\\
&\times\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-2(u_1+y_1/2)}}{2}+\frac{1-e^{-2(-u_1+y_1/2)}}{2}\right)\\
&\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega^{2n}}{n!((n-1)!)^3}\left(\frac{1-e^{-2(u_1+y_1/2)}}{2}\times\frac{1-e^{-2(-u_1+y_1/2)}}{2}\right)^{n-1}\\
&\times\left(\frac{1-e^{-2(u_2+(y-y_1)/2)}}{2}\times\frac{1-e^{-2(-u_2+(y-y_1)/2)}}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}\tag{A8}$$

$$\begin{aligned}
I_4=(L_4)_{11}\ =\ &-\int_0^y dy_1\int_0^{y_1/2}du_1\int_0^{(y-y_1)/2}du_2 4e^{-(y-y_1)}\cos(2\nu_1 u_1)\cos(2\nu_2 u_2)\\
&\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Omega^{2n+1}}{(n!)^4}\left(\frac{1-e^{-2(u_1+y_1/2)}}{2}\times\frac{1-e^{-2(-u_1+y_1/2)}}{2}\right)^n\\
&\times\left(\frac{1-e^{-2(u_2+(y-y_1)/2)}}{2}\times\frac{1-e^{-2(-u_2+(y-y_1)/2)}}{2}\right)^n
\end{aligned}\tag{A9}$$

$$
\begin{aligned}
I_2=(L_2)_{11} \quad = \quad & -\frac{\Omega}{2\nu_1}\left\{\frac{\sin(\nu_1 y)-(\nu_1+\nu_2)\cos(\nu_1 y)}{1+(\nu_1+\nu_2)^2}-e^{-y}\frac{-\sin(\nu_2 y)-(\nu_1+\nu_2)\cos(\nu_2 y)}{1+(\nu_1+\nu_2)^2}\right. \\
& \left.+\frac{\sin(\nu_1 y)-(\nu_1-\nu_2)\cos(\nu_1 y)}{1+(\nu_1-\nu_2)^2}-e^{-y}\frac{\sin(\nu_2 y)-(\nu_1-\nu_2)\cos(\nu_2 y)}{1+(\nu_1-\nu_2)^2}\right\} \\
& -\int_0^y dy_1\int_0^{y_1/2}du_1\int_0^{(y-y_1)/2}du_2 4e^{-(y-y_1)}\cos(2\nu_1 u_1)\cos(2\nu_2 u_2) \\
& \times\frac{1}{2}\left(\frac{1-e^{-2(u_2+(y-y_1)/2)}}{2}+\frac{1-e^{-2(-u_2+(y-y_1)/2)}}{2}\right) \\
& \times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Omega^{2n+1}}{(n!)^3(n-1)!}\left(\frac{1-e^{-2(u_1+y_1/2)}}{2}\times\frac{1-e^{-2(-u_1+y_1/2)}}{2}\right)^n \\
& \times\left(\frac{1-e^{-2(u_2+(y-y_1)/2)}}{2}\times\frac{1-e^{-2(-u_2+(y-y_1)/2)}}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned} \tag{A10}
$$

附录 B　当 y 很小时 $u_g(y)$ 的极限解

当原子在靶面附近时，y 很小，根据 (A6)~ (A9) 诸式，(8.7.28) 式中的矩阵元 $I_1,\cdots,I_4$ 有极限：

$$I_1=\cos\nu_1 y+O(y^2)\simeq\cos\nu_1 y \tag{B1}$$

$$I_3=\frac{\sin\nu_1 y}{\nu_1}+O(y^2)\simeq\frac{\sin\nu_1 y}{\nu_1} \tag{B2}$$

$$I_2=I_4=O(y^2)\simeq 0 \tag{B3}$$

根据 (8.7.31) 式，我们得到 y 很小时 $u_g(y)$ 的极限解

$$u_g(y)=\cos(\nu_2 y)u_{g0}+\frac{\sin(\nu_2 y)}{\nu_2}v_{g0} \tag{B4}$$

第九章　超短光脉冲的传播与锁定

9.1 光脉冲波包

通常所说的光脉冲指的是波包光脉冲，即以高载频 ω_0 传送但振幅缓慢变化的波包．若波包用复振幅 $E(x,t)$ 来描述，而光频载波为 $e^{i(k_0x-\omega_0t)}$，则电场 E 可写为

$$E=\mathrm{Re}\left\{E(x,t)e^{i(k_0x-\omega_0t)}\right\} \tag{9.1.1}$$

如图 9.1(a) 所示，$E(t)$ 除了迅速变化的载波 (实线)，还有振幅缓慢变化的波包 (虚线)，也称之为调制波．对 $E(t)$ 进行 Fourier 分析后的频谱 $E(\omega)$，除了峰值载频 ω_0 外，还有许多旁频，与载频相距 $n\Delta\omega_0$，$\Delta\omega_0$ 为调制频率 (见图 9.1(b))．

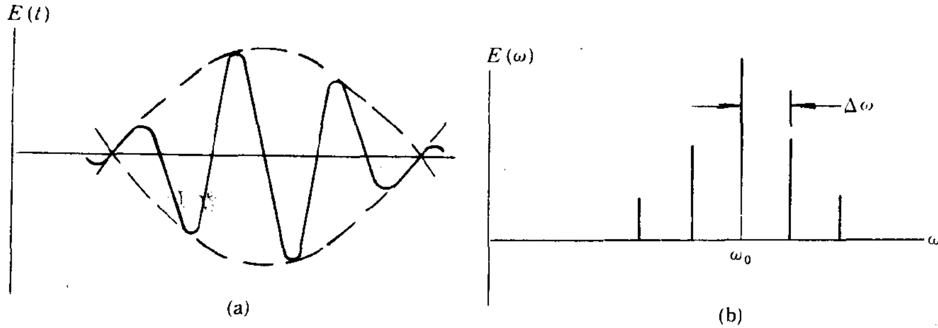


图 9.1　调制波 (a) 与调制频率 (b)

当光脉冲在色散介质中传播时，由于色散，不同频率的波，其传播速度是不一样的，折射率为频率 ω 的函数，$n=n(\omega)$．若将波数 $k=\dfrac{n\omega}{c}$ 在载波 (k_0,ω_0) 附近展开 [1]：

$$\begin{aligned}k-k_0&=\frac{\partial k}{\partial\omega}|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2k}{\partial\omega^2}|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{6}\frac{\partial^3k}{\partial\omega^3}|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^3+\cdots\\&=k'(\omega-\omega_0)+\frac{1}{2}k''(\omega-\omega_0)^2+\frac{1}{6}k^{(3)}(\omega-\omega_0)^3+\cdots\end{aligned} \tag{9.1.2}$$

将上式乘在 $E(x,t)$ 的 Fourier 谱 $\tilde{E}(\Delta k,\Delta\omega)$ 上等价于将下面算子：

$$-i\frac{\partial}{\partial x}=ik'\frac{\partial}{\partial t}-\frac{k''}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-i\frac{k^{(3)}}{6}\frac{\partial^3}{\partial t^3}+\cdots \tag{9.1.3}$$

作用在 $E(x,t)$ 上．这从 $E(x,t)$ 与 $\tilde{E}(\Delta k,\Delta\omega)$ 的关系式

$$E(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{E}(\Delta k,\Delta\omega)e^{-i(\Delta\omega t-\Delta kx)}d\Delta kd\Delta\omega \tag{9.1.4}$$

可以看出来．由上式易判明 $\dfrac{\partial E}{\partial t}$，$\dfrac{\partial E}{\partial x}$ 的 Fourier 谱即为 $-i\Delta\omega\tilde{E}$，$i\Delta k\tilde{E}$，故有 $\dfrac{\partial}{\partial t}\Rightarrow-i\Delta\omega$，$\dfrac{\partial}{\partial x}\Rightarrow i\Delta k$．应用这些关系，就能由 (9.1.2) 式得出 (9.1.3) 式．

由 (9.1.3) 式便得波包 $E(x,t)$ 所满足的传播方程 (暂略去 $\dfrac{-ik^{(3)}}{6}\dfrac{\partial^3}{\partial t^3}E(x,t)$ 项) 为

$$i\left(\frac{\partial}{\partial x}+k'\frac{\partial}{\partial t}\right)E-\frac{k''}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=0 \tag{9.1.5}$$

式中

$$k'=\frac{\partial k}{\partial \omega}|_{\omega_0}=\frac{1}{v_g} \tag{9.1.6}$$

$$k''=\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{1}{v_g}\right)=-\frac{1}{v_g^2}\frac{\partial v_g}{\partial \omega} \tag{9.1.7}$$

故调制波运动的速度为波的群速度 v_g. 由于不同频率的波传播速度不一样，波包还会进一步扩散. 只有当 $k''=0$, 即 $\frac{\partial v_g}{\partial \omega}=0$ 才是没有扩散的波. 一般的 $k''\neq 0$, 在 (9.1.5) 式中 $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ 称为波的色散项. 若采用以 v_g 跟随光脉冲运动的坐标系

$$\xi=\varepsilon^2 x, \qquad \tau=\varepsilon(t-k'x), \qquad \varepsilon=\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \tag{9.1.8}$$

可将 (9.1.5) 式写为

$$i\frac{\partial E}{\partial \xi}-\frac{k''}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2}=0 \tag{9.1.9}$$

参量 ε 表示光脉冲的相对谱宽. 色散项 $\frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2}$ 将反比于 $(\Delta\omega_0)^2$ 而增大. 当光脉冲在光纤中传播时，光纤横向尺寸与光波波长同量级. 群速度的色散系数 k'' 由玻璃介质的性质决定. 已经知道，当 $\lambda=1.3\mu$(为零色散波长) 时， $k''=0$; 当 $\lambda<1.3\mu$ 时， $k''>0$, 为正常色散区；当 $\lambda>1.3\mu$ 时， $k''<0$, 为反常色散区. 又知道光脉冲在光纤中传播，由于 Rayleigh 散射及分子振动带来的损耗，在 $\lambda=1.5\mu$ 有极小值. 若将载波波长取在损耗最小的 1.5μ, 则正好是 $\lambda>1.3\mu$ 的负色散区. 由于群速度的色散，光脉冲波包在传播过程中会形变. 已知波包传播速度不但依赖于玻璃的材料性质，还依赖于波导结构 [2]. 通过横截面上折射率梯度的设计，将零色散波长由 1.3μ 移至 1.5μ 是可能的. 最典型的参量是 k'' 大小在 $-10\text{ps}^2/\text{km}$ 量级. 这就意味着传输 1km 后，脉冲会有几个 ps 的形变.

上面所讨论光脉冲的传输方程为线性方程，介质的性质，如折射率等，均为预先给定的，与光强无关. 若考虑到折射率依赖于光强，如在 1.5 节中所做过的那样，有

$$n=n_0(\omega)+n_2|E|^2 \tag{9.1.10}$$

n_2 称为 Kerr 系数. 对于玻璃光纤来说， $n_2\simeq 1.2\times10^{-22}\text{m}^2/\text{V}^2$.Kerr 效应来源于在光场作用下轨道电子发生的形变，故 Kerr 效应的响应时间极短，约 10^{-15}s. 典型的光纤数据为，横截面积 $60\mu\text{m}^2$, 通过的光功率为 100mW, 产生的场强为 10^6V/m, n_2E^2 在 10^{-10} 量级. 按关系 $k=\frac{n\omega}{c}$, $\Delta k=\frac{n_2E^2\omega}{c}$ 就是光脉冲在 Kerr 介质中传播的波数变化. 若取 λ 为 1.5μ, 则 $\Delta k\simeq 0.6/1\text{km}$. 将这样一个变化考虑到传播方程中去，便得

$$\begin{aligned} &k-k_0=k'(\omega-\omega_0)+\frac{k''}{2}(\omega-\omega_0)^2+\Delta k \\ &i\frac{\partial E}{\partial \xi}-\frac{k''}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2}+g\frac{|E|^2E}{\varepsilon^2}=0, \quad g=\frac{2\pi n_2\alpha}{\lambda} \end{aligned} \tag{9.1.11}$$

式中， α 为考虑到光强在横截面的分布不均匀而引进的因子，一般取为 1/2. (9.1.11) 式

即我们在第一章中详细研究过的非线性 Schrödinger 方程. 现引进规一化参量

$$q=\frac{\sqrt{g\lambda}}{\varepsilon}E,\qquad T=\frac{\tau}{(-\lambda k'')^{1/2}},\qquad z=\frac{\xi}{\lambda} \tag{9.1.12}$$

将方程 (9.1.11) 规一化，便得

$$i\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2}+|q|^2q=0 \tag{9.1.13}$$

其孤立波解为

$$q(T,z)=\eta\ \mathrm{sech}\,[\eta(T+\kappa z-\theta_0)]\exp\left\{-i\kappa T+\frac{i}{2}(\eta^2-\kappa^2)z-i\sigma_0\right\} \tag{9.1.14}$$

这个解有四个参量，其中 η 为孤立波峰值， κ^{-1} 表示波的传播速率偏离 (即相对于群速度的偏离), 还有表示初始位置参量 θ_0 与初相位参量 σ_0. 波的峰值 η 与波的半宽度成反比，但波的传播速率偏离 κ^{-1} 却与 η 无关.

还有重要的一点，即孤立波的存在是光波波长处于反常色散区，即 k'' 为负. 若是处于正常区， $k''>0$, 孤立波解仅在暗区成立，即所谓暗孤子.

9.2 光纤中孤子的形成

上节谈道在无损耗情况下在 Kerr 介质中传输的光波会形成一个波包孤子，但实际光纤中总是会有损耗的，而且电介质波导也会对孤子的形成产生影响. 设单位长度的损耗为 γ, 则方程 (9.1.11) 中应加上损耗项 $\dfrac{-i\gamma E}{\varepsilon^2}$, 即

$$i\frac{\partial E}{\partial \xi}-\frac{k''}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2}+g\frac{|E|^2E}{\varepsilon^2}=\frac{-i\gamma E}{\varepsilon^2} \tag{9.2.1}$$

规一化后，可写为

$$i\frac{\partial q}{\partial z}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2}+|q|^2q=-i\Gamma q,\quad \Gamma=\frac{\gamma\lambda}{\varepsilon^2} \tag{9.2.2}$$

只有当非线性项 $g|E|^2=\dfrac{2\pi n_2\alpha|E|^2}{\lambda}>\gamma$ 的情况下，才有可能形成孤子. 例如取 $|E|=10^6\mathrm{V/m}$, $\lambda=1.5\mu$, 则非线性项为 $2\times10^{-4}\mathrm{m}^{-1}$ 量级. 故损耗 γ 必须小于 $2\times10^{-4}\mathrm{m}^{-1}$, 才可能形成孤子. 这个损耗相当于 1dB/km 左右，而市场上的光纤损耗为 0.2dB/km.

当损耗很小时，方程 (9.2.2) 的解可应用微扰法求得

$$\begin{aligned} q(T,z) &= \eta(z)\mathrm{sech}[\eta(z)T]e^{i\sigma(z)}+O(\gamma)\\ \eta(z) &= q_0\exp(-2\Gamma z)\\ \sigma(z) &= \frac{q_0^2}{8\Gamma}[1-\exp(-4\Gamma z)] \end{aligned} \tag{9.2.3}$$

(9.2.3) 式表明孤子振幅随着传输距离 z 而指数衰减，但宽度则按 $\exp(2\Gamma z)$ 而指数增加. 孤子能量 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\eta^2\mathrm{sech}^2(\eta T)dT=\eta(z)$ 也是正比于 $e^{-2\Gamma z}$ 而指数衰减的. 这种损耗可通过 Ramann 散射得到补偿，以维持孤子的能量不变.

至此，我们讨论的非线性孤子方程是一维的，而光纤的截面有限，电磁波在其中传播的横向效应未考虑进去．但理论已证明，只要光纤的横向尺寸比波长大，一维非线性孤立波方程还是适用的．当需要考虑高阶效应时，(9.2.2) 式可推广为 [2]

$$i\left(\frac{\partial q}{\partial z}+\Gamma q\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2}+|q|^2q+i\varepsilon\left\{\beta_1\frac{\partial^3 q}{\partial T^3}+\beta_2\frac{\partial}{\partial T}(|q|^2q)+\beta_3 q\frac{\partial}{\partial T}|q|^2\right\}=0 \tag{9.2.4}$$

式中

$$\begin{aligned}&q=\frac{\sqrt{g\lambda}}{\varepsilon}E,\qquad z=\frac{\xi}{\lambda},\qquad \Gamma=\frac{\gamma\lambda}{\varepsilon^2}\\&T=\frac{\tau}{T_0}=\frac{\varepsilon(t-x/v_g)}{(-\lambda k'')^{1/2}},\qquad T_0=(-\lambda k'')^{1/2}\end{aligned} \tag{9.2.5}$$

而 $k''=\dfrac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}$，考虑到光纤波导效应后的波矢 k 由下式确定：

$$k^2=\frac{(\omega/c)^2\displaystyle\int|\nabla_\perp\phi|^2 n_0 dS-\int|\nabla_\perp^2\phi|^2dS}{\displaystyle\int|\nabla_\perp\phi|^2dS} \tag{9.2.6}$$

式中，ϕ 为电场的横向分量的势．$E_\perp=\nabla_\perp\phi\times\hat{z}$，$\phi$ 满足如下的方程：

$$\nabla_\perp^2\phi-k^{(0)2}\phi+\frac{\omega^2}{c^2}n_0^2\phi=0 \tag{9.2.7}$$

且

$$\int|\nabla_\perp\phi|^2dS=s_0E_0^2 \tag{9.2.8}$$

式中，E_0 为光波导内电场的峰值强度．非线性系数 $g\simeq\dfrac{\pi n_2}{\lambda}$，高阶项的系数为

$$\begin{aligned}\beta_1&=\frac{1}{6}\frac{k'''\lambda}{T_0^3},\qquad \lambda=\frac{2\pi}{k}\\\beta_2&=\frac{1}{gT_0}\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\frac{\omega^2}{kc^2s_0E_0^4}\int n_0n_2|\nabla\phi|^4dS\right]\\\beta_3&=\frac{1}{gT_0}\frac{\omega^2}{kc^2s_0E_0^4}\int\left[n_0n_2\frac{\partial|\nabla\phi|^4}{\partial\omega_0}+\frac{3}{4}(\chi_1^{(2)}-\chi_{-1}^{(2)})|\nabla\phi|^4\right]dS\end{aligned} \tag{9.2.9}$$

式中，β_1 表示高阶线性色散，β_2 为 Kerr 效应引起的非线性色散，β_3 为 Ramann 散射引起的非线性损耗．

现在估算一下在光纤中产生孤子的入射功率条件．由锁模激光输出的光脉冲峰值功率 P_0 为

$$P_0=IS^2 \tag{9.2.10}$$

式中，S 为有效截面，I 为光脉冲强度，可通过脉冲的峰值场强 E_0 表示为 [50]

$$I=\frac{2n_0}{z_0}|E_0|^2 \tag{9.2.11}$$

式中，n_0 为折射率，$n_0\simeq1.5$，$z_0=377\Omega$．参照 $N=1$ 孤子解 $q=\eta\,\mathrm{sech}(\eta T)$，取定半峰值功率，即 $\eta T=1.76$ 处为其脉宽，又参照 q，T 的表达式 (9.2.5)，η 即 $T=0$ 时的 q 值，并注意到 τ 的定义 (9.1.8) 式，将 τ 写为 $\varepsilon\Delta t$，得

$$
\sqrt{\frac{\pi n_2}{\lambda}}\frac{\sqrt{\lambda}}{\varepsilon}E_0\frac{\varepsilon\Delta t}{(-\lambda k'')^{1/2}}=1.76 \tag{9.2.12}
$$

即

$$
\sqrt{\pi n_2}E_0\Delta t=1.76(-\lambda k'')^{1/2} \tag{9.2.13}
$$

参照前面取 $-k''$ 为 $10\text{ps}^2/\text{km}$, $\lambda=1.5\mu\text{m}$, $n_2=1.2\times10^{-22}\text{m}^2/\text{V}^2$, 于是由 (9.2.13) 式得

$$
\Delta tE_0=1.11\times10^7\text{ps}\cdot\text{V/m} \tag{9.2.14}
$$

根据这结果及 (9.2.11),(9.2.10) 式，可估算当 S 取 $60\mu\text{m}^2$, Δt 取为 10ps 时，必要的脉冲功率 $P_0=\frac{2n_0}{z}|E_0|^2S=0.57\text{W}$. 如果有效截面降为 $20\mu\text{m}^2$, 而光纤具有更小的色散 $-k''=1\text{ps}^2/\text{km}$, Δt 仍为 10ps, 那么 P_0 可降至 19mW.

上面的计算未计及光纤损耗. 若考虑到光纤损耗，应有非线性项 $g|E|^2>\gamma$. 由 (9.2.14) 式得 $E_0=1.11\times10^6\text{V/m}$, 于是

$$
gE_0^2=\frac{2\pi n_2E_0^2}{\lambda}=5.9\times10^4/\text{m}=2.2\text{dB/km} \tag{9.2.15}
$$

即

$$
gE_0^2\gg\gamma\simeq0.2\text{dB/km} \tag{9.2.16}
$$

如光纤损耗能通过 Ramann 增益得到补偿，对功率密度的要求 (9.2.16) 式就不必了.

为了在实验上从光脉冲的传播得到孤子，一方面光脉冲的峰值功率应很高，另一方面光纤的损耗应很小 (<1dB/km), 还要求光脉冲的谱宽应比脉宽窄，即 $\Delta\nu<1/\Delta\tau$.1980 年 Mollenauer 第一次证实了通过光纤的传输获得孤子 [3]. 他们用 Nd:YAG 激光泵浦色心 F^{2+} 激光器，并用长 700m 截面为 10^{-6}cm^2 的光纤，短脉冲的峰值功率为 1.2W, 经光纤传输后的输出表现出周期结构 (见图 9.2). 这与 1.10 节中 $N=1$, 3 的数值计算结果相符. 产生 $N=1$ 孤子的阈值为 $P=1.2\text{W}$, 然后增加 P 至 11.4W 时，出现 $N=3$ 孤子.

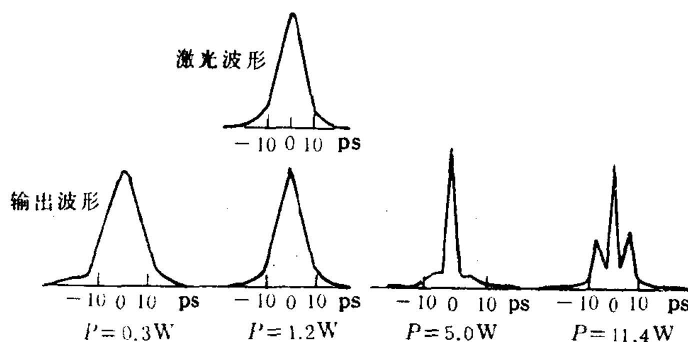


图 9.2 实验中观测到的孤子的形成

(参照 Mollenauer [3])

9.3 孤子的 Ramann 放大

光纤损耗使得孤子峰值在传播过程中逐渐下降，宽度逐渐增宽. 从光纤通信的目的出发，必须对长距传输的孤子增幅与整形. 用半导体激光泵浦掺铒光纤的放大作用或

光纤自身的 Ramann 散射增益均是有效途径．经 Ramann 放大后的孤立波振幅增大，而脉宽也相应压缩了．参见图 9.3, Ramann 放大几乎正好抵销了损耗的减幅与增宽，使孤子不变形地传播着．实验中的传播距离为 10km, 光纤的损耗为 1.8dB, 群速度色散 $D(k'' = D\dfrac{\lambda^2}{2\pi c})$ 为 -15ps/(nm· km), 波长 $\lambda = 1.56\mu$ m, 由色心激光器产生．而 Ramann 泵浦波长为 1.46μm, 由输出端注入．图 9.3 表明，如没有泵浦波，孤子宽度就增加．若将

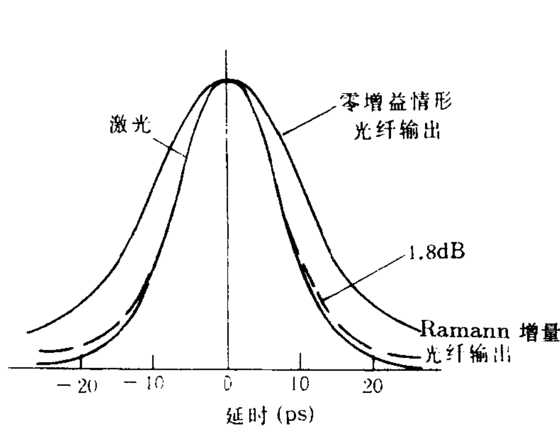


图 9.3 实验中观察到的通过 Ramann 放大后光孤子整形

(参照文献 Mollenauer [5])

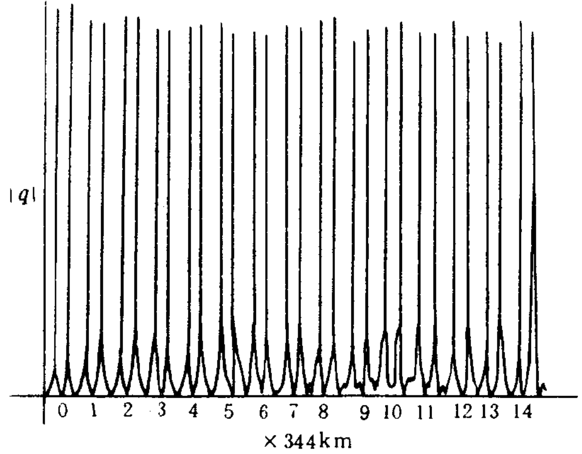


图 9.4 孤子对的传输模拟

(参照 Desurvire [8])

泵浦波功率调至 125mW, 孤子宽度几乎同初始的一样保持不变．孤子波 E_s 与 Ramann 泵浦波 E_p 的耦合可通过如下方程来描述：

$$i\left[\frac{\partial E_p}{\partial x} + (\gamma_p + \alpha|E_s|^2)E_p - k'_p\frac{\partial E_p}{\partial t}\right] - \frac{k''_p}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial t^2} + g|E_p|^2E_p = 0 \tag{9.3.1}$$

$$i\left[\frac{\partial E_s}{\partial x} + (\gamma_s - \alpha|E_p|^2)E_s - k'_s\frac{\partial E_s}{\partial t}\right] - \frac{k''_s}{2}\frac{\partial^2 E_s}{\partial t^2} + g|E_s|^2E_s = 0 \tag{9.3.2}$$

E_p 的带宽要足够大 ($\geqslant$ 15GHz), 以抑制受激布里散射． Ramann 散射系数 α 与自相位调制系数 g 在文献 [6] 中取为 $\alpha \simeq 0.2g$.

现举一光纤孤子的 Ramann 放大实例 [7]. 光纤截面 20μm^2, 损耗 0.2dB/km, 孤子的载波波长 $\lambda = 1.55\mu$m, 峰值功率 30mW, 孤子的脉宽 10.2ps, 重复周期为 100ps(10Gbit/s). 为了孤子整形，采用 Ramann 泵浦从前向与后向注入光纤，每 344km 注入一次． Ramann 泵浦为连续波，功率为 40mW, 波长为 1.45μm. 从两个方向注入的目的，是在光纤的任意位置均能保持相对恒定的增益，而不受损耗的影响．为减小所需泵浦波的强度，可采用保偏光纤，这样 Ramann 增益可以相对地高，只要泵浦波与孤立波取于同一偏振方向．我们注意到，形成孤子所必需的 Kerr 效应并不依赖于偏振方向；而 Ramann 增益则依赖于泵浦波偏振方向与孤立波偏振方向间的夹角．偏振方向相互平行的 Ramann 增益约为互相垂直情况下 Ramann 增益的 5 倍．为避免孤子间相互作用，孤子间的距离应大于 8 倍孤子脉宽．

泵浦波是沿光纤行进中周期注入的，故 Ramann 增益也是周期地加在孤子上．有增益时，光纤孤子脉宽被压缩，增益停止，孤子脉宽又膨胀．图 9.4 给出按方程 (9.3.1) 计算机模拟传输一对孤子 (脉宽 10ps, 间隔 100ps) 的结果 [8]. 每传输 344km 输出一次计算

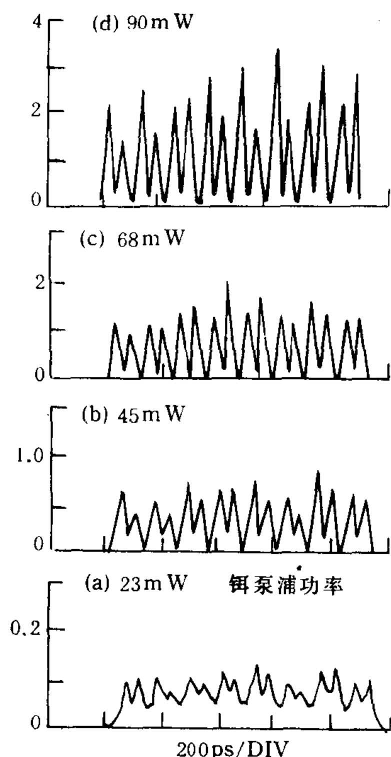


图 9.5 当铒泵浦功率逐渐增大，脉冲串形成分离的孤子的实验结果

(参照 Hasegawa [1])

结果，共传送 4816km, 孤子对的波形是稳定的，未见明显变坏.

实验上， 1988 年 Mollenauer 与 Smith 等 [9] 成功地传送了一个孤子达 6000km, 损耗由 Ramann 增益周期地补偿，保证了孤子波形与宽度不变.

除了通过光纤自身的 Ramann 放大补偿损耗外，用激光二极管泵浦掺铒光纤使之对孤子信号产生放大也是重要途径. 图 9.5 表明当泵浦铒的功率增加时，原来已相互重叠的脉冲串又逐渐分离开来，形成由孤子形成的脉冲串 [10].

孤子除用作光纤通讯的信息载体外，还可将锁模激光输出注入光纤，待其演化形成孤子后再反馈锁模激光振荡器. 多次注入反馈，脉宽不断被压缩，最后得出亚微微秒脉宽的孤子激光器. Mollenauer 等 [11] 就是应用如图 9.6 所示的实验装置得出 $N=2$ 的孤子激光输出的.

由同步泵浦的色心激光输出经 S 分束后进入具有反常色散的保偏光纤，并经同一光纤反馈回激光腔. 令人迷惑不解的是这样的孤子激光系统仅给出 $N=2$ 的稳定孤子激光输出. Haus 等已给出这一现象的理论解释 [12].

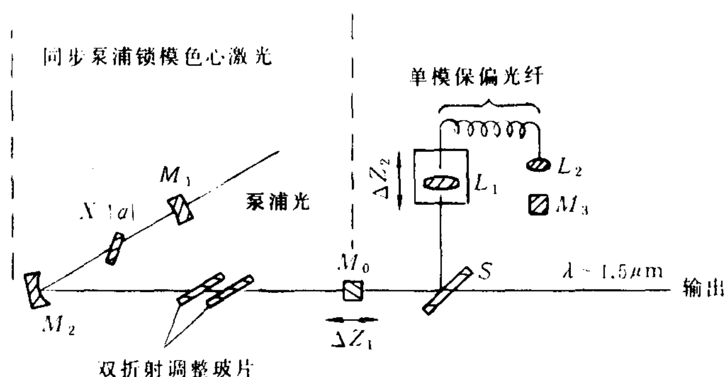


图 9.6 孤子激光器实验装置示意图 (参照 Mollenauer [11])

光纤中的 Ramann 增益还可以用来做成 Ramann 光纤激光器 [13].

9.4 暗 孤 子

若 $k''>0$, 则非线性 Schrödinger 方程 (9.1.11) 应用新的变量 $T=\dfrac{\tau}{(\lambda k'')^{1/2}}$ 进行规一化，得

$$i\frac{\partial q}{\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2}+|q|^2q=0 \tag{9.4.1}$$

q 与 z 的定义仍与 (9.1.2) 式同. 方程 (9.4.1) 只存在强度凹下去的暗孤子解. 将 q 表示为

$q=\sqrt{\rho}e^{i\sigma}$, 代入 (9.4.1) 式，并考虑到稳态解满足 $\dfrac{\partial\rho}{\partial z}=0$, 经过一些演算便得 [14]

$$\left(\frac{d\rho}{dT}\right)^2=4(\rho-\rho_0)^2(\rho-\rho_s) \tag{9.4.2}$$

积分得

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0[1-a^2\mathrm{sech}^2(\sqrt{\rho_0}aT)]\\ a^2 &= \frac{\rho_0-\rho_s}{\rho_0}\leq 1\end{aligned} \tag{9.4.3}$$

$$\sigma=[\rho_0(1-a^2)]^{1/2}+\tan^{-1}\left[\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}\tanh(\sqrt{\rho_0}aT)\right]-\frac{\rho_0(3-a^2)}{2}z \tag{9.4.4}$$

与前面讨论过的亮孤子不一样，暗孤子解还有一个标志孤子深度的参数 a, 只有当 $a=1$ 时暗孤子解才过渡到

$$|q|=\sqrt{\rho}=\sqrt{\rho_0}\tanh(\sqrt{\rho_0}T) \tag{9.4.5}$$

当 T 由 $-\infty$ 至 ∞ 时，由 (9.4.4) 式看出暗孤子位相将发生 π 的变化，而亮孤子则没有这种变化. 数学上称暗孤子为拓朴性孤子，而亮孤子为非拓朴性孤子 (见图 9.7).

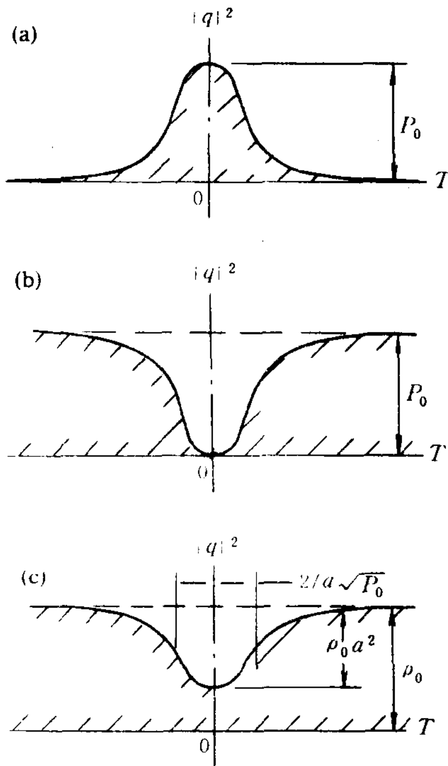


图 9.7 亮孤子 (a)、暗孤子 (b) 与暗孤子 (c) 的轮廓曲线

(参照 [1])

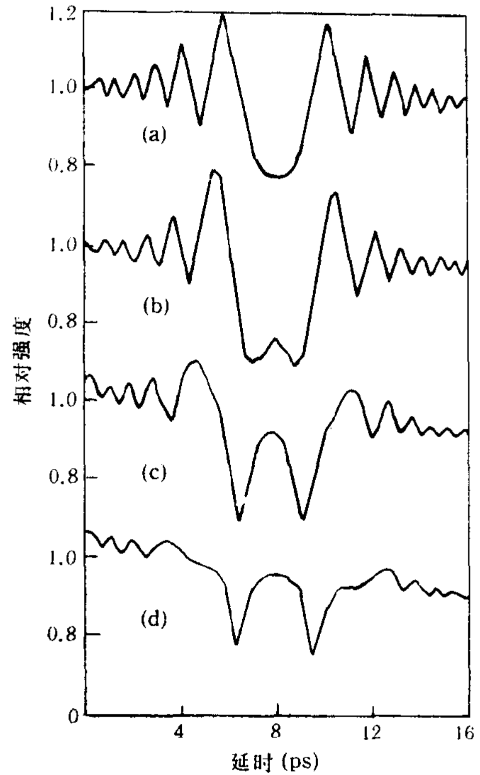


图 9.8 暗孤子形成的实验结果

(a) 0.2 W; (b) 2 W; (c) 9 W; (d) 20 W

(参照 Krökel [15])

方程 (9.4.1) 进行 Galilei 变换 $T=T'+uz'$, $z=z'$, $q\Rightarrow q'$ 后为

$$i\left(\frac{\partial}{\partial z'}+u\frac{\partial}{\partial T'}\right)q'-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial T'^2}q'+|q'|^2q'=0$$

令 $q' = e^{-i(u^2/2)z'+iuT'}\tilde{q}$, 上式化为

$$i\frac{\partial}{\partial z'}\tilde{q} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial T'^2}\tilde{q} + |\tilde{q}|^2\tilde{q} = 0$$

故有 Galilei 变换后的解为

$$\begin{aligned} q' &= \sqrt{\rho'}e^{i\sigma'} \\ \rho' &= \rho_0\{1 - a^2\text{sech}^2[\sqrt{\rho_0}a(T - uz)]\} \\ \sigma' &= \sigma + uT - \frac{1}{2}u^2 z \end{aligned} \tag{9.4.6}$$

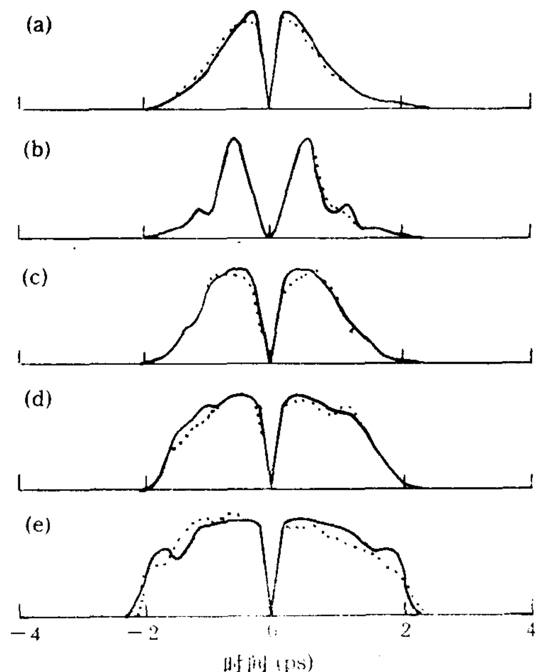


图 9.9 暗孤子的实验结果.
(a) 为输入波形； (b)~(e) 为输出波形
(输入功率分别为 1.5W, 52.5W, 150W, 300W)
实线为理论结果 (参照 Weiner [16])

对暗孤子进行实验观察 [15] 是这样进行的. 将 YAG 脉冲激光 (长 100ps, 中间有 0.3ps 宽的凹陷) 注入到 10m 长的正常色散单模光纤中，让其演化. 图 9.8 即为测得的各种输入功率下的输出波形. 图 (a) 、 (b) 为一个凹陷，而图 (c) 、 (d) 实际上已经是两个凹陷了. 造成两个凹陷的原因是在 T 由 $-\infty$ 至 ∞ 变化时，相位未发生相应变化，而暗孤子是拓朴性孤子，相位是应发生变化的. 上面的这一实验是 Krökel 做的，后来 Weiner 注意到这一点重做这一实验 [16] 时，在微微秒脉冲中心处，除了强度凹陷外，还引进相位变化. 实验观察到的暗孤子轮廓曲线与理论曲线完全相符 (见图 9.9).

由图 9.9 我们看到，当输入功率增高，暗孤子变得愈来愈窄；与亮孤子不一样，不存在高阶暗孤子.

9.5 调 制 不 稳

在反常色散介质中传播的连续波，将产生调制不稳. 调制可分为频率调制与振幅调制. 将规一化的有损耗的非线性方程 (9.2.2) 写下来：

$$i\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + |q|^2 q = -i\Gamma q \tag{9.5.1}$$

设输入波围绕振幅 q_0 有一扰动，将 q 表示为

$$q = \sqrt{\rho}e^{i\sigma} \tag{9.5.2}$$

代入非线性方程 (9.5.1), 便得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial T}+\rho\frac{\partial^2\sigma}{\partial T^2}+2\Gamma\rho=0\\&\rho-\frac{\partial\sigma}{\partial z}+\frac{1}{4\rho}\frac{\partial^2\rho}{\partial T^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)^2-\frac{1}{8\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)^2=0\end{aligned}\tag{9.5.3}$$

假定扰动很小，并具有调频 Ω, 则 ρ 与 σ 可表示为

$$\begin{aligned}\rho(T,z)&=\rho_0(z)+\mathrm{Re}\{\rho_1(z)e^{-i\Omega T}\}\\\sigma(T,z)&=\sigma_0(z)+\mathrm{Re}\{\sigma_1(z)e^{-i\Omega T}\}\end{aligned}\tag{9.5.4}$$

将 (9.5.4) 式代入 (9.5.3) 式，并线性化，其零次项为

$$\rho_0-\frac{\partial\sigma_0}{\partial z}=0,\quad\frac{\partial\rho_0}{\partial z}+2\Gamma\rho_0=0\tag{9.5.5}$$

注意到 $\sigma_0(0)=0$, $\rho_0(0)=\bar{\rho}_0$, 积分 (9.5.5) 式得

$$\begin{aligned}\rho_0(z)&=\bar{\rho}_0e^{-2\Gamma z}\\\sigma_0(z)&=\frac{\bar{\rho}_0}{2\Gamma}\left(1-e^{-2\Gamma z}\right)\end{aligned}\tag{9.5.6}$$

这就是 (9.5.3) 式的微扰解. 它表明了载波强度按指数衰减，而初始的载波强度为 $\bar{\rho}_0$, 而一次项给出边频的振幅与位相方程

$$\begin{aligned}&\frac{d\rho_1}{dz}+2\Gamma\rho_1-\Omega^2\rho_0\sigma_1=0\\&\rho_1\left(1-\frac{\Omega^2}{4\rho_0}\right)-\frac{d\sigma_1}{dz}=0\end{aligned}\tag{9.5.7}$$

为阐明方程 (9.5.7) 的不稳定性，可先略去光纤损耗 Γ 的影响，并将 $\rho_1(z)$, $\sigma_1(z)$ 用 Fourier 振幅写出， $\rho_1(z)=\mathrm{Re}\{\rho_1e^{ikz}\}$, $\sigma_1(z)=\mathrm{Re}\{\sigma_1e^{ikz}\}$. 于是由 (9.5.7) 式给出如下的色散关系：

$$k^2=\frac{1}{4}(\Omega^2-2\rho_0)^2-\rho_0^2\tag{9.5.8}$$

从 (9.5.8) 式可见，当调制频率 $\Omega=\Omega_m=\sqrt{2\rho_0}=\sqrt{2}|q_0|$, 空间增率 $\mathrm{Im}k$ 达到极大：

$$\mathrm{Im}k=\rho_0=|q_0|^2\tag{9.5.9}$$

参照 (9.1.11) 和 (9.1.12) 式，将 Ω_mT, $(\mathrm{Im}k)z$ 写为

$$\begin{aligned}\Omega_mT&=\sqrt{2}\frac{\sqrt{g\lambda}E_0}{\varepsilon}\frac{\varepsilon(t-k'x)}{(-\lambda k'')^{1/2}}=\frac{\sqrt{2n_2\pi}E_0}{(-\lambda k'')^{1/2}}(t-k'x)\\(\mathrm{Im}k)z&=\left(\frac{\sqrt{g\lambda}E_0}{\varepsilon}\right)^2\frac{\varepsilon^2x}{\lambda}=\frac{n_2\pi E_0^2}{\lambda}x\end{aligned}\tag{9.5.10}$$

不难看出，调制频率 $\omega_m=\dfrac{\sqrt{2n_2\pi}E_0}{(-\lambda k'')^{1/2}}$ 的倒数恰是振幅为 E_0 的孤子的脉宽. 这就给出调制不稳解与孤子解间的联系. 图 9.10 为实验观察到的光纤波导的调制不稳的频谱，它随注入光功率的不同而不同 [1].

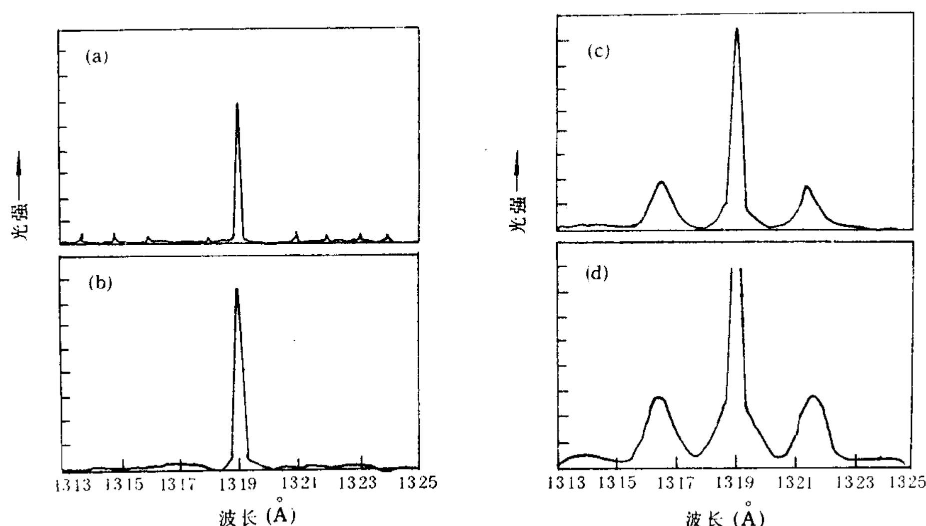


图 9.10 调制不稳频谱的实验结果

(a) 输入光功率水平很低；(b)5.5W,(c)6.1W; (d)7.1W

(参照 Tai 等 [17])

实验将 Nd:YAG 的模锁激光 ($\lambda = 1.319\mu$m, 脉宽 100ps, 重复频率 100Hz) 注入到光纤中，光纤参数为群速度色散 $D = -2.4$ps/(nm·km), 截面 $60\mu m^2$, 长度 1km, 在 $\lambda = 1.319\mu$m 处的损耗 $\gamma = 0.27$dB/km.

若在输入信号上加一小的调制信号，而调制信号频率 $\Omega < 2\Omega_c$，则调制不稳将发生，这称为感生调制不稳. 应用感生调制不稳，就能得到类孤子的脉冲串，其重复频率由输入信号调制频率 Ω 所决定. 产生感生调制最好的方法是用波长相近的两束光注入光纤，然后在光纤的另一端观察两束光的拍频的感生调制不稳. 即使输入信号仅有 0.017% 调制，但输出端的调制已达 100%(图 9.11). 其中， Nd:YAG 激光功率为 3W, $\lambda = 1.317\mu$m, 脉宽 100ps; InGaAsP 激光功率为 0.2mW, 频率与 Nd:YAG 激光相差 340kHz; 光纤长 1km, $D = -3.75$ps/(nm·km).

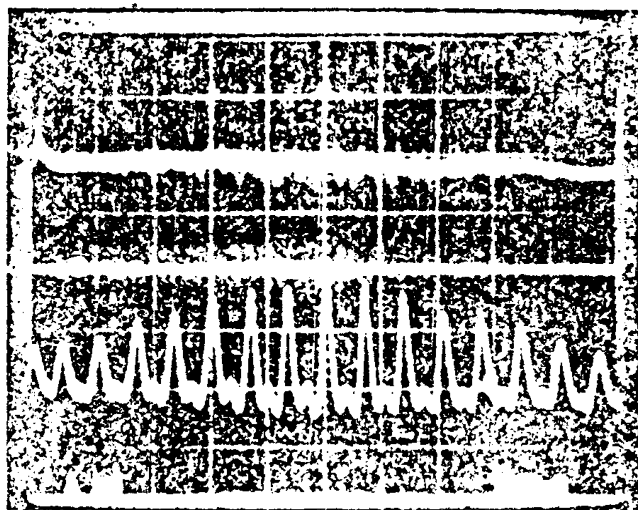


图 9.11 两束光拍频的感生调制不稳产生的脉冲串

(参照 T_{ai} 等 [49])

9.6 强超短脉冲传输引起的超加宽

实验中早已发现高强度微微秒或亚微微秒脉冲在非线性介质中传播时会产生一种近乎连续的白光输出[18]. 曾试图用自位相调制来解释这种输出的超加宽现象[19, 20], 但所得谱加宽远低于实验值，而且也不能解释实验中观察到的谱的非对称性，原因是没有考虑 Kerr 介质的非线性折射 $n_2|E|^2$ 随时间的快变. 若考虑到这一点，情况有很大的变化[21, 22]. 因 $n_2|E|^2E$ 已不再满足 $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}(n_2|E|^2E)\simeq n_2|E|^2\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$. 这样方程 (9.1.11) 已不适用，需要重新精确求解 Maxwell 方程[22]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{n_0^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]E=\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}P^{(3)},\quad P^{(3)}=\chi^{(3)}|E|^2E \tag{9.6.1}$$

令

$$\begin{gathered}\Lambda=\frac{4\pi\omega_0^2}{c^2}\chi^{(3)}=2n_2n_0k_0^2,\quad E(z,t)\simeq\varepsilon(z,t)e^{ik_0z-i\omega_0t}\\ \xi=(z-\frac{c}{n_0}t)/c\tau,\qquad \eta=\frac{z}{c\tau}\end{gathered} \tag{9.6.2}$$

则方程 (9.6.1) 可化为

$$\frac{2ik_0}{c\tau}\left(1+\frac{1}{ik_0c\tau}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\frac{\partial}{\partial\eta}\varepsilon+\left(\frac{1}{c\tau}\right)^2\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial\eta^2}=-\Lambda\left(1+\frac{1}{ik_0c\tau}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^2|\varepsilon|^2\varepsilon \tag{9.6.3}$$

现将 ε 的解用待定函数 $f(|\varepsilon|^2)$ 表示，则 $f(|\varepsilon|^2)$ 与 ε 的关系为

$$\begin{aligned}\frac{1}{c\tau}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}&=-\frac{\Lambda}{2ik_0}\left(1+\frac{1}{ik_0c\tau}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)f(|\varepsilon|^2)\varepsilon\\ &\simeq\frac{-\Lambda}{2ik_0}f(|\varepsilon|^2)\left(1+\frac{1}{ik_0c\tau}\frac{\partial}{\partial\xi}\right)\varepsilon\end{aligned} \tag{9.6.4}$$

在这里我们用了 $|\varepsilon\dfrac{\partial f(|\varepsilon|^2)}{\partial\xi}|\ll|f(|\varepsilon|^2)\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\xi}|$, 因为我们认为谱加宽主要是相位调制引起的，而不是振幅调制. 又设

$$\varepsilon=E_0ae^{i\alpha} \tag{9.6.5}$$

式中，a 为归一化振幅；当 $t=0$ 时，$a=1$, $\alpha=0$, $\varepsilon=E_0$. 当 $t\neq0$, 脉冲波形随时间的变化就体现在振幅 a 与相位 α 上. 把 (9.6.4),(9.6.5) 式代入 (9.6.3) 式，并分离实部与虚部，立即得

$$\begin{aligned}\frac{1}{c\tau}\frac{\partial a}{\partial\eta}&=\frac{1}{c\tau}\frac{\Lambda E_0^2}{2k_0^2}\frac{a^2}{1+\dfrac{\Lambda}{(2k_0)^2}f(|\varepsilon|^2)}\frac{\partial a}{\partial\xi}\\ \frac{1}{c\tau}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}&=\frac{\Lambda E_0^2}{2k_0}\frac{a^2}{1+\dfrac{\Lambda}{(2k_0)^2}f(|\varepsilon|^2)}+\frac{1}{c\tau}\frac{\Lambda E_0^2}{2k_0^2}\frac{a^2}{1+\dfrac{\Lambda}{(2k_0)^2}f(|\varepsilon|^2)}\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\end{aligned} \tag{9.6.6}$$

同样将 (9.6.4) 式作实部和虚部分离，则

$$\begin{aligned}\frac{1}{c\tau}\frac{\partial a}{\partial\eta}&=\frac{1}{c\tau}\frac{\Lambda}{2k_0^2}f(|\varepsilon|^2)\frac{\partial a}{\partial\xi}\\ \frac{1}{c\tau}\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}&=\frac{\Lambda}{2k_0}f(|\varepsilon|^2)+\frac{1}{c\tau}\frac{\Lambda}{2k_0^2}f(|\varepsilon|^2)\frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\end{aligned} \tag{9.6.7}$$

比较 (9.6.6),(9.6.7) 两式，可得

$$\frac{E_0^2 a^2}{1+\dfrac{\Lambda}{(2k_0)^2} f(|\varepsilon|^2)} = f(|\varepsilon|^2)$$

于是求出

$$f(|\varepsilon|^2) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+\dfrac{\Lambda^2 E_0^2 a^2}{k_0^2}}}{\Lambda/2k_0^2} \tag{9.6.8}$$

解 (9.6.7) 式，易得出

$$\begin{aligned} a &= \psi\left(\frac{\Lambda f(|\varepsilon|^2)}{2k_0^2}\eta+\xi\right) \\ \alpha &= \Phi\left(\frac{\Lambda f(|\varepsilon|^2)}{2k_0^2}\eta+\xi\right) - k_0 c\tau\xi \end{aligned} \tag{9.6.9}$$

其中函数 ψ 和 Φ 的具体形式由边界条件来定. 若边界条件取作

$$\begin{aligned} a(0,t) &= \frac{1}{\cosh(t/\tau)} \\ \alpha(0,t) &= 0 \end{aligned} \tag{9.6.10}$$

则

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\cosh\left(\dfrac{\Lambda f(|\varepsilon|^2)}{2k_0^2}\eta+\xi\right)} \\ &= 1/\cosh\left(\frac{t-n_0 z/c}{\tau} - \frac{n_2 z}{c\tau}|\varepsilon|^2 + 1.7\frac{n_2^2 z}{c\tau}|\varepsilon|^4 - 0.5\frac{n_2^3 z}{c\tau}|\varepsilon|^6 + \cdots\right) \end{aligned} \tag{9.6.11}$$

当略去括号内 $|\varepsilon|^4$ 以后高次项时，即文献 [21] 的结果. 图 9.12 给出归一化振幅 a 随变量 t 的变化曲线.

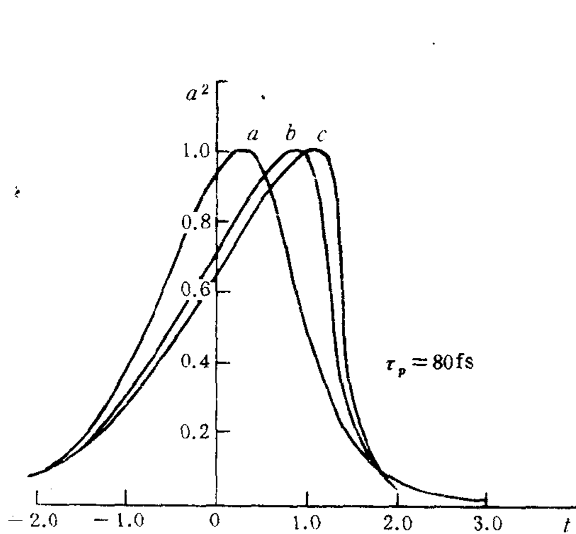


图 9.12 归一化振幅平方随时间的变化关系
(a)$z=0.2$mm; (b)$z=0.5$mm; (c)$z=0.6$mm
(取自连合、谭维翰 [22])

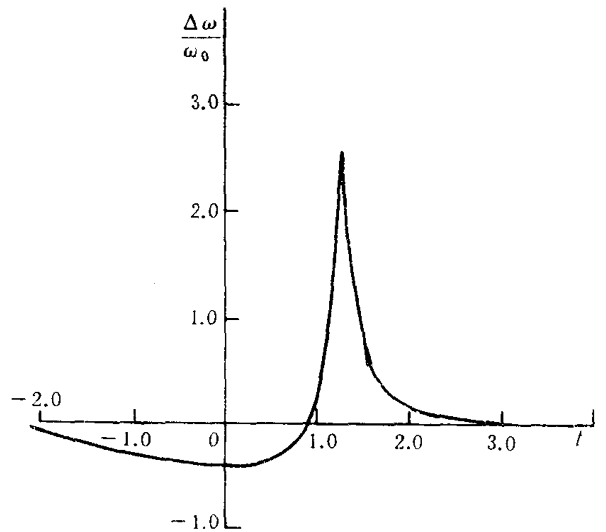


图 9.13 相位调制 $\Delta\omega/\omega_0$ 随时间的变化关系
($z=0.5$mm, $\tau=80$fs)
(取自文献 [22])

利用边界条件 $\alpha(0,t)=0$, 可得 α 的解：

$$\alpha = k_0 c\tau \frac{\Lambda}{2k_0^2}\frac{z}{c\tau} = k_0 z\left(-1+\sqrt{1+\frac{\Lambda E_0^2 a^2}{k_0^2}}\right) \tag{9.6.12}$$

于是相位调制为

$$\frac{\frac{\partial\alpha}{\partial t}}{\omega_0} = \frac{\Lambda E_0^2}{k_0^2 c}\frac{a\frac{\partial a}{\partial t}}{\sqrt{1+\frac{\Lambda E_0^2 a^2}{k_0^2}}}z \tag{9.6.13}$$

参照文献 [23], 可得 $(\frac{\partial\alpha}{\partial t})/\omega_0$ 的实验值， $(\frac{\partial\alpha}{\partial t}/\omega_0)_{\max}$ 与 $(\frac{\partial\alpha}{\partial t}/\omega_0)_{\min}$ 分别对应于反 Stokes 与 Stokes 展宽. 图 9.13 给出 $z=0.5\mathrm{mm}$ 处，光强 $I=6\times10^{13}\mathrm{W/cm^2}$, $n_2=10^{-22}\mathrm{m^2/V^2}$, $\lambda=627.4\mathrm{nm}$ 情形的相位调制随时间的变化，脉宽 $\tau=80\mathrm{fs}$, $n_0\simeq1$, 图中 $(\frac{\partial\alpha}{\partial t}/\omega_0)_{\max}\simeq2.5$, $(\frac{\partial\alpha}{\partial t}/\omega_0)_{\min}\simeq-0.46$, 与实验值 2.3, −0.6 相近 [23].

9.7 超短脉冲的模式锁定

应用调 Q 脉冲激光技术 [24] 可使我们得到 $10^{-6}\sim10^{-7}\mathrm{s}$ 的脉冲激光输出. 但通过相干光的纵模锁定 [25] 就能得到超短的脉冲系列输出. 第一代以红宝石或钕玻璃为增益介质的锁模激光，其超短脉冲宽度 <100ps. 锁模可通过外加电子线路调制腔的损耗或频率实现主动锁模，也可以通过插入快速响应的饱和吸收体实现被动锁模 [26, 27]. 这两种情形的锁模均是用闪光灯泵浦. 用闪光灯泵浦有其不足之处，即锁模时间太短 (< 闪光灯泵浦时间) 不能充分使带宽内的模式达到锁定. 若锁定时间很长，锁定脉冲宽度 Δt 就可接近于工作物质的带宽 $\Delta\nu$ 所确定的极限 $\Delta t\simeq1/\Delta\nu$, 一直到 1970 年 Peterson[28] 等发明连续染料激光器才导致第二代锁模激光器的出现. 这第二代锁模激光具有很宽的增益带，连续光泵，短的增益弛豫时间与绕腔长一周的时间 $T=\frac{2L}{c}$ 可比拟，还有大的辐射截面等. 所有这些均极大地提高了锁模的性能. 染料锁模激光器虽有诸多优点，但在稳定性、可重复性、可小型化等方面则远不如固体激光. 作为第三代锁模激光仍是固体激光 [29].

9.8 染料被动锁模激光

如图 9.14 所示，谐振腔内包含增益介质与饱和吸收染料，染料的吸收系数 K 为

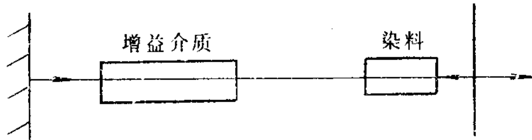


图 9.14 染料被动锁模简图

$$K=\frac{\kappa_0}{1+I} \tag{9.8.1}$$

式中，I 为通过染料的光强，以染料饱和吸收强度 $I_s\sim50\mathrm{MW/cm^2}$ 为单位，亦即 I 是用 I_s 规一化了的. 典型的增益介质，例如 Nd 玻璃，荧光带宽 $\sim200\text{Å}$, 在闪光氙灯泵浦作用下，由上能级粒子产生的自发辐射，经增益介质放大，染料吸收，在腔内来回振荡着. I 很弱时，吸收与增益均为线性的，自发

辐射带有无规性，在光泵作用初期以正比于光泵时间 t 逐渐增加；介质增益 α 也是随 t 线性增加．自发辐射脉冲带宽在放大过程中虽有所压缩，但仍带有无规性质，可以用无规起伏信号来描述．这就是图 9.15 中的 I 区．为定量描述这一过程，我们采用如下的变率方程 [30, 31]：

$$\frac{dI_K}{dK} = I_K\left(\alpha_K - \gamma - \frac{\kappa_0}{1+I_K}\right) + \left(\frac{dI_K}{dK}\right)_{sp} \tag{9.8.2}$$

$$\frac{d\alpha_K}{dK} = -\alpha_K\left(\frac{2\sigma}{\hbar\nu}I_sT\right)I_K + fT \tag{9.8.3}$$

式中，$KT < t < (K+1)T$. 脚标 K 表示脉冲第 K 次通过腔，$T = \frac{2L}{c}$ 为在腔内来回一次的周期，κ_0 为染料的弱信号吸收系数，σ 为增益介质的辐射截面，γ 为腔的损耗，$(\frac{dI_K}{dK})_{sp}$ 为自发辐射项，fT 标志闪光灯的光泵项．在 (9.8.2) 式中将饱和吸收表示为 $\frac{\kappa_0}{1+I}$，是应用了 (9.8.1) 式，这一关系成立的条件是吸收染料的弛豫时间 T^b 远比光脉冲宽度 τ_p 为小，即 $T^b \ll \tau_p$. 对于红宝石或 Nd 玻璃激光来说，最佳的饱和吸收染料的 $T^b \simeq 10^{-11}$s, 故对 τ_p 在 100Ps 的光脉冲，$T^b \ll \tau_p$ 是成立的．

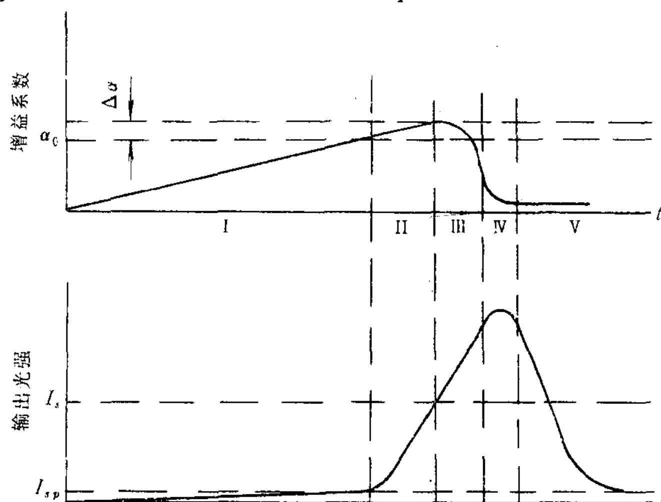


图 9.15　锁模激光的增益与输出强度随 t 的变化

(参照 Glenn [31])

如图 9.15 所示，光泵自 $t=0$ 开始作用，在区域 I 内光强很低，(9.8.2) 式中的自发辐射项是主要的．在 I 区终结处已达阈值，增益等于损耗，即

$$\alpha = \alpha_0 = \kappa_0 + \gamma \tag{9.8.4}$$

在 II 区内光强仍在增长，且脉冲结构带有周期为 T 的脉冲结构，带宽逐渐变窄，无规起伏的时间尺度也相应增长了．到 II 区终点，光强已增至染料饱和和吸收强度 I_s, 即 (9.8.3) 式中 $I_K \simeq 1$, 这样染料吸收的非线性就明显表示出来，这就是锁模的开始．腔内辐射仍具有噪音性质，可描述为 M 个脉宽为 T/M, 具有无规强度分布的脉冲系综，分布几率为 $W_I(I) = \langle I \rangle^{-1} \times \exp(-I/\langle I \rangle)$. 这表明噪音带有白噪音性质．又注意到在 II 区的终点，增益已由 α_0 升至 α_1, 即

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta\alpha \tag{9.8.5}$$

$\Delta\alpha$ 的数量虽不大，但对确定激光模式锁定行为是至关重要的．III 区为模式锁定区．

若模式锁定是完善的，则初始的无规脉冲系综将过渡到只有一个其强度远远超过其余的脉冲，而 (9.8.2) 式中的受激辐射也远超过自发辐射，故可简化为

$$\frac{dI_{K,i}}{dK} = I_{K,i}\left(\alpha_K - \gamma - \frac{\kappa_0}{1+I_{K,i}}\right) \tag{9.8.6}$$

式中，脚标 "i" 是 M 个无规脉冲的第 i 个. 将 (9.8.6) 式的解用差分形式表示，便是

$$\log I_{K+1,i} = \log I_{K,i} + \alpha_K - \gamma - \frac{\kappa_0}{1+I_{K,i}} \tag{9.8.7}$$

而 (9.8.3) 式在略去光泵后又可写为

$$\alpha_{K+1} = \alpha_K - \frac{2\sigma\alpha_K}{\hbar\nu} I_s T \sum_{i=1}^{M} I_{K,i} \tag{9.8.8}$$

上面两式即由 α_K，$I_{K,i}(i=1,\cdots,M)$ 迭代出 α_{K+1}，$I_{K+1,i}$ 的迭代式. 初始的 α_1 已由 (9.8.4), (9.8.5) 式给出. 但如何选定 $I_0 i(i=1\sim M)$ 进行迭代才有代表性呢？将 M 个脉冲按强度 I 的大小顺序排列，则第 N 个脉冲取值 I 的概率密度为

$$U_N(I)dI = CW(I)[\int_I^\infty W(I')dI']^{N-1}[\int_0^I W(I')dI']^{M-N}dI \tag{9.8.9}$$

令 $x = \int_0^I W(I')dI'$, 则上式可写为

$$U_N(I)dI = C(1-x)^{N-1}x^{M-N}dx \tag{9.8.10}$$

由规一化条件

$$\int_0^\infty U_N(I)dI = C\int_0^1 (1-x)^{N-1}x^{M-N}dx = C\frac{\Gamma(N)\Gamma(M-N+1)}{\Gamma(M+1)} = 1$$

得

$$C = \frac{M!}{(N-1)!(M-N)!} \tag{9.8.11}$$

设 $W(I) = e^{-I}$ 代入 (9.8.9) 式 (注意这里 I 即 $I/<I>$), 即有

$$U_N(I)dI = Ce^{-NI}(1-e^{-I})^{M-N}dI \tag{9.8.12}$$

第 N 个脉冲最可几的强度由

$$\frac{d}{dI}U_N(I) = 0 \tag{9.8.13}$$

给出为

$$I_{mp} = \ln(M/N) \tag{9.8.14}$$

若取 $M = 100$, 则最可几的大小序列为 ln(100), ln(100/2), ln(100/3), ln(100/4), $\cdots$ 即 4.6, 3.9, 3.5, 3.2, $\cdots$. 第 1, 2 脉冲的幅度比约为 $\frac{4.6}{3.9} \simeq 1.18$. 当第 1, 2 脉冲的幅度比定了之后，按 (9.8.12) 式 $W(I) = e^{-I}$ 也就定了.

现取定吸收介质的饱和吸收强度 $I_s = 500\text{MW/cm}^2$, 增益介质的荧光截面 $\sigma/h\nu = 0.16\text{cm}^2/\text{J}$, 来回一次的时间 $T = 5\text{ns}$, 初始脉冲序列的平均功率 $<I> = 0.002I_s$, 激光束

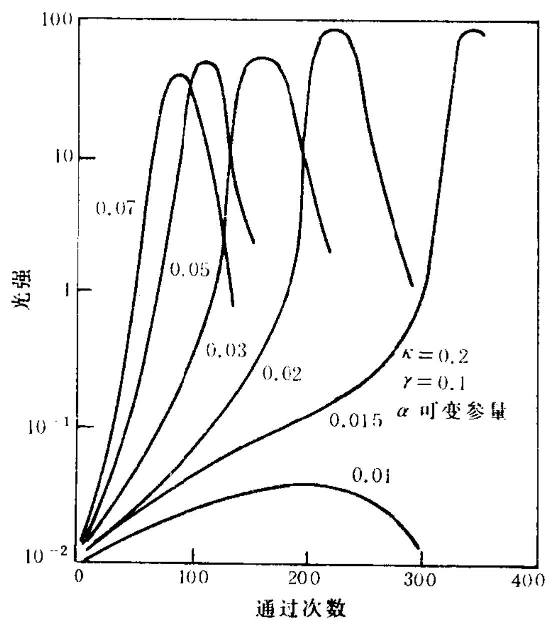


图 9.16 最大脉冲幅度随 K 的变化曲线

(初始 $I_1/I_2=1.18$)

(参照 [31])

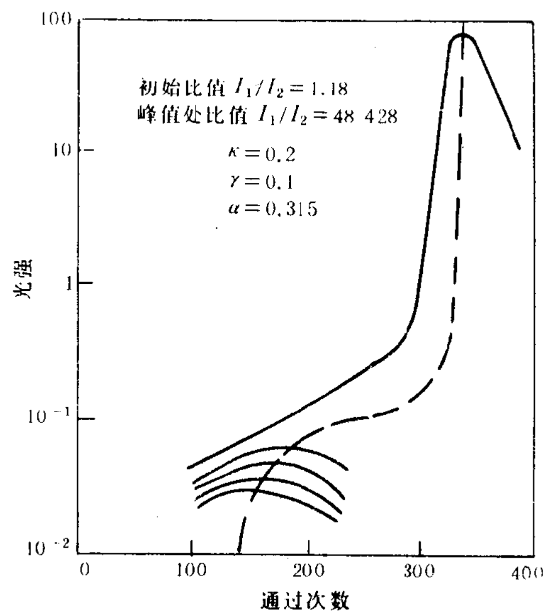


图 9.17 前 5 个脉冲幅度随 K 的变化

(参照 [31])

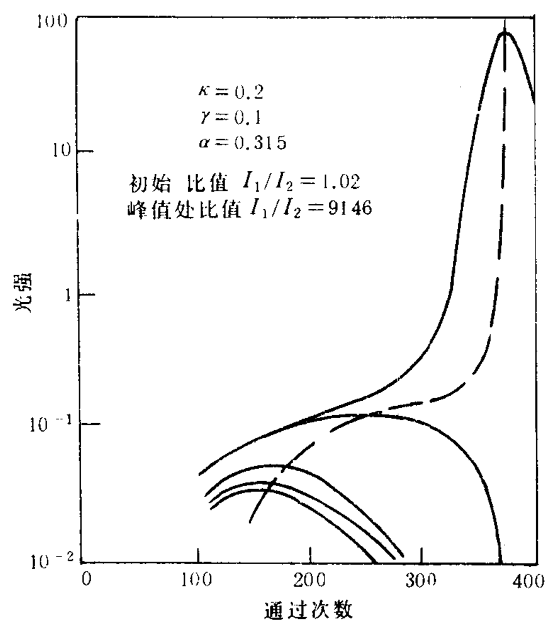


图 9.18 前 5 个脉冲幅度变化曲线

(参照 [31])

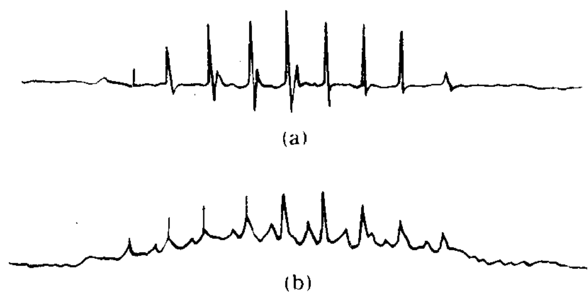


图 9.19 (a) 脉冲序列输出；

(b) 含亚结构的脉冲序列输出

(参照 [30])

截面为 1cm^2. 按 (9.8.7),(9.8.8) 式进行迭代，结果由图 9.16 和图 9.17 示出. 参数 $\alpha(=\alpha_0+\Delta\alpha,)$ κ_0, γ 均在图中给出. 图 9.16 最强脉冲幅度初值为次强脉冲幅度初值的 1.18 倍，经 K 次迭代后，最强脉冲幅度 I_K 随 K 的变化曲线由图 9.16 给出. 明显看出当初始增益减小时，脉冲峰值愈来愈向后移. 当 $\Delta\alpha=\alpha-\gamma-\kappa_0=0.01$, 输出脉冲幅是很低的. 这是因为在 I 尚未到达 I_s 前，反转粒子已经消耗，α 就已经很小了. 当稍超过此数 $\Delta\alpha=0.015$, 脉冲峰值推迟出现，但增加得很快，这就是最佳锁模情形. 图 9.17 为 $\Delta\alpha=0.015$ 时前 5 个脉冲随 K 变化的情形. 初始时 $I_1/I_2=1.18$, 但到脉冲峰值处，$I_1/I_2=48428$, 第 2 脉冲就可忽掉不计了. 图 9.18 是初始时 $I_1/I_2=1.02$, 到峰值处 $I_1/I_2=9146$. 这都是锁模处于最佳情况的比值. 若不是这样，即 I_1/I_2 在脉冲峰处不是很大，I_2 不可忽略，在输出中除 I_1 外，还会有 I_2 的亚结构出现 (见图 9.19), 这正是不完善的被动锁模中观察到的现象.

9.9 准连续被动锁模激光

上节讨论了氙灯泵浦固体 (如 Nd 玻璃) 染料饱和吸收被动锁模激光，这种锁模系列输出为暂态的，而锁模的时间又较短，即图 9.15 的 III 区，锁模并未到达如图 9.17 和 9.18 所示的最佳状况，$\Delta\alpha$ 还可较大，如图 9.16 中的 $\Delta\alpha=0.07$ 等，而每一锁模脉冲的脉宽差不多就是饱和吸收染料的恢复时间或者要大些，即几十至一百皮秒量级.

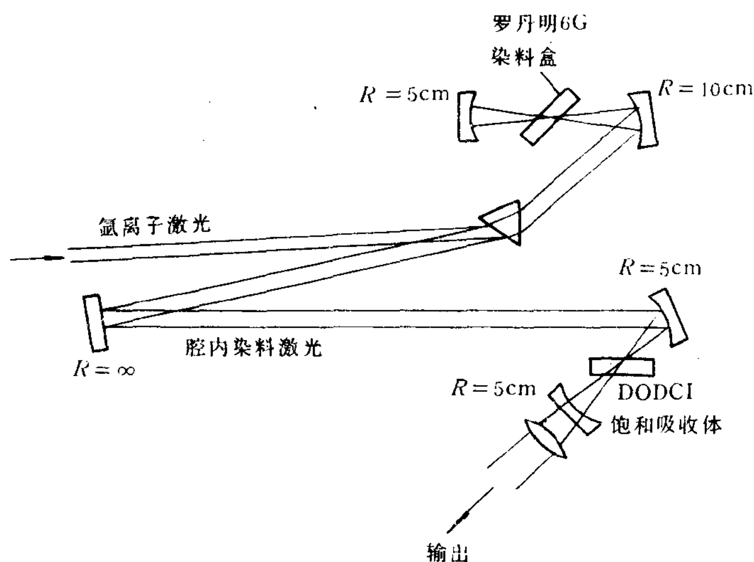


图 9.20 染料锁模激光实验装置 (参照 Ippen [33])

Peterson 做成的染料连续激光 [28], 工作物质为罗丹明 6G. 用氩离子激光泵浦，罗丹明 6G 的弛豫时间 4.8ns, 增益带宽 1500cm^{-1}, 与 Nd 玻璃的弛豫时间 230μs 、增益带宽 200cm^{-1} 相比，有明显的优越性；更为重要的是，连续激光工作条件有利于达到更为完善的锁模 [32, 33]. 图 9.20 示出这种染料被动锁模的实验装置，DODCI 的弛豫时间为 250ps, 但锁模输出的脉宽已达 2.5ps, 峰值功率 50 ~ 100W, 锁模波长波长范围为 5900 ~ 6100Å(见图 9.21).

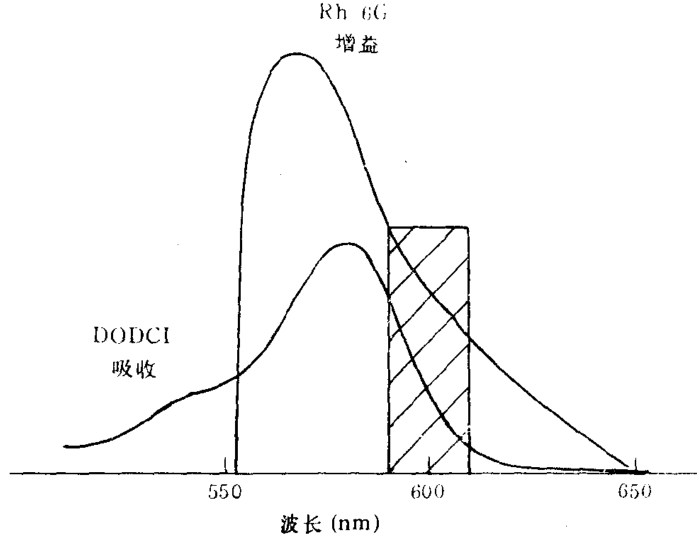


图 9.21 染料激光与 DODCI 吸收谱轮廓 (划斜线区为锁模波段)
(参照 [33])

准连续锁模的输出脉冲宽 2.5ps, 远比饱和吸收染料的弛豫时间 250ps 短. 当宽脉冲通过增益介质时，前沿被优先放大，后沿由于增益饱和未得到大的放大，相对地来说被减弱了. 在通过饱和吸收染料时，前沿被吸收，后沿由于吸收饱和未被吸收，相对地来说是放大了. 将这两者结合起来，并经长时间的演化 (准连续激光) 前后沿均被削掉，才使得脉冲变得很窄. 为实现这样的锁模，应满足条件：(1) 增益介质的弛豫时间 T_a 应比在腔内来回一次的时间 $T=\dfrac{2L}{c}$ 小，即 $\xi=T/T_a>1$, 保证光脉冲经端面反射回来后，增益介质已抽运到高的反转粒子数状态；(2) 增益介质的辐射截面 σ_a 应大于吸收染料的吸收截面 2 倍以上，即 $\sigma_a>2\sigma_b$, 保证脉冲峰值在高于饱和吸收情况下通过吸收介质，在低于增益饱和情况下通过增益介质.

下面分析准连续锁模的动力学过程.

通过增益介质的时间很短 (脉冲宽度 $\tau_u\ll T_a$), 可略去光泵的影响. 光脉冲的光子流 F 满足方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial t}\right)F=n_a\sigma_aF \tag{9.9.1}$$

式中，n_a, σ_a 分别为增益介质的反转粒子数与受激辐射截面；v 为光速；而 n_a 满足变率方程

$$\dot{n}_a=(n_{a0}-n_a)/T_a-n_a\sigma_aF\simeq-n_a\sigma_aF \tag{9.9.2}$$

采用流动坐标系 $x=x$, $\tau=t-x/v$, (9.9.1) 式可写为

$$\frac{\partial F}{\partial x}=n_a\sigma_aF \tag{9.9.3}$$

(9.9.2) 式的解为

$$n_a(\tau,x) = n_{ai}(x)\exp(-\sigma_a J_\tau)$$
$$J_\tau = \int_{-\infty}^{\tau} F(\tau,x)d\tau \tag{9.9.4}$$

代入 (9.9.3) 式，得

$$\frac{\partial}{\partial x}F(\tau,x) = n_{ai}\sigma_a F(\tau,x)e^{-\sigma_a J_\tau} \tag{9.9.5}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{\partial \sigma_a J_\tau}{\partial x} + n_{ai}\sigma_a e^{-\sigma_a J_\tau}\right] = 0 \tag{9.9.6}$$

上式的解为

$$j_\tau(x) = \sigma_a J_\tau(x) = \ln\left\{1 + e^{n_{ai}\sigma_a x}[e^{\bar{j}_\tau} - 1]\right\} \tag{9.9.7}$$

式中，$\bar{j}_\tau = j_\tau(0)$. 按 J_τ 的定义，J_∞ 可看成是 x 点观测到的光脉冲单位截面积的能量，$j_\infty = \sigma_a J_\infty(x)$, 即 σ_a 截面内流过的光脉冲的总能量为

$$j_\infty = \ln\left\{1 + e^{n_{ai}\sigma_a x}[e^{\bar{j}_\infty} - 1]\right\} \tag{9.9.8}$$

设 $g_0 = n_{ai}\sigma_a d$, d 为增益介质的厚度，则得光脉冲在增益介质中通过一次后的能量变化为

$$j_{K+1} = \ln\left\{1 + e^{g_0}(e^{j_K} - 1)\right\}e^{-\gamma} \tag{9.9.9}$$

因子 $e^{-\gamma}$ 是考虑到腔的损耗而加上去的，$K+1$, K 表示通过的次数.

用同样方法可计算在吸收介质通过一次的能量变化：

$$j_{K+2} = \ln\left\{1 + e^{-\kappa_0}(e^{j_{K+1}} - 1\right\}e^{-\gamma'} \tag{9.9.10}$$

实际计算表明，当 K 稍大，通过次数较多，j_K 趋于定态值. 令 $e^\gamma = m$, $e^{\gamma'} = n$, 则有

$$x = e^{j_K}, \qquad y = e^{j_{K+1}} \tag{9.9.11}$$

(9.9.9),(9.9.10) 式可写为

$$y^m = 1 + e^{g_0}(x-1)$$
$$x^n = 1 + e^{-\kappa_0}(y-1) \tag{9.9.12}$$

有意思的是，确定脉冲能量的定态方程 (9.9.12) 仅与 g_0, κ_0 有关，与增益介质的 σ_a, T_a, 吸收染料的 σ_b, T_b 无关. 这主要是因为脉冲宽度 $\tau_u \ll T_a$, $\tau_u \ll T_b$, 略去弛豫引起的. 上面谈的准连续染料锁模激光 [33],τ_u, T_a, T_b 分别为 2.5ps, 4.8ns, 250ps, 故条件 $\tau_u \ll T_a$, $\tau_u \ll T_b$ 是满足的. 当 g_0, κ_0 给定后，就可求解代数方程 (9.9.12) 而定出定态值 x, y, 从而定出光脉冲的能量积分. 在进入增益介质前、后分别为 $j_k = \ln x$, $j_{k+1} = \ln y$, 特别是当 $n=1$, $m=2$, 由 (9.9.12) 式得

$$y^2 - 1 = e^{g_0-\kappa_0}(y-1)$$
$$y = e^{g_0-\kappa_0} - 1 \tag{9.9.13}$$

代入 (9.9.12) 式第二式得

$$x = 1 + e^{-\kappa_0}(e^{g_0-\kappa_0} - 2) \tag{9.9.14}$$

由 (9.9.13) 式看出 $g_0 - \kappa_0 > 0$ 是必要的，否则将给出 $y < 0$, 无意义的解.

9.10 碰 撞 锁 模

已知采用连续染料激光的被动锁模 [33], 可得脉宽为皮秒量级的锁模输出. 若同时采用对撞锁模技术，则可得脉宽短到 90fs 的锁模输出 [34]. 对撞锁模 CPM 要求腔内同时有两个或两个以上的脉冲进行对撞. 对撞脉冲在吸收介质中形成一瞬态的反转粒子数栅，这个栅起到同步稳定，并使脉宽变窄等作用. 其实在对撞锁模方案 提出以前，单 个

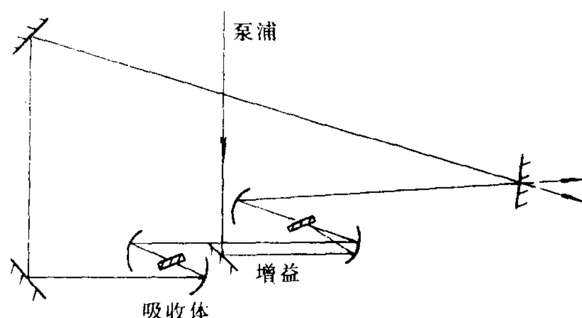


图 9.22 用于 CPM 的环形腔示意图

(参照 Fork [34])

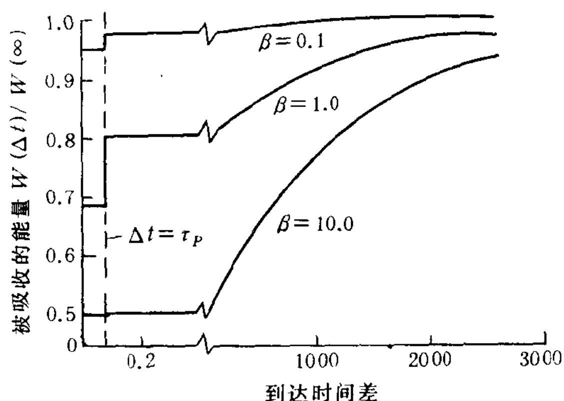


图 9.23 在吸收层中的损耗 $W(\Delta t)/W(\infty)$ 随 Δt 的变化

(参照 [34])

脉冲锁模实验表明，将染料吸收盒尽可能贴近腔的反射镜面，利用驻波处的强场，锁模就显得十分有效. 采用双脉冲在吸收介质中对撞，不仅使得光强增加，还能起到同步作用，故能输出短而稳定的脉冲系列. CPM 要求两个脉冲几乎同时从相反方向到达吸收染料层，时间差应小于脉冲宽度，而且饱和吸收染料层应尽可能薄，在染料中的光程小于或短于脉冲宽度. 图 9.22 所示的环形腔装置满足了这些要求. 增益区的聚焦镜曲率半径 10cm, 而吸收区的聚焦镜曲率半径 5cm, 绕腔来回一次的时间 $T = \dfrac{2L}{c} = 10\text{ns}$. 弱信号损失约 20% 的 Doci 溶液用喷嘴射出可做到约 10μ 的一薄层. 染料激光仍为氩离子激光泵浦罗丹明 6G 准连续激光，输出功率为 $3 \sim 7$W, 波长为 5145Å, 产生的光脉冲宽度用 KDP 自相关函数法测定为 90fs, 谱宽 50 ± 10Å. 对撞脉冲的同步作用乃是因为正好在吸收染料中对撞的脉冲损耗最小. 图 9.23 示出有延迟 Δt 的对撞脉冲损耗 $W(\Delta t)$ 与 $W(\infty)$ 之比对 Δt 的图. $W(\infty)$ 是 Δt 很大，即单个脉冲通过吸收层的损耗. 显然 $\Delta t \simeq 0$ 时，$W(\Delta t)/W(\infty)$ 最小. 图中参数 $\beta = 2\sigma U_0$,σ 为吸收截面，U_0 为每 cm^2 的脉冲能量. $\beta = 10$ 的这条曲线，当 $\Delta t = 0$, 能量损耗比 $W(\Delta t)/W(\infty)$ 最为明显.

用 CPM 方法，已获得小于 0.1ps 脉冲，平均输出功率为 50mW(每束), 增加了输出的稳定度，而且脉冲宽度不灵敏依赖于泵浦脉冲宽度.

9.11 啾啾光脉冲的放大与压缩

因为强光的自聚效应给超短光脉冲的放大带来困难，于是雷达传送中的啾啾脉冲技术被应用到光脉冲的放大中来．首先将光脉冲通过一正色散延迟线在时域内拉开，再进行放大，然后又通过一负色散延迟线压缩成脉宽很窄功率很高的脉冲．因为是在较低功率密度情况下进行放大，可避免自聚焦的困难，更大的好处是在非均匀加宽的介质中放大啾啾脉冲，相当于增益扫描，也避免了放大脉冲时经常遇到的增益饱和效应．因为在脉冲宽度各个部分的载频是在变化的，相当于每一部分频率吃掉宽的增益谱线中的一部分，各个部分加起来，就将宽带中各个部分的增益均利用了．

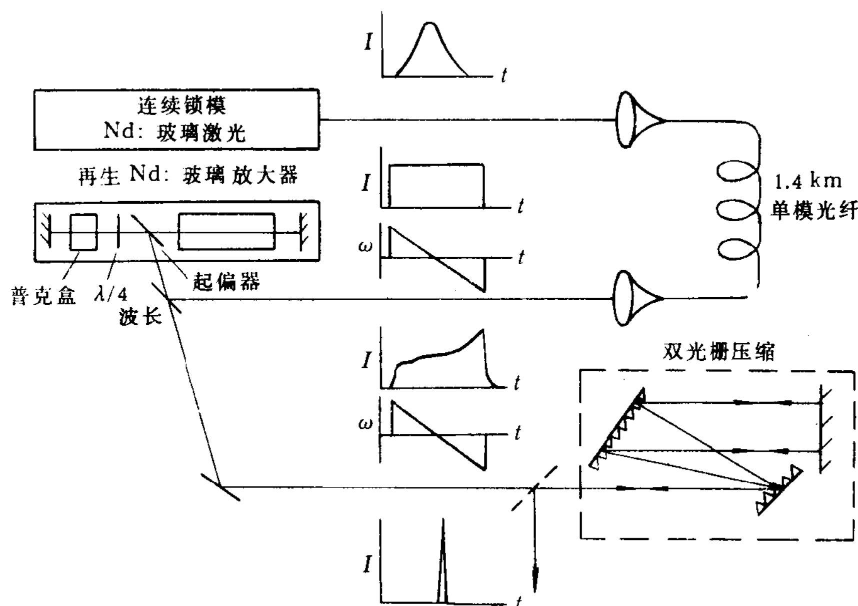


图 9.24 啾啾脉冲放大与压缩装置

(参照 Strickland [35])

图 9.24 给出放大与压缩啾啾脉冲的示意图 [35, 36]．连续锁模 Nd:YAG 激光输出宽度为 150ps 的脉冲系列，重复频率为 82MHz, 平均功率为 5W 的信号耦合到 1.5km 单模非保偏光纤．在光纤输出端的平均功率为 2.3W, 宽度为 300ps, 略呈矩形的脉冲 (由图 9.25 示出), 脉冲带宽 50Å, 再注入到 Nd 玻璃放大器中再生放大．高增益的硅玻璃的带宽 350Å, 增益峰在 1.062μm 处，放大后的脉冲能量 $\sim$ 2mJ, 然后通过光栅对进行压缩得出脉冲宽度为 1.5ps, 脉冲如图 9.26 所示．光栅对为负色散元件，对光脉冲进行压缩．尽管单模光纤产生的啁啾脉冲具有长的线性成分，但前、后沿也包含了非线性成分．这样经光栅对作用后，中部得到显著压缩，前、后沿得不到压缩，表现出一噪音基底，影响了光脉冲的信噪比．在高功率激光的打靶实验中要求高的信噪比，也就不用光纤啁啾脉冲技术，利用反平行放置的光栅对产生的正色散，将脉冲展开，然后利用平行放置的光栅对产生的负色散，将脉冲压缩 [45~48]．



图 9.25 展开后脉冲的自相关 (参照 [35])

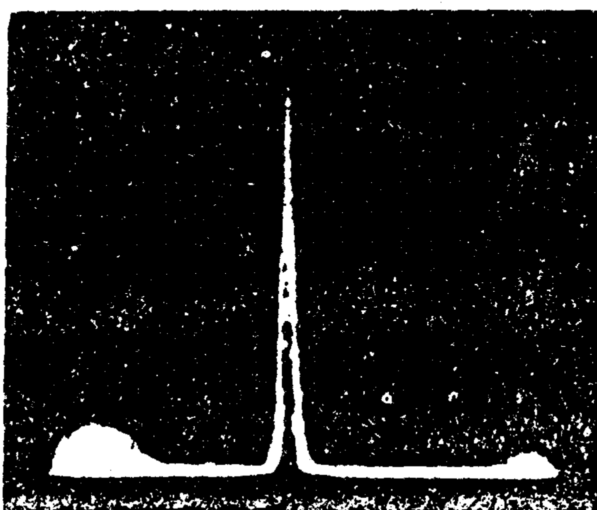


图 9.26 1.5ps 压缩脉冲的自相关 (参照 [35])

9.12 快饱和吸收锁模激光

准连续锁模激光 (染料) 主要是脉冲一次又一次通过增益与吸收介质产生弱脉冲整形 (Weak–Pulse–Shaping,WPS). 每通过一次产生一次弱的振幅调变 (相位调变是次要的)[34], 实质上就是对众多模式来一次甄别 (按其振幅大小与到达吸收介质的时间). 这种甄别只能是长时间慢速地进行, 故 $g_0 - \kappa_0$ 不能太大, 而锁模时间又需很长; 否则锁模就是不完善的, 脉宽不能很窄, 且很不稳定. 这就是由闪光灯泵浦的固体锁模激光向准连续氩离子激光泵浦染料锁模激光发展的过程. 但在孤子激光实验 [11, 37] 后, 又一种崭新的锁模方式悄悄地出现了. 前面已提到孤子激光实验是将色心激光器外接一光纤, 色心激光器的输出在光纤中演化成孤子, 再反馈回色心激光器起到同步作用, 达到输出 100fs 的孤子. 最初以为耦合非线性 Kerr 介质即光纤的做法, 只适用于那些波长在光纤的反常色散 1.5μ 附近的激光, 后来认识到将主腔耦合到非线性 Kerr 介质外腔的做法, 对增强锁模是极有好处的 [38], 激光波长不限制于光纤反常色散区. 事实上应用耦合光纤外腔技术已极大地改善了主动固体锁模激光器的性能, 使锁模脉宽由几十 ps 压缩到小于 1ps(其中包括色心 [39, 40] 、钛宝石 [41] 、 Nd 玻璃 [42] 等锁模激光, 在耦合的外腔中未出现类孤子整形). 耦合外腔技术上的难点, 是必须严格控制外腔 (即光纤) 的腔长, 其精度应在几分之一波长, 而且外在环境的干扰也是要解决的问题. 这种亚微微秒锁模脉冲的形成

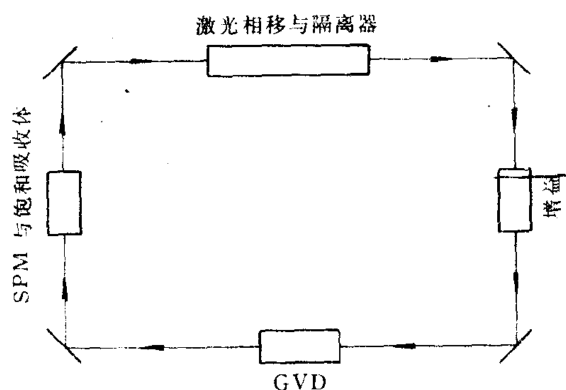


图 9.27 包含增益、增益色散、自相位调制 (SPM) 、群速度色散 (GVD) 、快饱和吸收、线性损耗与相移的环形腔 (参照 Haus [44])

是由于从非线性 Kerr 介质外腔经过相移反馈回来的相干光叠加到主腔脉冲上，使之变窄，这种锁模也称为叠加锁模 [43, 44](Additive Mode Locking, APM). 实质上就是相干叠加造成的脉冲变窄. 在 Kerr 介质中除了由 $n_2|E|^2$ 表示的相位自调制外 (SPM), 还伴随着由 $\gamma|E|^2$ 表示的快饱和吸收，这也是十分关键的. 除此而外，还有群速度色散 (GVD), 这些均应在 APM 理论中得到反映. 这样就可参照 (9.1.5)~(9.1.11) 式，并考虑到下面几点写出 APM 的主方程 (见图 9.27).

(1) 增益的带宽为 Ω_g, 则增益与增益色散可表示为

$$\frac{g}{1+\frac{1}{\Omega_g^2}(\omega-\omega_0)^2} \simeq g\left(1-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{\Omega_g^2}\right) \Rightarrow g\left(1+\frac{1}{\Omega_g^2}\frac{\partial}{\partial t^2}\right) \tag{9.12.1}$$

(2) Kerr 介质的饱和吸收为

$$\frac{\kappa_0}{1+\frac{|E|^2}{|E_s|^2}} \simeq \kappa_0\left(1-\frac{|E|^2}{|E_s|^2}\right) = \kappa_0 - \gamma|E|^2 \tag{9.12.2}$$

κ_0 可并到腔的损耗 Γ 中，将 $-\gamma|E|^2$ 并到自相位的 $n_2|E|^2$ 中，即 $n_2|E|^2 \to (n_2-i\gamma)|E|^2$. 于是 (9.1.11) 式在包括增益、饱和吸收及损耗后，可推广为

$$i\left[\frac{\partial}{\partial x}+\Gamma-g\left(1+\frac{1}{\Omega_g^2}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right)\right]E - \frac{k''}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial\tau^2} + \frac{2\pi(n_2-i\gamma)}{\lambda}|E|^2E = 0 \tag{9.12.3}$$

式中，$\tau = t-k'x$ 为运动坐标系.

现令

$$D = \frac{k''}{2},\ \delta = \frac{2\pi n_2}{\lambda},\ \frac{2\pi}{\lambda}\gamma \to \gamma,\ E = ae^{i\xi x}$$

代入 (9.2.3) 式得

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \left\{i\xi+\Gamma-g+\left(\frac{-g}{\Omega_g^2}+iD\right)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-(\gamma+i\delta)|a|^2\right\}a = 0 \tag{9.12.4}$$

对于稳态解，应有 $\frac{\partial a}{\partial x}=0$, 于是有

$$\left[i\xi+\Gamma-g+\left(\frac{-g}{\Omega_g^2}+iD\right)\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-(\gamma+i\delta)|a|^2\right]a = 0 \tag{9.12.5}$$

现求方程 (9.12.5) 的解，令 $\mu = \cosh(\tau/\tau_u)$, 则

$$\tau_u^2\frac{d^2}{d\tau^2} = (\mu^2-1)\frac{d^2}{d\mu^2}+\mu\frac{d}{d\mu}$$

$$\tau_u^2\frac{d^2}{d\tau^2}\mu^n = [n^2-n(n-1)\mu^{-2}]\mu^n \tag{9.12.6}$$

故 a 的解可取为

$$a = A(\mathrm{sech}(\tau/\tau_u))^{1+i\beta} = A\mu^{-(1+i\beta)} \tag{9.12.7}$$

$$\tau_u^2\frac{d^2}{d\tau^2}a = [(1+i\beta)^2-(2+3i\beta-\beta^2)\mathrm{sech}^2(\tau/\tau_u)]a \tag{9.12.8}$$

式中，β 称之为啾啾参数，A 为振幅. 代入 (9.12.5) 式，便得

$$i\xi + \Gamma - g + \frac{1}{\tau_u^2}\left(\frac{-g}{\Omega_g^2} + iD\right)(1+i\beta)^2 = 0 \tag{9.12.9}$$

$$-\frac{1}{\tau_u^2}\left(-\frac{g}{\Omega_g^2} + iD\right)(2+3i\beta-\beta^2) - (\gamma+i\delta)A^2 = 0 \tag{9.12.10}$$

令

$$D_n = \frac{D\Omega_g^2}{g}, \qquad \tau_n = \frac{A^2\tau_u^2\Omega_g^2}{g} = \frac{W\tau_u\Omega_g^2}{2g} \tag{9.12.11}$$

式中，$W = 2A^2\tau_u$ 为光脉冲能量，将 (9.12.11) 式代入 (9.12.10) 式得

$$(1-iD_n)(2+3i\beta-\beta^2) = (\gamma+i\delta)\tau_n \tag{9.12.12}$$

即

$$2-\beta^2+3i\beta = \frac{\tau_n}{1+D_n^2}[\gamma - D_n\delta + i(\delta+\gamma D_n)] \tag{9.12.13}$$

$$\frac{3(-\beta)}{2-\beta^2} = \frac{\delta+\gamma D_n}{D_n\delta-\gamma} = \frac{1}{x} \tag{9.12.14}$$

解得

$$-\beta = -\frac{3}{2}x \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + 2} \tag{9.12.15}$$

根号前的“±”号由 β 的大小及 x 的符号而定 (见表 9.1). 当 β 求得后，按 (9.12.11) 式规一化的脉宽 τ_n 的值由 (9.12.12) 式的实部、虚部求得为

$$\tau_n = \frac{2-3(-\beta)D_n-\beta^2}{\gamma} = \frac{-2D_n-3(-\beta)+D_n\beta^2}{\delta} \tag{9.12.16}$$

表 9.1 $\delta+\gamma D_n$

		+	−
$\delta D_n-\gamma$	+	$\beta^2>2,\ x>0,\ -\beta<0;\ (-)$	$\beta^2>2,\ x<0,\ -\beta>0;\ (+)$
	−	$\beta^2<2,\ x<0,\ -\beta<0;\ (-)$	$\beta^2<2,\ x>0,\ -\beta>0;\ (+)$

图 9.28,9.29 给出啾啾数 β 及脉冲宽度 τ_n 随 D_n 的变化. 图 9.28 中损耗 $\gamma=1$ 固定，但 SPM 参量 δ 取不同值. 图 9.29 中 $\delta=4$ 固定，但 γ 取不同值.

由图 9.28,9.29 看出，在正常色散区 $D_n>0$, 啾啾参数 β 及脉宽 τ_n 均比较大，这时由方程 (9.12.10), 啾啾以及增益色散对脉冲压缩起了重要作用. 但在反常色散区 $D_n<0$,β 与 τ_n 均较小，啾啾几乎不起作用，脉冲压缩则是靠群速度色散 (GVD) 、类孤子整形作用. 除了看脉宽 τ_n 外，还要看稳定性. (9.12.9) 式的实部即

$$\Gamma - g - (1-\beta^2-2\beta D_n)\frac{g}{\tau_u^2\Omega_g^2} = 0 \tag{9.12.17}$$

当 $\Gamma - g_{cw} = 0$ 已经是准连续激光的阈值时，上式可写为

$$g - g_{cw} = -(1-\beta^2-2\beta D_n)\frac{g}{\tau_n^2\Omega_g^2} \tag{9.12.18}$$

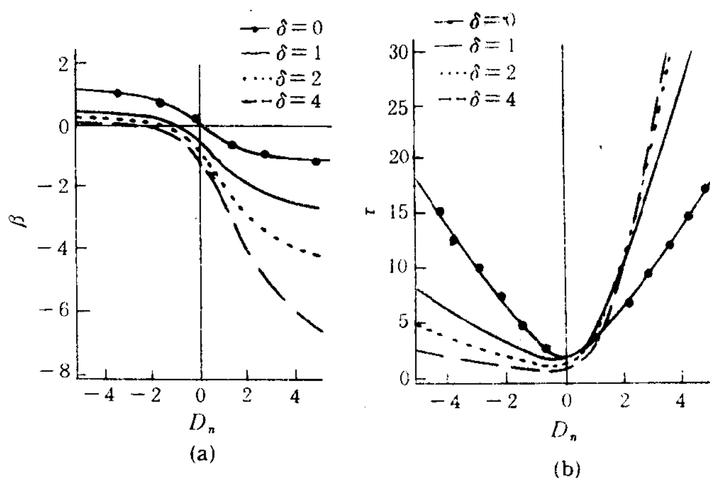


图 9.28 (a) β 随 D_n 的变化；(b) τ_n 随 D_n 的变化 ($\gamma = 1$)

(参照 Haus [44])

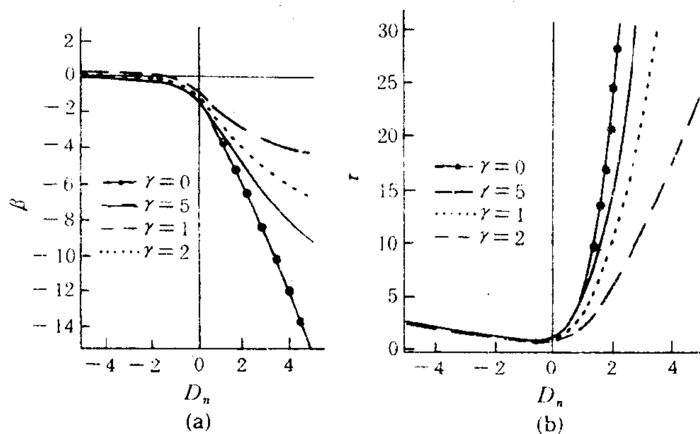


图 9.29 (a) β 随 D_n 的变化；(b) τ_n 随 D_n 的变化 (δ =4)

(参照 [44])

锁模激光要求的增益应比准连续激光的阈值 g_{cw} 低，才能稳定在锁模状态工作，否则在锁模前就已经是准连续状态，故稳定条件应为

$$1-\beta^2-2\beta D_n>0 \tag{9.12.19}$$

参看图 9.28,9.29, 在 $D_n>0$, 即正常色散区的稳定性有上式小于 0 的情形，即不稳的情形. 在反常区 $D_n=0$ 附近也有上式小于 0, 即不稳的情形，变化要平稳些. 在离 $D_n=0$ 较远的地方无论是反常区或正常区均是稳定的.

第十章 光学噪音、分岔和混沌

在光与原子相互作用的 Langevin 方程中包含各种无规力 (光学噪音) 的影响，所以只有将所观察量对无规力求统计平均后，才能与实验值联系起来. 光学混沌则是另外一种情形，不需要在动力学方程中加上无规力的影响，当条件合适时，就会出现被观察量如输出光强的完全无规现象，这就是所谓光学混沌. 对光学分岔和混沌现象的研究，是非线性光学发展的一个新阶段，因而需先对随机过程理论和决定性混沌理论作一简要介绍，然后分析光学中的噪音、分岔和混沌现象.

10.1 随机过程理论

10.1.1 历史的回顾 [1]

1827 年 Robert Brown 对悬浮于水中的花粉颗粒的无规运动进行了观察. 这种运动后来被称之为布朗运动. 为揭开布朗运动之谜， Einstein 于 1905 年发表了关于悬浮液中小质点的分子运动理论 [2]. 他意识到这些小质点的运动是彼此无关的. 设想 n 个小质点分布在 x 轴上，在 τ 时间间隔内各个质点将发生不同的移位 Δ. 移位在 $\Delta \sim \Delta + d\Delta$ 内的粒子数 dn 可表示为

$$dn = n\phi(\Delta)d\Delta, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\Delta)d\Delta = 1 \tag{10.1.1}$$

式中， $\phi(\Delta)d\Delta$ 表示移位在 $\Delta \sim \Delta + d\Delta$ 的几率， $\phi(\Delta)$ 是 Δ 的偶函数， $\phi(\Delta) = \phi(-\Delta)$. 又设在 x 处， t 时的质点的分布密度为 $f(x,\ t)$, 则得

$$f(x,\ t+\tau)dx = dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x+\Delta,\ t)\phi(\Delta)d\Delta$$

$$\begin{aligned} f + \frac{\partial f}{\partial \tau}\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x,\ t) + \Delta \frac{\partial f(x,\ t)}{\partial x} + \frac{\Delta^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,\ t) \right) \phi(\Delta)d\Delta \\ &= f + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \phi(\Delta)d\Delta \end{aligned} \tag{10.1.2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} &= D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ D &= \frac{1}{2\tau}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta^2 \phi(\Delta)d\Delta \end{aligned} \tag{10.1.3}$$

式中， D 为扩散系数. (10.1.3) 式就是分布函数 $f(x,t)$ 所满足的扩散方程，其解为

$$f(x,\ t) = \frac{n}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right) \tag{10.1.4}$$

应用 (10.1.4) 式可算出质点在 x 轴上的平均值 $< x >$ 及均方值 $< x^2 >$:

$$
\begin{aligned}
&< x >= \int xf(x,\ t)dx = 0 \\
&< x^2 >= \int x^2 f(x,\ t)dx = 2Dt
\end{aligned} \tag{10.1.5}
$$

Langevin 用如下的运动方程来描述质点的运动 [3]:

$$
m\frac{d^2x}{dt^2} = -6\pi\eta a\frac{dx}{dt} + X \tag{10.1.6}
$$

式中右端第一项为悬浮液体的粘性对质点运动的阻力， η 为粘性系数. 重要的是第二项，即 Langevin 引进的无规力 X, 它体现了粒子间的碰撞作用. 这种作用是短程的，只在碰撞的瞬间起作用，而且是频繁的、无规的，因为粒子数很多. 将 (10.1.6) 式用 x 乘，便可写为

$$
\frac{m}{2}\frac{d^2}{dt^2}x^2 - mv^2 = -3\pi\eta a\frac{dx^2}{dt} + Xx \tag{10.1.7}
$$

将这方程对大量的粒子求和，并应用 $<\dfrac{mv^2}{2}>=\dfrac{kT}{2}$ 以及 X 的无规性 $< xX >= 0$, 便得

$$
\frac{m}{2}\frac{d^2 < x^2 >}{dt^2} + 3\pi\eta a\frac{d < x^2 >}{dt} = kT \tag{10.1.8}
$$

积分上式，便得

$$
\frac{d < x^2 >}{dt} = \frac{kT}{3\pi\eta a} + C\exp\left(\frac{-6\pi\eta at}{m}\right) \tag{10.1.9}
$$

式中， C 为积分常数. 当 t 稍大时，第二项实际可略去，进一步积分便得

$$
< x^2 > - < x_0^2 >= \frac{kT}{3\pi\eta a}t \tag{10.1.10}
$$

将这一结果与 Einstein 所推导的 (10.1.5) 式进行比较，便求得扩散系数

$$
D = \frac{kT}{6\pi\eta a} \tag{10.1.11}
$$

(10.1.11) 式给出了一种计算扩散系数 D 的方法，所涉及的物理参量为温度 T 、粘性 η 及粒子直径 a 等.

将 Einstein 方法与 Langevin 方法进行比较. Einstein 得到分布函数 $f(x,\ t)$ 满足的扩散方程，后来发展为 Chapman-Kolmogrov 方程及 Fokker–Planck 方程；Langevin 得到的是一种包含无规力 X 作用的随机微分方程，解也是一个随机函数. Einstein 在求解时假定了在 t 时粒子位置的变化量 Δ 完全与前些时位置无关；在 Langevin 方程的求解中并未明显提到这一点，但已隐含在 $< xX >= 0$ 的假定中，因为 X 是无规的，作为时间函数的粒子的坐标 $x(t)$ 也是无规的，且 X 与 x 无关，导致质点发生 Δ 变化的是 X,X 与 x 无关，也就是与前些时的 Δ 无关. 故这两种方法为等价. 此外， Langevin 方法还具有一种物理直观性，若干年后， Ito 的积分定义及随机微分方程理论就是据此而发展起来的.

10.1.2 Markov 过程

对布朗运动的分布函数描述应建立在条件概率的基础上. 这一点已被 Wiener 详细

研究过. 将 (10.1.2) 式中的 $f(x,\ t)$ 写成 $f(x,\ t;\ x_0,\ t_0)$[4], 并通过规一化将 D 取为 1/2. 令 $n=1$, 则 (10.1.4) 式可写为

$$f(x,\ t;x_0,\ t_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}}e^{-(x-x_0)^2/[2(t-t_0)]} \tag{10.1.12}$$

$$<x>=<x-x_0>+x_0=x_0 \tag{10.1.13}$$

$$<(x-x_0)^2>=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,\ t;\ x_0,\ t_0)(x-x_0)^2dx=t-t_0 \tag{10.1.14}$$

由 (10.1.12) 式看出，当 $t-t_0\to 0$ 时， $f(x,\ t;\ x_0,\ t_0)\to\delta(x-x_0)$. 此即初始时，粒子处于 $x=x_0$ 的位置.

$x(t)-x_0$ 作为 t 的连续函数，它的平均值与均方差分别为 0 与 $t-t_0$. 随着时间的增长， $t-t_0\to\infty$, 均方值发散. 十分有意义的是， $x(t)-x_0$ 是 t 的连续函数，但微商 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x(t+h)-x(t)}{h}$ 却是不存在的. 现证明如下：

设 k 为任意给定的正数，则粒子在 $t,\ t+h$ 时的位置 $x(t),\ x(t+h)$ 满足 $|x(t+h)-x(t)|\ >\ kh$ 的概率为

$$\begin{aligned}P\{|x(t+h)-x(t)|\ >\ kh\} &= \int_{-\infty}^{-kh}+\int_{kh}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi h}}e^{-(x(t+h)-x(t))^2/2h}dx(t+h)\\ &= 2\int_{kh}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi h}}e^{-W^2/2h}dW\end{aligned} \tag{10.1.15}$$

当 $h\to 0$, 有 $P\to 2\int_{k\sqrt{h}}^{\infty}\dfrac{1}{2\pi}e^{-u^2/2}du=1$. 表明 $|x(t+h)-x(t)|/h$ 当 $h\to 0$ 时，比任意给定的正数 k 都大，亦即微商是不存在的.

图 10.1 给出 Wiener 过程取样曲线. 从中可见急剧变化的情形，也可看出布朗运动虽然连续，但没有一处是可微商的；三条取样曲线，开始时靠得很近，但后来的变异是很大的.

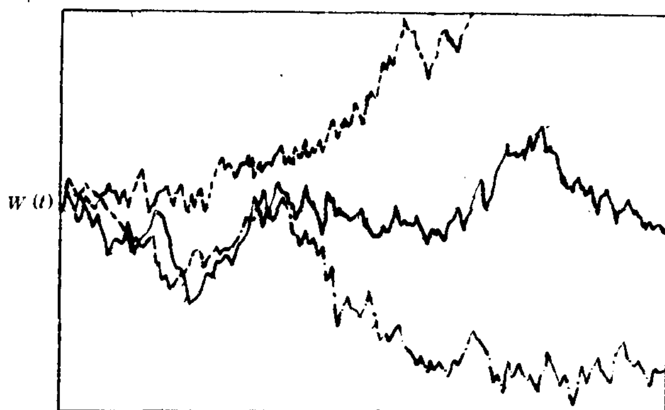


图 10.1　三条 Wiener 过程的取样曲线，(参照 Gardiner [1])

上面我们研究的 Wiener 过程实际上是 Markov 过程的一个特例. Markov 过程的含义为“知道了现在，便知道了将来，而无需涉及过去.”用条件概率的话来说便是：设 $t>\tau_1>\tau_2$, 则有条件概率

$$p(x,t|x_1,\tau_1;x_2,\tau_2)=p(x,t|x_1,\tau_1) \tag{10.1.16}$$

根据这一定义，事件 x 在将来 t 时出现的概率仅与在当前 τ_1 时的 x_1 值有关，与过去 τ_2 时的 x_2 值无关. 根据这一定义，可将条件概率 $p(x_1,t_1|x_3,t_3)$ 表示为

$$p(x_1,t_1|x_3,t_3)=\int dx_2p(x_1,t_1|x_2,t_2)p(x_2,t_2|x_3,t_3),\quad t_1>t_2>t_3 \tag{10.1.17}$$

该式又称之为 Chapman–Kolmogrov 方程．这是当 x 连续变化时的方程．如 x_2 只能取离散值，则上式应写为

$$p(x_1,t_1|x_3,t_3)=\sum_{x_2}p(x_1,t_1|x_2,t_2)p(x_2,t_2|x_3,t_3),\quad t_1>t_2>t_3 \tag{10.1.18}$$

一特定的 Markov 过程是否连续，可采用下面判据来检验．若在 t 时为连续，则对所有的 x 均应满足

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x-z|>\epsilon}dx\ p(x,t+\Delta t|z,t)=0 \tag{10.1.19}$$

否则便是离散的．这就意味着 $\Delta t\to 0$ 时初始位置 z 与末了值 x 之差大于 ϵ 的几率 $P(x,t+\Delta t|z,t)\to 0$, 而且比 Δt 更快地趋近于 0. 很明显， Einstein 的布朗运动解

$$p(x,t+\Delta t|z,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi D\Delta t}}\exp\left[-\frac{(x-z)^2}{4D\Delta t}\right] \tag{10.1.20}$$

满足 (10.1.19) 式，且是连续的，但 Cauchy 过程

$$p_c(x,t+\Delta t|z,t)=\frac{\Delta t}{\pi}\frac{1}{(x-z)^2+\Delta t^2} \tag{10.1.21}$$

不满足 (10.1.19) 式，是离散的．图 10.2 给出这两过程的取样曲线． Cauchy 过程与 Einstein 方程均满足 Chapman–Kolmogrov 方程 (10.1.17). 所有 Markov 过程均满足等式

$$\lim_{\Delta t\to 0}p(x,t+\Delta t|z,t)=\delta(x-z) \tag{10.1.22}$$

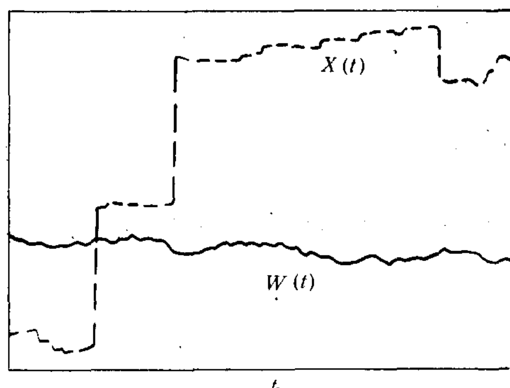


图 10.2 Cauchy 过程 $X(t)$(– – –) 与 Brownan 运动 $W(t)$(—) 的取样曲线
(参照 [1])

在 (10.1.17) 式基础上可导出 Chapman–Kolmogorov 微分方程．为此我们计算函数 $f(x)$ 的期待值关于时间的导数：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\int dxf(x)p(x,t|y,t')&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left\{\displaystyle\int dxf(x)[p(x,t+\Delta t|y,t')-p(x,t|y,t')]\right\}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\int dx\int dzf(x)p(x,t+\Delta t|z,t)p(z,t|y,t')-\int dzf(z)p(z,t|y,t')\right\}/\Delta t\end{aligned} \tag{10.1.23}$$

在上式中我们已应用了 Chapman–Kolmogorov 方程 (10.1.17). 现将 (10.1.23) 式中对 x 的积分分为 $|x-z|\geq\varepsilon$ 与 $|x-z|<\varepsilon$ 两个区域；又假定 x, z 为矢量，其分量用 x_i, z_i 来表示．当 $|x-z|<\varepsilon$, 假定

$$f(x)=\ f(z)+\sum_i\frac{\partial f(z)}{\partial z_i}(x_i-z_i)+\sum_{i,\ j}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(z)}{\partial z_i\partial z_j}(x_i-z_i)(x_j-z_j)+|x-z|^2R(x,z) \tag{10.1.24}$$

当 $|x-z|\to 0,|R(x,z)|\to 0$,, 将 (10.1.24) 式代入 (10.1.23) 式，便得

$$\frac{\partial}{\partial t}\int dxf(x)p(x,t|y,t')=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Big\{\int\int_{|x-z|<\varepsilon}dxdz\Big[\sum_i(x_i-z_i)\frac{\partial f}{\partial z_i}$$
$$+\sum_{i,\ j}\tfrac{1}{2}(x_i-z_i)(x_j-z_j)\times\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial z_j}\Big]p(x,t+\Delta t|z,t)p(z,t|y,t')$$
$$+\int\int_{|x-z|<\varepsilon}dxdz|x-z|^2R(x,z)p(x,t+\Delta t|z,t)p(z,t|y,t')$$
$$+\int\int_{|x-z|\geq\varepsilon}dxdzf(x)p(x,t+\Delta t|z,t)p(z,t|y,t')$$
$$+\int\int_{|x-z|<\varepsilon}dxdzf(z)p(x,t+\Delta t|z,t)p(z,t|y,t')$$
$$-\int\int dxdzf(z)p(x,t+\Delta t|z,t)p(z,t|y,t')\Big\}\tag{10.1.25}$$

注意到 $\int dx\ p(x,t+\Delta t|z,t)=1$, 故上式中最后一项即为 (10.1.23) 式中最后一项.

下面假定:

(1) $$\lim_{\Delta t\to 0}p(x,t+\Delta t|z,t)/\Delta t=W(x|z,t)\tag{10.1.26}$$

(当 $|x-z|\geq\varepsilon$, 上式对所有的 x, z, t 均成立.)

(2) $\lim_{\Delta t\to 0}\int_{|x-z|<\varepsilon}dx\ (x_i-z_i)p(x,t+\Delta|z,t)=A_i(z,t)+O(\varepsilon)$

(3) $$\lim_{\Delta t\to o}\int_{|x-z|<\varepsilon}dx\ (x_i-z_i)(x_j-z_j)p(x,t+\Delta t|z,t)=B_{ij}(z,t)+O(\varepsilon)\tag{10.1.27}$$

(上式对所有的 z, ε, t 均成立.)

应用 (10.1.26) 和 (10.1.27) 式, 通过部分积分及函数 $f(z)$ 的任意性, 由 (10.1.25) 式可得出 Chapman–Kolmogorov 微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}p(z,t|y,t')=-\sum_i\frac{\partial}{\partial z_i}[A_i(z,t)p(z,t|y,t')]+\frac{1}{2}\sum_{i,\ j}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_j}[B_{ij}(z,t)p(z,t|y,t')]$$
$$+\int dx\ [W(z|x,t)p(x,t|y,t')-W(x|z,t)p(z,t|y,t')]\tag{10.1.28}$$

式中, $p(z,t|y,t')$ 满足初始条件

$$p(z,t'|y,t')=\delta(z-y)\tag{10.1.29}$$

根据 (10.1.28) 和 (10.1.29) 式, 可定义下面三种不同的过程:

(1) 跳跃过程. 假定 $A_i(z,t)=B_{ij}(z,t)=0$, (10.1.28) 式过渡到

$$\frac{\partial}{\partial t}p(z,t|y,t')=\int dx\ [W(z|x,t)p(x,t|y,t')-W(x|z,t)p(z,t|y,t')]\tag{10.1.30}$$

注意到初始条件 (10.1.29) 式及 W 的定义 (10.1.26) 式, 便得出 (10.1.30) 式包含 Δt 的一级近似解为

$$p(z,t+\Delta t|y,t)=\delta(y-z)[1-\int dx\ W(x|y,t)\Delta t]+W(z|y,t)\Delta t\tag{10.1.31}$$

该式的前一项表示质点仍停留于原来位置, 而后一项则表示由 y 跃迁至 z 的几率, 故称这一过程为跳跃过程.

如果质点的状态只能是整数，则主方程 (10.1.30) 可写为

$$\frac{\partial}{\partial t}p(n,t|n',t') = \sum_m [W(n|m,t)p(m,t|n',t') - W(m|n,t)p(n,t|n',t')] \tag{10.1.32}$$

(2) 扩散过程 (Fokker–Planck 方程). 若假定 $W(z|x,t)$ 为 0, 则 Chapman–Kolmogrov 方程过渡到 Fokker–Planck 方程

$$\frac{\partial}{\partial t}p(z,t|y,t') = -\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i}[A_i(z,t)p(z,t|y,t')] + \frac{1}{2}\sum \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j}[B_{ij}(z,t)p(z,t|y,t')] \tag{10.1.33}$$

式中，$A(z,t)$ 为驱动矢量，$B(z,t)$ 为扩散矩阵. 方程 (10.1.33) 的解满足初始条件 (10.1.29) 式，当 Δt 很小时，解 $p(z,t+\Delta t|y,t)$ 会是很尖锐的. 相比之下，$A(z,t)$, $B(z,t)$ 关于 z 的导数可略去不计；而 $A(z,t)$, $B(z,t)$ 可用 $A(y,t)$, $B(y,t)$ 代替. 于是，(10.1.33) 式可近似写为

$$\frac{\partial}{\partial t}p(z,t|y,t') = -\sum A_i(y,t)\frac{\partial p(z,t|y,t')}{\partial z_i} + \sum_{ij}\frac{1}{2}B_{ij}(y,t)\frac{\partial^2 p(z,t|y,t')}{\partial z_i \partial z_j} \tag{10.1.34}$$

$$\begin{aligned} p(z,t+\Delta t|y,t) &= (2\pi)^{-N/2}\{\det B(y,t)\}^{1/2}[\Delta t]^{-1/2} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{[z-y-A(y,t)\Delta t]^T B^{-1}(y,t)[z-y-A(y,t)\Delta t]}{\Delta t}\right\} \end{aligned} \tag{10.1.35}$$

式中，$B^{-1}(y,t)$ 为 $B(y,t)$ 的逆矩阵，这是 N 维空间的高斯分布，平均值为 $y+A(y,t)\Delta t$, 方差矩阵为 $B(y,t)$, 亦即

$$z(t+\Delta t) = y(t) + A(y(t),t)\Delta t + \eta(t)(\Delta t)^{1/2} \tag{10.1.36}$$

$$<\eta(t)>=0, \qquad <\eta(t)\eta(t)^T>=B(y,t) \tag{10.1.37}$$

由于解中包含了 $(\Delta t)^{1/2}$, 故无处可微.

(3) 决定论过程 (Liouville 方程). 当只有驱动矢量 $A(z,t)$ 不为 0 时，便得到决定论过程的 Liouville 方程

$$\frac{\partial}{\partial t}p(z,t|y,t') = -\sum \frac{\partial}{\partial z_i}[A_i(z,t)p(z,t|y,t')] \tag{10.1.38}$$

设 $x(t)$ 是方程

$$\frac{d}{dt}x(t) = A(x(t),t), \qquad x(y,t') = y \tag{10.1.39}$$

的解. 则 (10.1.38) 式的解为

$$p(z,t|y,t') = \delta[z-x(y,t)] \tag{10.1.40}$$

(10.1.38) 式的左边为

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta[z-x(y,t)] = -\sum \frac{\partial}{\partial z_i}\delta[z-x(y,t)]\frac{dx_i(y,t)}{dt}$$

右边为

$$-\sum_i \frac{\partial}{\partial z_i}[A_i(z,t)\delta(z-x(y,t)] = -\sum_i A_i(x(y,t),t)\frac{\partial}{\partial z_i}\delta[z-x(y,t)]$$

应用 (10.1.39) 式，得知上面的左边与右边是相等的.

解 (10.1.40) 式表明质点运动的初始值 $x(y,t') = y$ 完全确定了 $t > t'$ 的轨迹，即 $z = x(y,t)$.

一般的 Chapman–Kolmogrov 微分方程，$A(z,t)$, $B(z,t)$, $W(z|x,t)$ 均不为 0. **其质点**轨迹为在 A 所确定的光滑曲线上，加上由 B 所标志的高斯起伏，**再加上由** W 所标志的跳跃衔接 (参见图 10.2).

现在我们讨论在量子光学应用中**常遇到的将线性驱动** kx **加到** Wiener 过程上得出的 Ornstein–Uhlenbeck 方程 [5]

$$\begin{aligned}&\tfrac{\partial}{\partial t}p = \tfrac{\partial}{\partial x}(kxp) + \tfrac{1}{2}D\tfrac{\partial^2}{\partial x^2}p \\ &p = p(x,t|x_0,0)\end{aligned} \tag{10.1.41}$$

求 $p(x,t|x_0,0)$ 的 Fourier 变换

$$\phi(s,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}p(x,t|x_0,0)dx \tag{10.1.42}$$

于是 (10.1.41) 式为

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + ks\frac{\partial}{\partial s}\phi = -\frac{D}{2}s^2\phi \tag{10.1.43}$$

由 p 的初始值条件 $p(x,0|x_0,0) = \delta(x-x_0)$, 得出 ϕ 的初始条件

$$\phi(s,0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\delta(x-x_0)dx = e^{isx_0} \tag{10.1.44}$$

(10.1.43) 式的通解为

$$\phi(s,t) = e^{-Ds^2/4k}g(se^{-kt}) \tag{10.1.45}$$

为了满足初值 $\phi(s,0) = e^{isx_0}$, 可适当选择 $g(se^{-kt})$, 最后得

$$\phi(s,t) = \exp\left[\frac{-Ds^2}{4k}(1-e^{-2kt}) + isx_0e^{-kt}\right] \tag{10.1.46}$$

求 $\phi(s,t)$ 的反变换，便得

$$\begin{aligned}p(x,t|x_0,0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(s,t)e^{-isx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi D}{k}(1-e^{-2kt})}}\exp\left[-\frac{(x-x_0e^{-kt})^2}{\frac{D}{k}(1-e^{-2kt})}\right]\end{aligned} \tag{10.1.47}$$

此即 Ornstein–Uhlenbeck 方程的解.

10.1.3 Ito 积分与随机微分方程

由 Langevin 方程导出 Einstein 解释布朗运动的结果，方法简洁而物理意义深刻，并能将扩散系数与粒子半径、粘性系数等关联起来. Langevin 方程的标准形式为

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t) + b(x,t)\xi(t) \tag{10.1.48}$$

式中， $a(x,t)$, $b(x,t)$ 为已知的函数，但 $\xi(t)$ 为快变的随机变量．不失一般性，可假定

$$< (\xi(t) >= 0, \qquad < \xi(t)\xi(t') >= \delta(t-t') \tag{10.1.49}$$

(10.1.48) 式含有随机变量 $\xi(t)$, 故称之为随机微分方程．若定义

$$W(t) = \int_0^t \xi(t')dt' \tag{10.1.50}$$

而 Langevin 方程的积分至少形式上可写为

$$x(t) - x(0) = \int_0^t a(x(t'),t')dt' + \int_0^t b(x(t'),t')dW(t') \tag{10.1.51}$$

式中，随机量 $W(t)$ 是 Wiener 型的布朗运动量，易证它具有如下的平均值及方差 [1]:

$$< dW >= 0, \qquad < dW^2 >= dt \tag{10.1.52}$$

当 $N > 2$ 时，还有

$$< dW^N >= 0 \tag{10.1.53}$$

但 (10.1.51) 式中的积分还需要进一步定义，否则就是不确定的，因为它属于我们以前未遇到的随机积分 $\int_{t_0}^t G(t')dW(t')$. 现研究与此积分相应的和式．

$$S_n = \sum_{i=1}^n G(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})]$$
$$t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_{n-1} < t_1, \qquad t_{i-1} \le \tau_i \le t_i \tag{10.1.54}$$

的极限．若当 $\max \Delta t_i = \max |t_i - t_{i-1}| \to 0$, S_n 的极限存在，并与 τ_i 在 $t_{i-1} \to t_i$ 内的取值无关，那么 S_n 的极限就是通常意义下的积分 $\int_{t_0}^{t_1} G(t')dW(t')$ 的定义．但就目前情况来说并非如此，以 $G(\tau_i) = W(\tau_i)$ 为例，则有

$$\begin{aligned} < S_n > &= < \sum_{i=1}^n W(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})] > \\ &= \sum_{i=1}^n [\min(\tau_i, t_i) - \min(\tau_i, t_{i-1})] = \sum_{i=1}^n (\tau_i - t_{i-1}) \end{aligned} \tag{10.1.55}$$

设

$$\tau_i = \alpha t_i + (1-\alpha)t_{i-1}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

则有

$$< S_n >= \sum_{i-1}^n (t_i - t_{i-1})\alpha = (t - t_0)\alpha \tag{10.1.56}$$

可见， $< S_n >$ 的取值与 α 的取值有关，亦即与 τ_i 在 (t_{i-1}, t_i) 中的取值有关，可见随机积分不是按通常意义下积分．若将 α 取为 0, 即 $\tau_i = t_{i-1}$, 便得 Ito 积分定义如下：

$$\int_0^t G(t')dW = \sum_{i=1}^n G(t_{i-1})[W(t_i) - W(t_{i-1})] \tag{10.1.57}$$

现在回过来看 (10.1.51) 式，按 Ito 意义将 $t_0 \to t$ 分为许多间节， $t_0 < t_1 < t_2 \cdots < t_{n-1} < t_n = t$, 对每一间节写出

$$x_{i+1} - x_i = a(x_i, t_i)\Delta t_i + b(x_i, t_i)\Delta W_i \tag{10.1.58}$$

式中

$$
\begin{aligned}
&x_i = x(t_i), \qquad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i \\
&\Delta W_i = W(t_{i+1}) - W(t_i)
\end{aligned} \tag{10.1.59}
$$

将 (10.1.58) 式对 i 求和，便得按 Ito 意义求极限的积分 (10.1.51) 式. 一般的 $f(x(t))$ 的微分为

$$
\begin{aligned}
df(x(t)) &= f(x(t)+dx(t)) - f(x(t)) \\
&= f'(x(t))dx(t) + \frac{1}{2}f''(x(t))dx(t)^2 + \cdots \\
&= f'(x(t))\{a(x(t),t)dt + b(x(t),t)dW(t)\} + \frac{1}{2}f''(x(t))[b(x(t),t)]^2[dW(t)]^2 \\
&= \left\{a(x(t),t)f'(x(t)) + \frac{1}{2}[b(x(t),t)]^2 f''(x(t))\right\}dt + b(x(t),t)f'(x(t))dW(t)
\end{aligned}
$$

即

$$
df = \left\{af' + \frac{1}{2}b^2 f''\right\}dt + bf'dW(t) \tag{10.1.60}
$$

(10.1.60) 式是单变量情形的 Ito 微分公式，将此公式推广到多变量，即 $x(t)$ 有多个分量 $x_i(t)$ 的情形. 这时 $W(t)$ 也相应地有多个分量 $W_i(t)$, 且相互独立，即

$$
\begin{aligned}
&dW_i(t)dW_j(t) = \delta_{ij}dt \\
&[dW_i(t)]^{N+2} = 0, \qquad N > 0 \\
&dW_i(t)dt = 0 \\
&dt^{1+N} = 0, \qquad N > 0
\end{aligned} \tag{10.1.61}
$$

便得 N 维随机微分方程

$$
dx(t) = A(x,t)dt + B(x,t)dW(t) \tag{10.1.62}
$$

$$
\begin{aligned}
df(x) = &\left\{\sum_i A_i(x,t)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{ij}[B(x,t)B^T(x,t)]_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}f(x)\right\}dt \\
&+\sum_{ij} B_{ij}(x,t)\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}dW_j(t)
\end{aligned} \tag{10.1.63}
$$

现在来看 Fokker–Planck 方程与随机微分方程的关联. 应用 (10.1.60) 式便得

$$
\frac{d < f[x(t)] >}{dt} =< a(x(t),t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}[b(x(t),t)]^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > \tag{10.1.64}
$$

设 $x(t)$ 具有条件概率密度 $p(x(t),t|x_0,t_0)$ 于是

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} < f[x(t)] > &= \int dx f(x)\frac{\partial}{\partial t}p(x,t|x_0,t_0) \\
&= \int dx[a(x,t)\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}(b(x,t))^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}]p(x,t|x_0,t_0)
\end{aligned} \tag{10.1.65}
$$

应用部分积分及边界条件，当 $x = \pm\infty$ 时， $af = p\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}f = 0$, 便得

$$
\int dx f(x)\frac{\partial p}{\partial t} = \int dx f(x)\left\{-\frac{\partial}{\partial x}(a(x,t)p) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b(x,t)^2 p]\right\} \tag{10.1.66}
$$

因为 $f(x)$ 是任意的，故有

$$
\frac{\partial}{\partial t}p(x,t|x_0,t_0) = -\frac{\partial}{\partial x}[a(x,t)p(x,t|x_0,t_0)] + \frac{1}{2}[b(x,t)^2 p(x,t|x_0,t_0)] \tag{10.1.67}
$$

这就是一维的 Fokker–Planck 方程. 对于多维情形, 可类似地推得

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\sum\frac{\partial A_i(x,t)p}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\{[B(x,t)B^T(x,t)]_{ij}p\} \tag{10.1.68}$$

10.2 决定性混沌

“混沌”一词起源于古中国与希腊的混沌初开无所不包的意思. 现在用这个词主要指一种“无序”与“无规”状态. 至于“决定性”一词, 在前面决定性过程 Liouville 方程 (10.1.38) 中已经出现过, 意即通过解动力学方程 (10.1.39), 由质点运动初值 ($t=t'$, $x=y$) 完全决定了质点未来时 $t>t'$ 的轨迹, 亦即未来的一切完全由初值及动力学方程所决定, 所以说是决定性的. 这里还隐含着一个假定, 即由动力学方程描述的运动应是规则的, 而不是无规或混沌的. 但在一个世纪以前, Poincare 已经知道有些力学问题, 如不可积的三体问题会导致完全混沌的轨道解 [8]. 可是, 这件事的重要意义并没有引起注意. 70 年后 (1963 年),Lorenz 又重新发现在求解三个一阶的非线性微分方程组时也得出运动轨迹的完全无规 [9]. 这是在耗散系统中发现的第一个决定性混沌的例子. 现在, 决定性混沌一词, 即指一非线性动力学方程的解. 它虽然由初值出发唯一地确定了系统在未来时的演化过程, 但表现这一演化过程的运动轨迹却是无规的、混沌的. 这种无规行为并不是由外在的噪音引起的, 因为动力学方程中并未包含无规力; 也不是无穷自由度引起的, 因为 Lorenz 方程只有三个自由度; 也不是量子力学的测不准关系, 因为所讨论的方程是经典的流体力学方程. 现在已经弄明白了, 产生这种无规行为的最根本的原因乃是动力学方程的解很灵敏地依赖于初值. Lorenz 称之为蝴蝶效应. 这种效应的存在, 已对基础物理学的可测性带来了冲击. 因为给出物理量的初值是建立在测量的基础上的, 而测量是有一定准确度和误差的. 如果在误差范围内的各个初值, 在未来的发展中, 表现为两种或多种完全不同的、差异很大的结果. 这就意味着实际上我们已失去对这物理过程或物理量进行预测的可能性. 现撇开这些基础问题不说, 仍回到决定性混沌问题上来 [10].

动力学方程的非线性, 乃是产生决定性混沌的必要条件. 当然不是所有的非线性方程均导致决定性混沌. 如所周知, 非线性动力学系统可分为耗散系统与保守系统两大类. 从现在已经遇到的情形来看, 光学混沌较多涉及耗散系统的混沌. 在这一节中, 我们要讨论的问题有决定性混沌的表现及判定办法、几种通向混沌的道路、奇异吸引子等, 然后再补充以关于保守系统趋向混沌的分析.

10.2.1 决定性混沌的表现及判定

1. *决定性扩散映象*

决定性扩散映象与无规力推动的 Brownian 运动很相似. 参照 (10.1.6) 式, 当流体的粘性 η 很大, 而加速度项 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 可略去时, 作 Brownian 运动的质点的 Langevin 方程可写为

$$\frac{dx}{dt}=\xi(t) \tag{10.2.1}$$

无规力 $\xi(t)$ 满足方程

$$<\xi(t)>=0, \qquad <\xi(t)\xi(t')>=\delta(t-t') \tag{10.2.2}$$

又根据 (10.2.1) 式，将 x 表示为

$$\begin{aligned} x &= \int_0^t \xi(t')dt', \qquad <x>=0 \\ <x^2> &= <\int_0^t \xi(t')dt' \int_0^t \xi(t'')dt''>=t \end{aligned} \tag{10.2.3}$$

这结果表明，随扩散时间 t 的增长，扩散距离 x 的均方值 $<x^2>$ 也成正比地增长. 但这个扩散完全是由无规力 $\xi(t)$ 驱动的. $<x^2>\propto t$ 也是无规行为的一种反映. 图 10.3(a) 给出分段线性周期映象，图 (b) 给出 $f(x_\tau)$ 的函数图. 各次迭代映象的函数关系为 [11]

$$x_{\tau+1}=F(x_\tau)=x_\tau+f(x_\tau); \qquad \tau=0,\ 1,\ 2,\cdots \tag{10.2.4}$$

其中 $f(x_\tau)$ 为 x_τ 的周期函数：

$$f(x_\tau+n)=f(x_\tau), \qquad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots \tag{10.2.5}$$

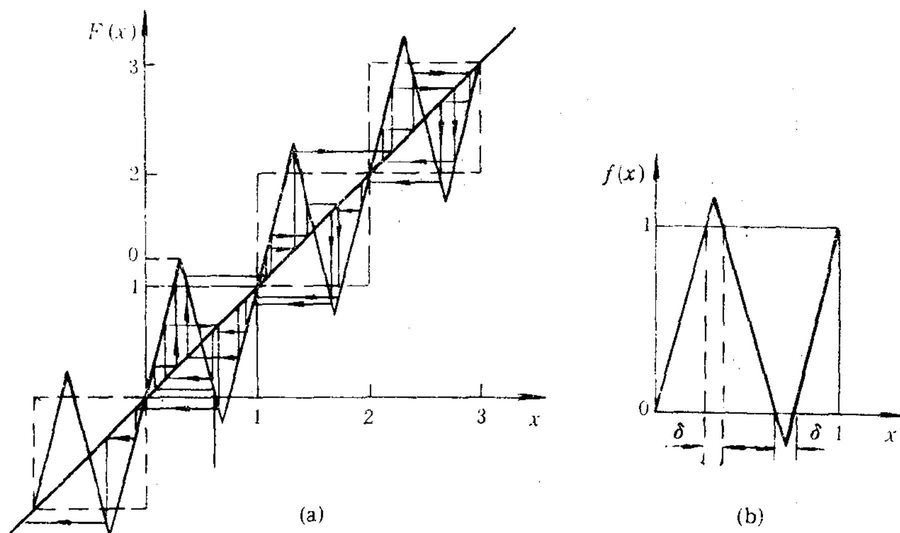


图 10.3 (a) 分段线性周期映象的扩散轨道；(b) 映象函数 $f(x)$
(参照 Grossman [11])

参看图 10.3(a) 的箭头↑, 迭代由第一个方框开始，经过多次迭代后，箭头进入上面第 2 方框，再经多次迭代进入上面第 3 方框，然后又回过来一直走到下面第 1 方框. 不难看出，当箭头触及 $f(x)$ 图上尖端部分，便转入上一方框；若触及下尖端部分便转入下一方框；若不触及上、下尖端，则仍停留在原来方框. 迭代箭头触及上、下尖端的几率均为 $\delta/1=\delta$, 不触及尖端的几率为 $1-2\delta$, 每一次迭代均有可能跳到另一方框，也有可能停在原来方框. 设总共迭代 t 次，迭代箭头已到达第 N_t 方框，于是有

$$\begin{aligned} N_t &= \sum_{\tau=0}^{t-1}(N_{\tau+1}-N_\tau)=\sum_{\tau=0}^{t-1}\Delta_\tau \\ <N_t^2> &= \sum_{\tau,\ \tau'}^{t-1} <\Delta_\tau\Delta_{\tau'}> \end{aligned} \tag{10.2.6}$$

鉴于当 $\tau \neq \tau'$ 时，Δ_τ, $\Delta_{\tau'}$ 是独立的，而 Δ_τ 可能为 0, ±1, 故有 $<\Delta_\tau>=0$, 且有

$$<\Delta_\tau \Delta_{\tau'}>=<\Delta_\tau><\Delta_{\tau'}>=0, \ \tau \neq \tau' \tag{10.2.7}$$

$$<N_t^2>=\sum_{\tau=0}^{t-1}<\Delta_\tau^2>=t<\Delta_\tau^2> \tag{10.2.8}$$

这一结果表明，经 t 次迭代后，箭头到达的方框与原来方框的距离 N_t 的平方平均值与迭代次数 t 成正比. 这与无规力驱动导致的扩散结果 (10.2.3) 式，完全相似，故称 (10.2.8) 式为决定性扩散.

2. 驱动摆

驱动摆的运动方程如下：

$$\ddot{\theta}+\gamma\dot{\theta}+\sin\theta=A\cos\omega t \tag{10.2.9}$$

式中，γ 为阻尼系数，θ 为摆离开平衡位置的幅角，A 为周期驱动力振幅. 对时间 t

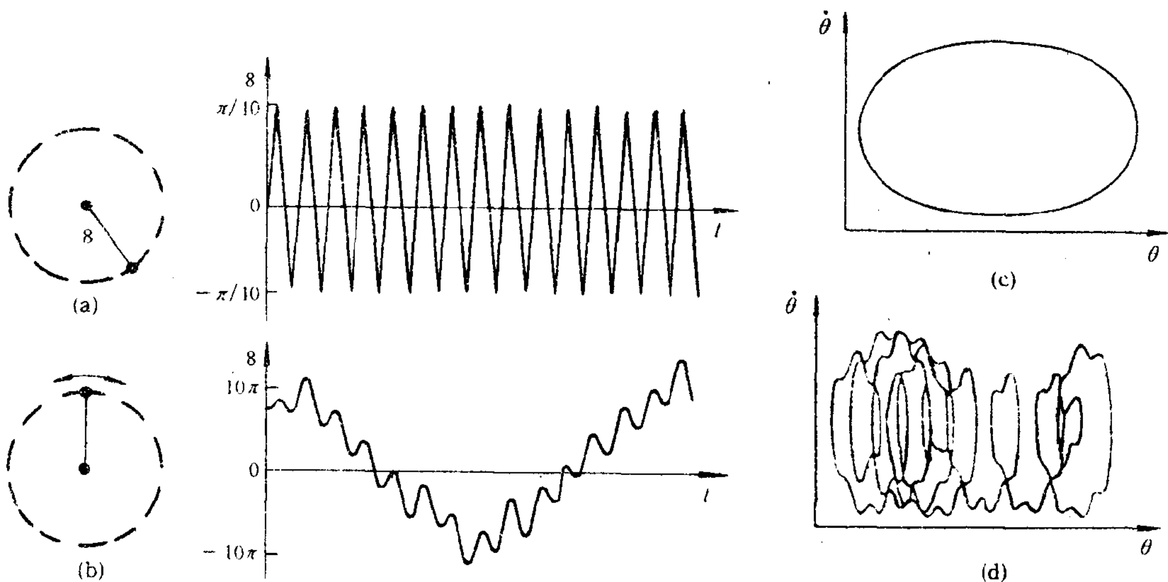


图 10.4 驱动摆向混沌运动的过渡. (a) 小驱动参数时的规则运动；(b) 在 $A=A_c$ 处的混沌运动；(c) 与 (d) 分别对应于 (a)、(b) 情形的相图 (参照 Bauer [10])

与 A 均取了适当的规一化单位，故 $\ddot{\theta}$ 与 $\sin\theta$ 的系数为 1. 摆运动方程 (10.2.9) 式的参数为 A,ω,γ. 图 10.4 给出摆动角 θ 随时间 t 的变化 [10, 12]. 当 $A<A_c$ 时，运动轨迹是规则的；相图 $\dot{\theta}$ 随 θ 的变化是一封闭的环. 但当 $A\geq A_c$ 时，运动轨迹已变为不规则，相图看上去像是混沌的. 从这个例子我们注意到，驱动摆之所以会导致混沌，主要是因为有了非线性项 $\sin\theta$; 当 $A=A_c$ 时，摆可运动到 $\theta=\pi$ 位置，即顶端. 这时运动对初值是非常敏感的. 初值 $\theta(0)$ 比 0 略大一点，$\theta(0)=\epsilon$, 或略小一点，$\theta(0)=-\epsilon$ 就决定当摆运动到接近于顶端 π 位置后，是向右转还是向左转.

3. Benard 问题

Benard(1900, 1901) 做了一个实验. 他将一层液体的底层均匀加热而上层则不加热，造成一温度差. 当温差大于一定数值时，观察到六角形的流体对流花样，这就是 Benard

问题．加热后的底层密度小，未加热的上层密度大，如没有粘性与扩散，这上层与底层的流体将是不稳定的，将会发生对流，但由于有了粘性，在一定程度上阻止了对流．又由于有热传导与质量扩散，上、下层的温度差在一定程度上被匀化，这也间接阻止了对流的发生．但当温度差过大，不能被热传导与质量扩散所平衡时，对流也就发生了．这就是 Benard 所观察到的六角形对流花样．为对 Benard 问题进行定量分析， Lorenz 采用一简化模型．如图 10.5 所示，下层为 $T+\Delta T$，上层温度为 T，在由热传导向对流过渡

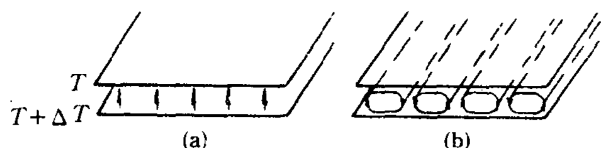


图 10.5　Benard 不稳

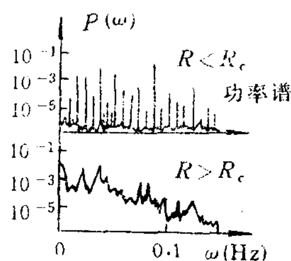


图 10.6　$R<R_c$ 与 $R>R_c$ 情形的功率谱

附近，图示的滚动形对流是主要的对流模式．仅仅保留这种对流模式，而略去其他空间分布花样的对流模式，便得出 Benard 问题简化后的 Lorenz 方程

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma X+\sigma Y\\ \dot{Y} &= rX-Y-XZ\\ \dot{Z} &= XY-bZ\end{aligned} \tag{10.2.10}$$

式中， X 正比于环流的流速， Y 正比于上升流体元与下降流体元的温度差，而 Z 正比于垂直温度分布与平均温度分布 T_m 的偏离． T_m 为

$$T_m=T_0+\beta x_3, \qquad \beta=\frac{\Delta T}{h} \tag{10.2.11}$$

式中，h 为底部至上层的厚度，x_3 为中间某一层至上层的距离．参数 $\sigma=\nu/K$ 为 Prandtl 数，即粘性系数与热导系数之比． $b=4(1+a^2)^{-1}$，$R=(gah^3/K\nu)\Delta T$ 为 Rayleigh 数，h/a 为滚动元的长度， $R_c=\pi^4a^{-2}(1+a^2)^3$，$r=R/R_c$．图 10.6 给出 Benard 的功率谱 $P(\omega)$ 随 ω 的变化曲线，其函数为

$$P(\omega)=|X(\omega)|^2, \qquad X(\omega)=\lim_{T\to\infty}\int_0^T dtX(t)e^{i\omega t} \tag{10.2.12}$$

由图看出，当 $R/R_c<1$，功率谱是线谱；当 $r=R/R_c>1$ 时，就变为连续谱了 [13]．

4.　周期撞击转子

表现出混沌行为的又一经典力学体系，即图 10.7 所示的周期撞击转子．其运动方程为

$$\ddot{\varphi}+\Gamma\dot{\varphi}=F=Kf(\varphi)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) \tag{10.2.13}$$

式中， Γ 为阻尼系数， T 为相邻两次撞击间的周期．作代换 $x=\varphi$，$y=\dot{\varphi}$，$z=t$，方程 (10.2.13) 可写为一阶非线性自治微分方程组

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\Gamma y + Kf(x)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(z-nT) \\ \dot{z} &= 1\end{aligned} \tag{10.2.14}$$

若将积分时间限制在间隔 $nT-\varepsilon<t<(n+1)T-\varepsilon,\ \varepsilon\to 0$, 则 (10.2.14) 式的解可写为

$$\begin{aligned} y(t) &= y_n e^{-\Gamma(t-nT)} + K\sum_{m=0}^{\infty} f(x_m)\int_{nT-\varepsilon}^{t} dt' e^{\Gamma(t'-t)}\delta(t'-mT) \\ &= y_n e^{-\Gamma(t-nT)} + Kf(x_n)e^{\Gamma(nT-t)} \end{aligned} \tag{10.2.15}$$

令 $y(t)=y_{n+1}e^{-\Gamma(t-(n+1)T)}$, 则得

$$y_{n+1}=[y_n+Kf(x_n)]e^{-\Gamma T} \tag{10.2.16}$$

将 (10.2.15) 式代入 (10.2.14) 式中第一方程，同样可得

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1-e^{-\Gamma T}}{\Gamma}[y_n+Kf(x_n)] \tag{10.2.17}$$

解 (10.2.16),(10.2.17) 式已包含了许多我们感兴趣的映象．例如，当 $\Gamma\to\infty,\ K/\Gamma\to 1,\ f(x_n)=(r-1)x_n-rx_n^2$,(10.2.17) 式给出

$$x_{n+1}=rx_n(1-x_n) \tag{10.2.18}$$

此即下面将详细讨论的一维二次迭代映象．一维二次迭代映象也称为逻辑映象．

又例如，将 (10.2.16) 式代入 (10.2.17) 式，得

$$x_{n+1}=x_n+\frac{e^{\Gamma T}-1}{\Gamma}y_{n+1} \tag{10.2.19}$$

即

$$y_{n+1}=(x_{n+1}-x_n)\Gamma/(e^{\Gamma T}-1) \tag{10.2.20}$$

将 (10.2.20) 式代回 (10.2.17) 式，并选择 $f(x_n)$ 使得

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n+\frac{1-e^{-\Gamma T}}{\Gamma}\left[\frac{(x_n-x_{n-1})\Gamma}{e^{\Gamma T}-1}+Kf(x_n)\right] \\ &= 1-ax_n^2+bx_{n-1}, \\ b &= -e^{-\Gamma T} \end{aligned} \tag{10.2.21}$$

式中，a,b 为常数．该式可写成 Henon 映象：

$$x_{n+1}=1-ax_n^2+y_n,\qquad y_{n+1}=bx_n \tag{10.2.22}$$

Henon 映象为二维映象．

上面举的一些混沌的例子，主要是直观判定一个方程的解是规则的还是混沌的，是不准确的．作为定量的准确判定，最常用方法之一当推 Liapunov 指数法．这个方法是将混沌行为的标志“方程的解很灵敏地依赖于初值”具体化．现以一维映象为例来说明这个判定方法．参照 (10.2.18) 式，一维迭代映象的一般形式为

$$x_{n+1}=f(x_n) \tag{10.2.23}$$

设初值为 x_0, 按上式便可得出各次迭代值

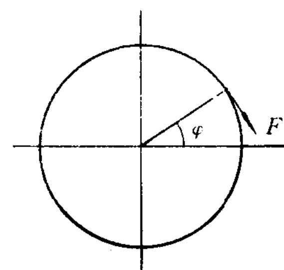


图 10.7 周期撞击转子

$$\begin{aligned}x_1 &= f(x_0) = f^{(1)}(x_0)\\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)) = f^{(2)}(x_0)\\ &\cdots\cdots\cdots\\ x_n &= f(f\cdots f(x_0)\cdots) = f^{(n)}(x_0)\end{aligned} \tag{10.2.24}$$

当初值 x_0 变为 $x_0+\varepsilon$, 各次迭代值也发生相应变化：

$$\begin{aligned}&x_1+\varepsilon_1 = f^{(1)}(x_0+\varepsilon), \qquad \varepsilon_1 \simeq \frac{df^{(1)}(x_0)}{dx_0}\varepsilon = f'(x_0)\varepsilon\\ &x_2+\varepsilon_2 = f^{(2)}(x_0+\varepsilon), \qquad \varepsilon_2 \simeq \frac{df^{(2)}(x_0)}{dx_0}\varepsilon = \frac{df^{(1)}}{dx_1}\frac{df^{(2)}}{df^{(1)}}\varepsilon = f'(x_1)f'(x_0)\varepsilon\\ &\cdots\cdots\cdots\\ &x_n+\varepsilon_n = f^{(n)}(x_0+\varepsilon), \qquad \varepsilon_n \simeq f'(x_{n-1})\cdots f'(x_0)\varepsilon\end{aligned} \tag{10.2.25}$$

Liapunov 指数 λ 的定义为

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\varepsilon_n/\varepsilon)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\ln f'(x_i) \tag{10.2.26}$$

亦即当 n 很大时，有

$$\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon} \simeq e^{n\lambda} \tag{10.2.27}$$

当 $\lambda<0$ 时，随着迭代次数 n 增大，则有 $\varepsilon_n/\varepsilon \ll 1$, 函数值 x_n 对初值 x_0 的依赖很不灵敏；当 $\lambda>0$, $\varepsilon_n/\varepsilon \simeq e^{\lambda n}$ 随 n 的增大而指数增大，即 x_n 很灵敏地依赖于初值. 前一种 $(\lambda<0)$ 可看作规则解的判据；而后一种 $(\lambda>0)$ 可看作混沌解的判据. 具体例子将在下面的讨论中给出.

10.2.2 一维二次迭代映象 [14, 15]

从上面举的一些例子，我们已经看到动力学方程的解在有些情况下是有规的 (见图 10.4(c)), 而在另一些情况下则是混沌的 (见图 10.4(d)). 区别仅在于前者 $A<A_c$, 而后者 $A=A_c$. 同样图 10.6 的有规与混沌，区别也是 $R<R_c$ 与 $R>R_c$. 到此，一个问题提出来了，即由有规向混沌过渡，究竟遵循哪些规律，或是说通过什么样的途径达到混沌的. 研究得较多的途径有，倍周期分岔趋向混沌、阵发混沌，还有奇异吸引子及准周期过渡到混沌等. 这一节将通过一维二次映象对倍周期分岔作较为详细的阐述.

参照 (10.2.18) 式，一维二次迭代映象的表式为

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \tag{10.2.28}$$

图 10.23(a) 给出以 r 为参量按 (10.2.28) 式多次迭代 $(n>300)$ 的结果. 当 $r<1$ 时，多次迭代后收敛于一点，这个点称为迭代方程的不动点. 迭代方程的一般形式为

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{10.2.29}$$

若 x 经过迭代后仍不变，即

$$x = f(x) \tag{10.2.30}$$

则 x 称为迭代方程的不动点. 在不动点 x 的邻近点 $x' = x + \epsilon$, 经迭代后为

$$f(x') = f(x+\epsilon) \simeq f(x) + \epsilon f'(x) \tag{10.2.31}$$

则

$$|f(x') - f(x)| = |\epsilon||f'(x)| = |f'(x)||x' - x| \tag{10.2.32}$$

当满足 $|f'(x)| < 1$ 时, x 为稳定的不动点, 相距为 $|\epsilon|$ 的两近邻点 x' 与 x, 经迭代后距离更近了 (见式 (10.2.32)). 同样当 $|f'(x)| > 1$ 时, x 为不稳定的不动点, 两个近邻点 x' 与 x 经迭代后距离更远了. $|f'(x)| = 1$ 为临界的不动点. 将不稳定条件 (10.2.32) 式应用于迭代方程 (10.2.28), 得出迭代方程的不动点 $x = 0$, $x = 1 - 1/r$, 又因 $f'(x) = r(1-2x)$, 故 $r < 1$ 时, 不动点 $x = 0$ 为稳定的. 当 $1 < r < 3$ 时, $\left|f'(x)|_{x=1-1/r}\right| = |2 - r| < 1$, 不动点 $x = 1 - 1/r$ 也是稳定的. 归结起来, 当 $r < 1$ 时, 经 (10.2.28) 式多次迭代, x_{n+1} 收敛于不动点 $x = 0$; 当 $1 < r < 3$ 时, 多次迭代后收敛于不动点 $x = 1 - 1/r$. 当 r 超过 3, 情况又会怎样呢? 例如, 取 $r = 3.04$, 经过多次迭代后, 我们发现数列 (x_n) 并不趋近于某一不动点, 而是在两个点间振荡着: $\{0.7306, 0.5984, 0.7306, 0.5984, \cdots\}$, 这就是通常说的倍周期点. 它是多次迭代后的结果, 与初值 x_0 无关. 而前面所说的不动点也可理解为一周期点. 参照不动点定义 (10.2.30) 式, 并设 $x_1 = 0.7306$, $x_2 = 0.5984$, 则有

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_2)) = f^2(x_2) \tag{10.2.33}$$

$$x_1 = f(x_2) = f(f(x_1)) = f^2(x_1) \tag{10.2.34}$$

$$f^2(x) = r[rx(1-x)][1 - rx(1-x)] \tag{10.2.35}$$

(10.2.34) 式形式上与 (10.2.30) 式很相似, 区别只在于它是倍周期即 $f^2(x)$ 的不动点, 而不是一周期即 $f(x)$ 的不动点. $f(x)$ 的一个不动点分岔为两个 $f^2(x)$ 的不动点 x_1, x_2, 这就是倍周期分岔. 当 r 继续增大至 $r > r_2 = 1 + \sqrt{6}$ 时, 类似的分岔又发生了, 即 2^2 分岔. 不动点由 2 个增至 $2^2 = 4$ 个, 不动点函数为

$$x = f^2(f^2(x)) = f^4(x) \tag{10.2.36}$$

通过数值迭代与理论分析, Feigenbaum 已得出如下的普适结果 [12–13]

$$\delta = \lim_{n\to\infty}[(r_n - r_{n-1})/(r_{n+1} - r_n)] = 4.6692016091\cdots \tag{10.2.37}$$

数列 (r_n) 较快地收敛于:

$$r_\infty = 3.5699456\cdots \tag{10.2.38}$$

相应的 Liapunov 指数由图 10.23(a) 下面的图示出, 当 $r < r_\infty$ 除分岔点 r_n 处, $\lambda = 0$ 外, 均为 $\lambda < 0$, 迭代解为规则的; 但当 $r > r_\infty$ 后, 较大部分已进入 $\lambda > 0$ 的混沌区. 在 $r < r_\infty$ 的倍周期分岔区还有图 10.8 所示的最靠近 $x = 1/2$ 的倍周期距离 d_n 满足普适关系:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{d_{n-1}} = -\alpha = -2.5028078750\cdots \tag{10.2.39}$$

参见图 10.8, $d_1 = f(R_1, 1/2) - 1/2$, $d_2 = f^2(R_2, 1/2) - 1/2$, 一般的为

$$d_n = f^{2^{n-1}}(R_n, 1/2) - 1/2 \tag{10.2.40}$$

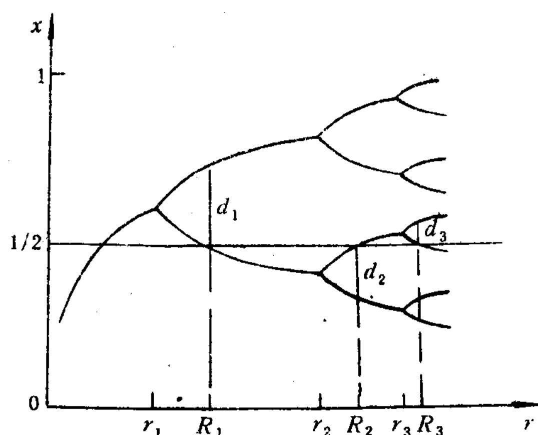


图 10.8 最靠近 $x = 1/2$ 的不动点的距离 d_n
(参照 Feigenbaum[15])

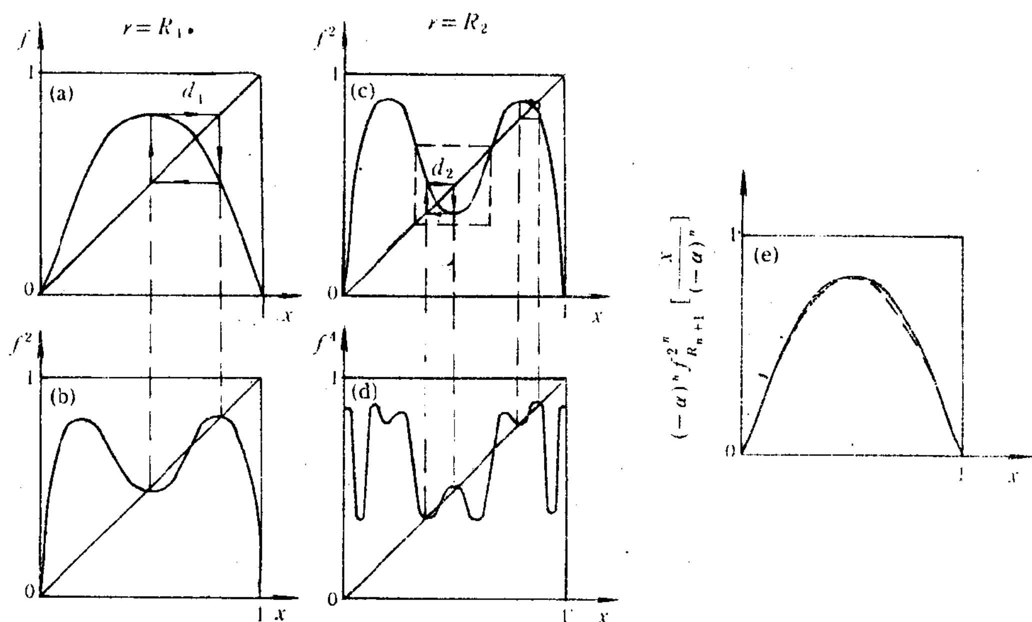


图 10.9 (a),(b) 为 $r = R_1$, f, f^2 的迭代图；
(c),(d) 为 $r = R_2$, f^2, f^4 的迭代图；
(e) 为 (a),(c) 中方框经放大反演后的叠置
(参照 Feigenbaum [15])

选择参数 $r = R_n$ 时，使 $1/2 = f^{2^n}(R_n, 1/2)$, 由图 10.8 也能看出这一点．为什么要选择 $x = 1/2$, 而通过 (10.2.40) 定义的 d_n 又能满足普适关系 (10.2.39) 呢？由 10.9 看出，$x = 1/2$ 恰是 (a),(d) 的极大点和 (b),(c) 的极小点．参照 (10.2.25) 式，以 $n = 1$ 为例，x_1, x_2 为两个不动点，即

$$f^{2'}(R_1, x_1) = f^{2'}(R_1, x_2) = f'(R_1, x_1)f'(R_1, x_2) = 0 \tag{10.2.41}$$

这是因为两个不动点 x_1, x_2 中有一个为 $1/2$,f' 取极值．同样可证 $f^{2^n}(R_n, x)$ 在它的 2^n 个不动点 x_j 处的导数也为 0. 非常有意义的是，在图 (a),(c) 方框内的迭代曲线很相似，经过放大与中心反演后几乎可以重叠在一起．这就是图 (e) 所显示的两条曲线的叠置情

况，其中实线取自图 (a), 虚线取自图 (c). 如将坐标平移一下，使得 $x=1/2$ 移至 $x=0$, 则 (a),(c) 方框中两条曲线的自相似又可表示为

$$f(R_1,x)\simeq-\alpha f^2(R_2,-x/\alpha)=-\alpha f(R_2,f(R_2,-x/\alpha)) \tag{10.2.42}$$

式中，α 为放大比，$\simeq|d_1/d_2|$, 负号"$-$"表示中心反演. 在坐标平移前的 $f(x)=rx(1-x)$, 在坐标平移后的 $f(x)=r(\frac{1}{2}-x)(\frac{1}{2}+x)=r(\frac{1}{4}-x^2)$. 图 10.8,10.9 是按坐标平移前的函数计算的. 而 (10.2.42) 式则是按坐标平移后的函数计算的. 很明显由 (10.2.42) 式表现的图形的自相似特点并不限于二次函数 $f(x)=rx(1-x)$ 映象，只要求 $f(x)$ 有极值 x_m, 而且在极值 x_m 附近有凸函数特点 $f'(x_m)=0$, $f''(x_m)\neq 0$. 坐标平移即 $x-x_m\to x$ 平移变换，类似于上面的 $x-\dfrac{1}{2}\to x$ 变换. 中心反演与上面 (10.2.42) 式同. 由 (10.2.42) 式表示的变换，一般称之为倍周期变换，并用 T 算子来表示. (10.2.42) 式右端可写为

$$Tf(R_1,x)=-\alpha f^2(R_2,-x/\alpha) \tag{10.2.43}$$

$$T^2f(R_1,x)=(-\alpha)^2f^4(R_3,x/(-\alpha)^2) \tag{10.2.44}$$

其极限函数为

$$g_1(x)=\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^nf^{2^n}(R_{n+1},x/(-\alpha)^n) \tag{10.2.45}$$

它对于所有具有二次极值的函数是普适的. Feigenbaum 又定义包括 $g_1(x)$ 在内的函数类

$$g_r(x)=\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^nf^{2^n}(R_{n+r},x/(-\alpha)^n) \tag{10.2.46}$$

易证 $g_r(x)$ 满足

$$g_{r-1}(x)=(-\alpha)g_r[g_r(-x/\alpha)]=Tg_r(x) \tag{10.2.47}$$

这是因为 (10.2.46) 式可简写为

$$g_r(x)=\lim_{n\to\infty}(-\alpha)^nf^{2^n}_{R_{n+r}}(x/(-\alpha)^n) \tag{10.2.48}$$

$$\begin{aligned}
g_{r-1}(x) &= \lim_{n\to\infty}(-\alpha)^nf^{2^n}_{R_{n+r-1}}\left(\frac{x}{(-\alpha)^n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}(-\alpha)(-\alpha)^{n-1}f^{2^{n-1+1}}_{R_{n-1+r}}\left(-\frac{1}{\alpha}\frac{x}{(-\alpha)^{n-1}}\right)\\
&= \lim_{m\to\infty}(-\alpha)(-\alpha)^mf^{2^m}_{R_{m+r}}\left\{\frac{1}{(-\alpha)^m}(-\alpha)^mf^{2^m}_{R_{m+r}}\left[-\frac{1}{\alpha}\frac{x}{(-\alpha)^m}\right]\right\}\\
&= -\alpha g_r[g_r(-x/\alpha)]
\end{aligned} \tag{10.2.49}$$

这就证明了 (10.2.47) 式. 现将 (10.2.47) 式对 $r\to\infty$ 求极限，又设极限存在

$$g(x)=\lim_{r\to\infty}g_r(x) \tag{10.2.50}$$

于是由 (10.2.47) 式得

$$g(x)=Tg(x)=-\alpha g[g(-x/\alpha)] \tag{10.2.51}$$

(10.2.51) 式表明 $g(x)$ 即倍周期算子 T 的不动点.

由 (10.2.51) 式看出，若 $g(x)$ 是该式的解，则 $\mu g(x/\mu)$ 也是该式的解. 故可选择 μ 使得解满足边界条件 $g(0)=1$. 在 (10.2.51) 式中令 $x=0$, 并应用边界条件 $g(0)=1$, 便得普适常数 α 为

$$\alpha = -1/g(1) \tag{10.2.52}$$

因 $x=0$ 是 $f^{2^n}(R_n,x)$ 的极值点，故有 $f^{2^n\prime}(R_n,0)=0$, 亦即 $g'(0)=0$. 满足 (10.2.51) 式的解可写为

$$g(x) = 1 + Ax^z + Bx^{2z} + Cx^{3z} + \cdots \tag{10.2.53}$$

取不同的 z 值，便有不同的解. $z=2$, 其解称为二次型极大的正常解. Feigenbaum 用数值计算办法给出的正常解为

$$\begin{aligned} g(x) &= 1 - 1.52763x^2 + 0.104815x^4 + 0.0267057x^6 - \cdots \\ \alpha &= -1/g(1) = 2.502807876 \end{aligned} \tag{10.2.54}$$

这里求得的 α 即 (10.2.39) 式给出的 α.

若取 $g(x)$ 的二次近似式

$$g(x) \simeq 1 + bx^2 \tag{10.2.55}$$

代入 (10.2.51) 式并略去高于或等于 x^4 的项，便有

$$1 + bx^2 \simeq -\alpha(1+b) - \left(\frac{2b^2}{\alpha}\right)x^2 \tag{10.2.56}$$

可解出

$$b = (-2-\sqrt{12})/4 \simeq -1.366, \qquad \alpha = -2b = 2.73 \tag{10.2.57}$$

与准确解 (10.2.54) 比较，误差在 10%.

10.2.3 二分岔理论的抛物线近似 [16]

Feigenbaum 引进的函数 $g_r(x)$ 及其极限 $g(x)$ 虽能给出常数 α 的计算，但还有常数 r_∞ 与 δ. 考虑到二分岔向混沌过渡是很重要的向混沌过渡道路，若能对其解析性质及普适性有进一步的了解，对应用混沌理论于具体物理问题将是有益的. 这小节我们将提出二分岔理论的抛物线近似，可以清楚地看出由不稳导致分岔，分岔能够致稳，分岔的极限便是混沌等一些特点，而且提供了一个精确度很高计算 r_∞ 的办法.

为讨论方便起见，我们将 (10.2.28) 式作变换 $x_n \to \dfrac{x_n}{r} + \dfrac{1}{2}$, 于是有

$$x_{n+1} = \frac{r^2}{4} - \frac{r}{2} - x_n^2 = p - x_n^2 \tag{10.2.58}$$

得

$$\delta x_n = -2x_{n-1}\delta x_{n-1} = (-2x_{n-1})\cdots(-2x_0)\delta x_0 \tag{10.2.59}$$

当 $|\dfrac{\delta x_n}{\delta x_0}| = 2^n|x_{n-1}\cdots x_0| > 1$, 迭代是不稳定的，当 $|\dfrac{\delta x_n}{\delta x_0}| = 2^n|x_{n-1}\cdots x_0| < 1$ 时是稳定的. 根据这点可解出各次分岔点如下：

$$x_0 = p - x_0^2 \tag{10.2.60}$$

$$x_0^{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4p}}{2} \tag{10.2.61}$$

当 $-0.25 < p < 0.75$, $|2x_0^-| = |-1-\sqrt{1+4p}| > 1$ 是不稳定的，$|2x_0^+| = |-1+\sqrt{1+4p}| < 1$ 是稳定的．但当 $p > 0.75$ 时，$|2x_0^+| > 1$ 也是不稳定的．于是可考虑在 $p > 0.75$ 的二次迭代方程

$$x_1 = p - x_0^2 = p - (p - x_1^2)^2 \tag{10.2.62}$$

即

$$(x_1^2 + x_1 - p)(x_1^2 - x_1 - p + 1) = 0$$

由 $x_1^2 - x_1 - p + 1 = 0$ 给出

$$x_1^{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{4p-3}}{2}, \qquad |2x_1^+ 2x_1^-| = 4|1-p| \leq 1 \tag{10.2.63}$$

当 $0.75 \leq p \leq 1.25$ 是稳定的，但当 $p > 1.25$ 时又是不稳定的了，又要进一步分岔．若称 $p = -0.25$ 是零次分岔，则 $p = 0.75$, 1.25 分别是迭代的第 1 、第 2 次分岔点，如图 10.13 所示．在第 1 次分岔点 $p = 0.75$, 由 $2x_0^+ = 1$ 过渡到 $2x_1^{\pm} = 2x_0^+ \pm \varepsilon$, $|(2x_0^+ + \varepsilon)(2x_0^+ - \varepsilon)| = |1 - \varepsilon^2| < 1$ 系统变为稳定的．但当 p 继续增大，以至 $p \geq 1.25$, $2x_1^+ 2x_1^- = 4(1-p) \leq -1$ 系统又变为不稳定的，又需要进一步分岔，亦即第 2 次分岔使系统变为稳定的．这时 x 与 p 的关系较为复杂 (见图 10.10), 但可用抛物线来近似．在 $0.75 < p < 1.25$ 间为准确抛物线，$x_1^{\pm} = 0.5 \pm \sqrt{p - 0.75}$; 当 $p = 1.25$, $x_1^+ = 0.5 + \sqrt{0.5} = x_a$, $x_1^- = 0.5 - \sqrt{0.5} = x_b$; 当 $p > 1.25$ 时，可用下式近似：

$$\begin{aligned} &x_a + a\sqrt{\Delta p} + A\Delta p, \qquad x_a - a\sqrt{\Delta p} + A\Delta p \\ &x_b + b\sqrt{\Delta p} + B\Delta p, \qquad x_b - b\sqrt{\Delta p} + B\Delta p \end{aligned} \tag{10.2.64}$$

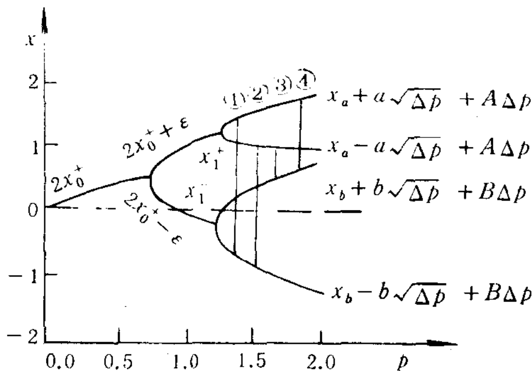


图 10.10 第二次分岔后的抛物线近似
(参照谭维翰、刘仁红 [16])

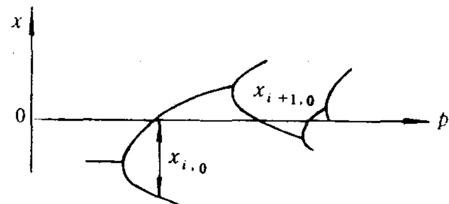


图 10.11 在 $x = 1/2$ 附近的分岔点 Δp_i
(参照 [16])

将 (10.2.64) 式代入 (10.2.58) 式，并参照图 10.10 所示的迭代 (1), 便得

$$\begin{aligned} x_b - b\sqrt{\Delta p} + B\Delta p &= p_0 + \Delta p - (x_a + a\sqrt{\Delta p} + A\Delta p)^2 \\ &\simeq p_0 + \Delta p - x_a^2 - a^2\Delta p - 2x_a a\sqrt{\Delta p} - 2x_a A\Delta p \end{aligned}$$

即

$$-b = -2x_a a, \qquad 2x_a A + B = 1 - a^2 \tag{10.2.65}$$

同样由迭代 (2) 得

$$-a = 2x_b b, \qquad 2x_b B + A = 1 - b^2 \tag{10.2.66}$$

又设这两个抛物线中，有一个为准确抛物线 [13], 例如 $B = 0$, 则由 (10.2.65),(10.2.66) 式，并注意到 $2x_a 2x_b = -1$, 可得

$$
\begin{aligned}
b &= \frac{2x_a}{\sqrt{1-2x_a+(2x_a)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x_b+(2x_b)^2}} \\
a &= \frac{1}{\sqrt{1-2x_a+(2x_a)^2}}
\end{aligned} \tag{10.2.67}
$$

重要的是解 (10.2.67) 推广到 n 次二分岔情形，例如第 3 次二分岔，类似于方程 (10.2.65),(10.2.66) 可写为

$$
\begin{aligned}
&2x_aA+B=1-a^2, \qquad (2x_a)(2x_b)(2x_c)(2x_d)=-1 \\
&2x_bB+C=1-b^2 \\
&2x_cC+D=1-c^2 \\
&2x_dD+A=1-d^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix} 1-a^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1-b^2 & 2x_b & 1 & 0 \\ 1-c^2 & 0 & 2x_c & 1 \\ 1-d^2 & 0 & 0 & 2x_d \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2x_a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_c & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_d \end{vmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{4x_a}[1-a^2+2x_a(1-d^2)] - x_d[1-c^2-2x_c(1-b^2)] \\
&= \frac{1}{4x_a}[1-a^2+2x_a(1-(2x_aa)^2)] - x_d[1-c^2-2x_c(1-(2x_cc)^2)] \\
&= \frac{1}{4x_a}F(a,x_a) - x_dF(c,x_c)
\end{aligned} \tag{10.2.68}
$$

同样可解得 B, C, D 等. 按文献 [13] 的分析，在 a, b, c, d 中有一为准确抛物线 (在 $\Delta p=0$ 附近). 设 a 为准确抛物线，于是有 $A=0$, 且 $|x_a| \ll |x_d|$, 则 (10.2.68) 式的主要贡献来自第一项. $A=0$ 相当于要求

$$
\begin{aligned}
1-a^2+2x_a(1-(2x_aa)^2) &\simeq 0 \\
a &= \frac{1}{\sqrt{1-2x_a+(2x_a)^2}}
\end{aligned} \tag{10.2.69}
$$

根据 (10.2.69) 式，可计算 Feigenbaum 数 r_∞.

将上面抛物线近似解写成更一般形式，便是

$$
\begin{aligned}
x_i &= x_{i0} \pm a_i\sqrt{\Delta p} + A_i\Delta p \\
&= x_{i0}\left(1 \pm a_i\frac{\sqrt{\Delta p}}{x_{i0}} + \frac{A_i}{x_{i0}}\Delta p\right)
\end{aligned} \tag{10.2.70}
$$

故有

$$
\begin{aligned}
\prod_{i,\pm}^{j} 2x_i &= \prod_{i,\pm}^{j} 2x_{i0}\left(1 \pm \frac{a_i\sqrt{\Delta p}}{x_{i0}} + \frac{A_i}{x_{i0}}\Delta p\right) \\
&= \prod_{i,\pm}^{j}\left(\left(1+\frac{A_i}{x_{i0}}\Delta p\right)^2 - \frac{a_i^2}{x_{i0}^2}\Delta p\right) \\
&\simeq \prod_{i=0}^{j}\left(1+\left(\frac{2A_i}{x_i}-\frac{a_i^2}{x_{i0}^2}\right)\Delta p\right) \simeq 1+\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{2A_i}{x_{i0}}-\frac{a_i^2}{x_{i0}^2}\right)\Delta p
\end{aligned} \tag{10.2.71}
$$

$1+\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{2A_i}{x_{i0}}-\frac{a_i^2}{x_{i0}^2}\right)\Delta p\simeq -1$ 便是发生下一次分岔的不稳点，于是有

$$\Delta p_j=\frac{-2}{\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{2A_i}{x_{i0}}-\frac{a_i^2}{x_{i0}^2}\right)} \tag{10.2.72}$$

对 (10.2.72) 式作出贡献的是那些 x_{i0} 为最小的项，特别是 $A_i=0$ 的纯抛物线项. 故有

$$\Delta p_j\simeq\frac{2x_{j0}^2}{a_j^2}=\frac{(2x_{j0})^2}{2}[1-2x_{j0}+(2x_{j0})^2] \tag{10.2.73}$$

(10.2.73) 式可用来计算 Feigenbaum 数 r_∞. 因为根据这公式可以将分岔点一点点地计算出来 (见图 10.11), 即

$$\begin{aligned}&x_{j+1,0}=x_{j,0}-\operatorname{sgn}(x_{j,0})a_j\sqrt{\Delta p_j}\simeq x_{j,0}-\operatorname{sgn}(x_{j,0})\sqrt{2}x_{j,0}\\&\left|\frac{x_{j+1,0}}{x_{j,0}}\right|=\sqrt{2}-1=\frac{1}{1+\sqrt{2}}\end{aligned} \tag{10.2.74}$$

由 (10.2.73),(10.2.74) 式得

$$\begin{aligned}p_\infty&=p_0+\sum_j\Delta p_j=p_0+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(2x_{j,0})^2}{2}(1-2x_{j,0}+(2x_{j,0})^2)\\&=p_0+\frac{1}{2}\left[\frac{(2x_{0,0})^2}{2(\sqrt{2}-1)}-\frac{(2x_{0,0})^3}{5\sqrt{2}-6}+\frac{(2x_{0,0})^4}{12\sqrt{2}-16}\right]\end{aligned} \tag{10.2.75}$$

取 $p_0=0.75$, 则 $2x_{0,0}=1$, 代入 (10.2.75) 式得

$$p_\infty=0.75+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(\sqrt{2}-1)}-\frac{1}{5\sqrt{2}-6}+\frac{1}{12\sqrt{2}-16}\right]=1.4019 \tag{10.2.76}$$

若取 $p_0=1.25$, 则 $2x_{0,0}=1-\sqrt{2}$, 得

$$p_\infty=1.25+\frac{1}{2}\left[\frac{3-2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}+\frac{5\sqrt{2}-7}{5\sqrt{2}-6}+\frac{17-12\sqrt{2}}{12\sqrt{2}-16}\right]=1.40185 \tag{10.2.77}$$

而 p_∞ 的准确值为 $p_\infty^e=\frac{r_\infty^2}{4}-\frac{r_\infty}{2}=\frac{3.5699456^2}{4}-\frac{3.5699456}{2}=1.401155$. 两个近似值 1.4019, 1.40185 与准确值 1.401155 相比是非常相接近的，误差只在 5/10000.

由图 10.11 还能看出

$$d_j=x_j^+-x_j^-,\qquad x_j^\pm=x_{j,0}\pm a_j\sqrt{\Delta p_j} \tag{10.2.78}$$

Δp_j 由 $x_j^+=0$ 确定，故有

$$d_j=2a_j\sqrt{\Delta p_j}=-2x_{j,0} \tag{10.2.79}$$

$$\alpha=-\frac{d_j}{d_{j+1}}=-\frac{x_{j,0}}{x_{j+1,0}}=1+\sqrt{2}=2.414 \tag{10.2.80}$$

与 α 的准确值 2.5029078750 相比，误差为 3.6%.

参照 δ 的定义 (10.2.37) 式及 Δp_j 的定义 (10.2.73) 式便得

$$\delta = \lim_{j\to\infty} \frac{\Delta p_j}{\Delta p_{j+1}} \simeq \left(\frac{x_{j,0}}{x_{j+1,0}}\right)^2 = (1+\sqrt{2})^2 = 5.827 \tag{10.2.81}$$

这与 δ 的数值计算得出的准确值 4.6692 相比，误差已达 20%, 精度较差.

十分有意义是，将 (10.2.70) 式写成

$$\Delta x_i = x_i - x_{i0} = A_i \Delta p \pm a_i \sqrt{\Delta p}$$

这已经就是描述 Brownian 运动的 Ito 随机微分方程了. A_i 是驱动矢量，而 $B_{ij} = < a_i a_j >$ 是扩散矩阵，参见 (10.2.65),(10.2.70) 式.

还应注意到图 10.23(a),$r_\infty < r < 4$ 的“混沌区”，并非真正的一片混沌，而是有许多周期分岔窗，其中有一个大的周期窗，还有许多小的周期窗. 结构是极为复杂的.

10.2.4 阵发混沌

在讨论阵发混沌以前，需先研究一下分岔类型. 前面讨论的倍周期分岔，又称叉型分岔，如图 10.12 (a) 所示. 当参量 r 连续增大时，在分岔点的左邻一个稳定的不动点失稳，在分岔点右邻产生两个稳定的倍周期点，即图中实线所示. 而虚线则表示不稳定的不动点轨迹. 除了这种分岔外，还有图 (b) 所示的切分岔. 在 x 的右侧有两个不动点，其中一个是稳定的 (实线); 另一个是不稳定的 (虚线). 图 (c) 为 Hopf 分岔，是从一个稳定的不动点过渡到极限环.

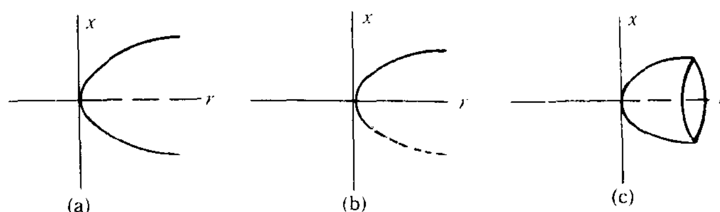


图 10.12 (a) 叉型分岔； (b) 切分岔； (c) Hopf 分岔

阵发混沌是通向混沌的重要道路之一，由 Pomeau,Manneville 先后提出 [17, 18]. 他们用数值方法求解了 Lorenz 方程 (10.2.10). 并研究其中 Y 分量随时间 t 的变化，结果如图 10.13 所示. 当 $r < r_c$, $Y(t)$ 是随时间 t 的周期振荡；当 $r > r_c$ 时，周期振荡被一些偶发的混沌脉冲所中断；当 r 继续增大，这种偶发混沌脉冲愈来愈频繁，以致覆盖了整个周期振荡区. 为解释这种现象，可用解的轨迹 $(X(t), Y(t), Z(t))$ 穿过平面 $X=0$ 的 $Y(t)$ 的值 Y_n, Y_{n+1} 作 Poincare 图 10.14.n 表示穿过的次数， $r_c = 166$, r 稍超过 r_c, 属 I 型切分岔. 为对 Poincare 图 10.14, 作出解释，可参看图 10.15. 当 $r < r_c$(见图 10.15 (a)), 有一个稳定的不动点，对应于 (10.2.10) 第一方程的稳态解；另一不动点是不稳定的. 当 $r > r_c$, 如图 (c), 没有稳定的不动点，迭代后 Y_n 的变化剧烈，不趋向于定值. 但当轨迹接近于原来的不动点时， Y_n 的变化明显减慢. 当 r 愈接近于 r_c, 形成的通道愈狭窄，轨迹进入通道，并由通道逃逸出去，就需要更多次迭代. 当 $r = r_c$ 相切，有一个不动点如图 (b), 这可看成图 (a) 两个不动点的重合. 这两个不动点的下侧是稳定的，而上侧是不稳定的. 与图 10.12 (b) 的切分岔比较，我们称图 10.15 (b) 的分岔为逆切分岔. 按逆切分岔趋向混沌为 I 型阵发混沌. 图 10.14 与图 10.15 (c) 表明， Lorenz 方程 Poincare 映象就是按 I 型阵发方式趋向混沌的. 除了 I 型阵发混沌外，还有 II,III 型阵发混沌. I 型阵发混沌的映

象，当参量由 $\varepsilon < 0$ 增至 $\varepsilon > 0$ 时，本征值在 $x = 1$ 处穿过单位圆而获得不稳. II 型阵发混沌通过单位圆有两个共轭不稳根. III 型阵发混沌在 $x = -1$ 穿过单位圆获得不稳.

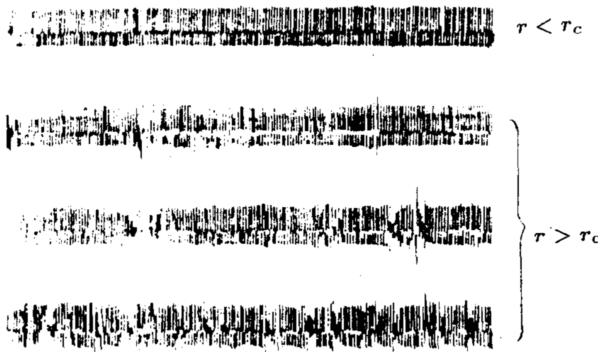


图 10.13 Lorenz 方程 $y(t)$ 随时间变化
(参照 Pomean and Manneville [18])

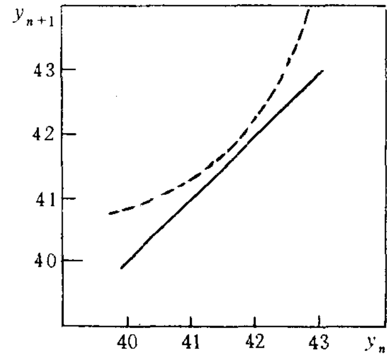


图 10.14 $y(t)$ 的 Poincare 映象
(参照 [18])

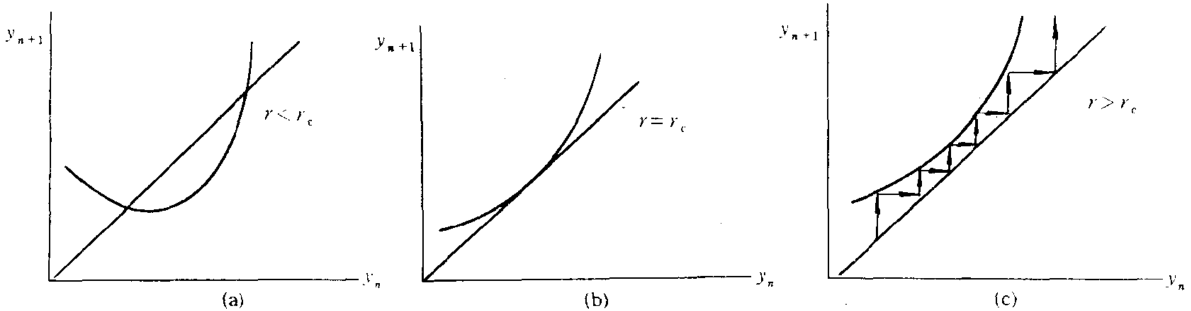


图 10.15 阵发混沌逆切线分岔

10.2.5 二维映象与奇异吸引子

至此，我们主要讨论了一维迭代映象. 将这一讨论推广到二维， Henon 二维迭代映象便是很有代表意义的例子 [20, 21].Henon 二维迭代映象方程为

$$x_{n+1} = y_n - Ax_n^2, \qquad y_{n+1} = bx_n \tag{10.2.82}$$

与一维二次迭代相似， Henon 二维迭代映象在到达混沌以前，也经历了一个倍周期即 2^n 分岔的过程. 当 (10.2.82) 式中的 b 取为 0.3, 则发生倍周期分岔处的 $A = A_n$ 见表 10.1. 有意义的是，由这些 A_n 算出的 δ_n, 也同样以 Feigenbaum 数 $\delta = 4.6692\cdots$ 为极值. 这再一次表明 δ 的普适性.

由初值 (x_0, y_0) 出发，按方程 (10.2.82) 进行迭代，可得出数列 (x_n, y_n), (x_n, y_n) 或趋向无限大，或收敛于一个集合. 若为后者，则集合称为吸引子. 而那些收敛于吸引子的初值 (x_0, y_0) 集合称之为吸引子盆.

在一维迭代映象中，那些 n- 循环的不动点 $x_i = f_{r_n}^n(x_i)$, 均可看成吸引子. 至于多维迭代映象的描述，则还需增加新的概念，奇异吸引子便是其中之一. 现考虑 N 维相空间的自洽动力学微分方程所描述的质点的运动

$$\dot{y}_j = F_j(y_1, y_2, \cdots y_N), \qquad j = 1, 2, \cdots, N \tag{10.2.83}$$

又设想在 N 维相空间中取一封闭的曲面 S. 于是由 S 所包含的体积 V 随时间的演化为

$$\frac{dV}{dt}=\int_s ds\vec{v}\cdot\vec{n}=\int_V d^N y\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_j}{\partial y_j} \tag{10.2.84}$$

式中，$\vec{v}$ 为质点运动的速度矢量，$\vec{n}$ 为垂直于面元 ds 的法向单位矢量．若 $\frac{dV}{dt}<0$，当 $t\to\infty$, $V\to 0$, 这样的系统称为耗散系统．这是指由动力学方程 (10.2.83) 式的连续映象而言的．如果是分立的映象，则相应的 Jacobian 矩阵行列式为 <1, 也就是耗散系统了．

表 10.1

2^n 周期	A_n	$\delta_n=\frac{A_n-A_{n-1}}{A_{n+1}-A_n}$
2	0.3675	
4	0.9125	4.844
8	1.026	4.3269
16	1.051	4.696
32	1.056536	4.636
64	1.05773083	4.7748
128	1.0579808931	4.6696
256	1.05803445215	4.6691

将 (10.2.84) 应用于 Lorenz 方程 (10.2.10), 便得

$$\frac{dV}{dt}=-(\sigma+1+b)V<0,\qquad \sigma>0,\ b>0 \tag{10.2.85}$$

故随时间的增长，体积 V 将随 t 指数地收缩，即

$$V(t)=V(0)e^{-(1+\sigma+b)t} \tag{10.2.86}$$

对分立的迭代映象 (10.2.82), 当 $|b|<1$ 时，也是体积收缩的耗散体系，这是因为其 Jacobian 矩阵的绝对值为

$$\left|\det\begin{pmatrix}-2Ax_n & 1\\ b & 0\end{pmatrix}\right|=|b| \tag{10.2.87}$$

从这两个耗散系统的例子来看，若初值 (x_0,y_0) 形成的集合，亦即吸引子盆充满了体积 V, 则经过无限长时间的演化后的集合，即吸引子的体积将趋近于 0, 因为吸引盆的极限为吸引子．但吸引子究竟是什么呢？ Lanford[22] 曾对吸引子给出定义，相空间的一个子集 X 若满足如下条件时，则称之为吸引子：(1) 在分立映象 (例如 (10.2.82) 式) 或连续映象 (例如 (10.2.83) 式) 情况下，亦即经过“流”后，吸引子 X 是不变的；(2)X 有一邻域，经过“流”后，这邻域将收缩到 X; (3)X 的每一部分均不是瞬变的；(4)X 不可能分割为互不交叠的部分．像上面我们已经提到的那样，我们可以定义 X 的吸引盆为相空间那些当 $t\to\infty$ 时趋近于 X 的集合．一个吸引子可以是一个不动点，也可以是一个极限环或 N 维环面．但也可以是一个混沌吸引子也称为奇异吸引子，它具有灵敏地依赖于初始条件的特点 (至少有一个 Liapunov 指数为正); 换句话说耗散系统的相体积收缩也并不意味着所有的长度均收缩．现以 Baker 变换的两维映象为例来分析这个问题．看如下变换：

$$x_{n+1}=2x_n \bmod 1 \tag{10.2.88}$$

$$y_{n+1}=\begin{cases}ay_n, & 当\quad 0\le x_n\le 1/2\\ ay_n+1/2, & 当\quad 1/2\le x_n\le 1\end{cases} \tag{10.2.89}$$

由 x_n 至 x_{n+1} 的变换表明先将 x_n 拉长一倍，若 $2x_n>1$, 则取整仍放在单位方框内．而 y 的变换，若 $x<1/2$, 就是收缩，若 $x>1/2$ 则除了收缩外，还要加上 1/2 的平移．总的

来说这个变换的相体积是愈来愈减少. 但 x 部分的映象又表现为原来靠得很近的两个 x 点，随着映象次数的增加，两点间沿 x 方向的距离愈来愈分离. 亦即沿 x 方向的距离很灵敏地依赖于初值. 但沿 y 方向的距离则明显地被压缩了. 应着重指出，沿 x 方向先拉长一倍，再截成两半，又叠在一起，这就是形成混沌吸引子的过程. 这一过程的最大特点是"结构中有结构". Baker 变换的混沌吸引子乃是一些水平线段的无穷集合，其吸引盆则是整个单位方块. Baker 变换沿 x 方向的 Liapunov 指数 $\lambda_x = \log 2$, 沿 y 方向的 Liapunov 指数 $\lambda_y = \log a$. 当 $\alpha = 0.4$, 总的 Liapunov 指数 $\lambda = \log 2 + \log a = \log 2a = \log 0.8 < 0$, 体积是收缩了. 当 $t \to \infty$ 时，体积将收缩到 0. 但也不能因此说混沌吸引子 (通常称为奇异吸引子), 就是一个线或一个点. 恰恰相反，奇异吸引子具有非整数维数，必须采用 Hausdorff 推广的维数概念，即分维数 Fractal dimension 来描述 [23]. 分数维数可以这样定义，设线段增加 l 倍，具有 D 维数物体大小增加 $K = l^D$ 倍，于是 $D = \log K/\log l$. 将这些定义应用于 Baker 变换，便有

$$D_B = D_x + D_y = \frac{\log 2}{\log 2} + \frac{\log \frac{1}{2}}{\log a} = 1 + \left|\frac{\log 2}{\log a}\right| = 1.75647, \quad 当 \quad a = 0.4$$

除此而外分数维数还有另一种等价的定义. 现考虑一单位立方体，它包含了 $N(\epsilon) = \epsilon^{-3}$ 个边长为 ϵ 的小立方体；一单位正方块，它包含 $N(\epsilon) = \epsilon^{-2}$ 个边长为 ϵ 的小正方块；一单位长的线段，包含了 $N(\epsilon) = \epsilon^{-1}$ 长度为 ϵ 的小线段. 对上述每一种情形，均可按下式定义维数：

$$D_c = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} \tag{10.2.90}$$

分别为整数 3, 2, 1. 现将此定义应用于求 Cantor 集的维数. 参见图 10.16, 将线段 [0, 1] 分为三段，去掉中间一段 (开集). 对剩下的两段，又分为三段，又去掉中间一段 (开集). 如此继续下去，便得 Cantor 集. 应用上面方法，先取 $\epsilon = 1$, 只需一个线段就能将 Cantor 集覆盖掉. 又取 $\epsilon = 1/3$, 则需两个线段才能将 Cantor 集覆盖，故有 $N(\epsilon) = 2$, 同样取 $\epsilon = (\frac{1}{3})^2$, $N(\epsilon) = 2^2$; $\epsilon = (\frac{1}{3})^n$, $N(\epsilon) = 2^n$. 于是按 (10.2.90) 式，得 Cantor 集的维数

$$D_c = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n} = 0.6309 \tag{10.2.91}$$

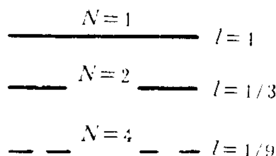


图 10.16 Cantor 集

现在我们回到由 (10.2.82) 式所表示的 Henon 映象. 图 10.17 (a) 为 $b = 0.3$, $A = 1.4$, 10^4 次迭代后的结果，图中已标出迭代次数 20 ~ 25 的点；图 (b) 即图 (a) 中方块放大后的结果；图 (c) 又是图 (b) 中方块放大后的结果. 由 (a)~(c) 中方块内的结构的自相似性，就明显看出前面已提到的"结构中有结构"，而且是自相似的. 又可用上面的方法求得 Henon 映象的维数 $D_c = 1.26$. 具体来说，将图 10.17 (a) 的 10^4 个迭代点用边长为 l 的正方块去覆盖，并数出需要多少个方块将这些点覆盖掉. 设这数为 $N(l)$, 于是再减小 l, 求

出相应的方块数 $N(l)$, 并求极限，便得维数 $D_c = \lim_{l\to 0} \frac{\log N(l)}{\log 1/l}$.

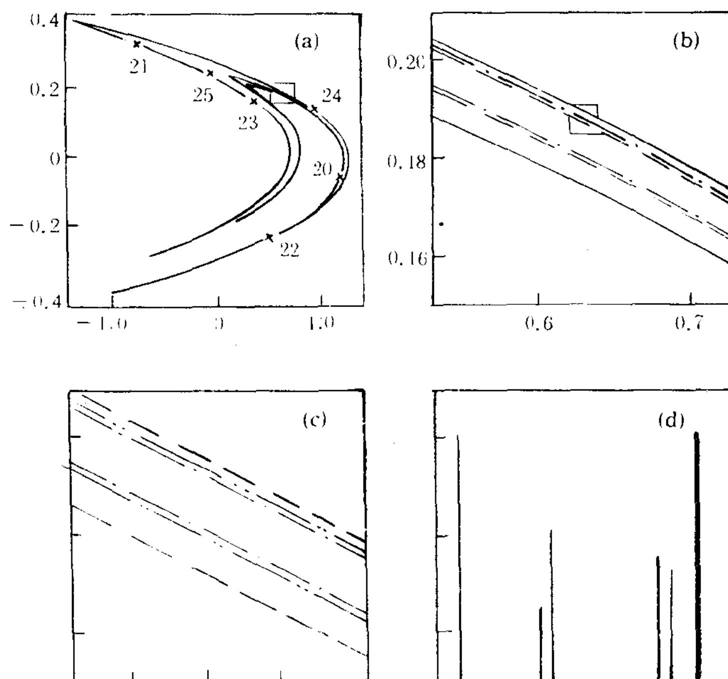


图 10.17　10^4 次迭代后的 Henon 吸引子
(参照 Farmer [30])

由图 10.17(c) 可看出迭代主要落在 6 条线上. 图 (d) 的高度即迭代点落在该线上的几率. 6 个不同的相对高度就表明 Henon 映象是非均匀的. 而这一特点，还不能从 Hausdorff 维数定义中反映出来.

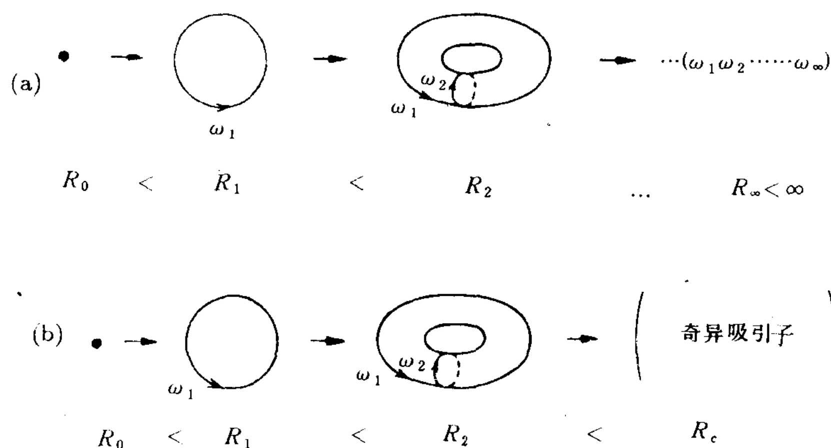


图 10.18　通过 Hopf 分岔由一个不动点趋向极限环

10.2.6　由准周期向混沌过渡 (Ruelle - Takens - Newhouse 方案)

流体力学中由片流运动向湍流运动过渡是早就被人注意到的混沌现象，也与奇异吸引子有关. 为了解这一点，我们仍回到图 10.12 (c) 所示的 Hopf 分岔，这一分岔由一个不动点过渡到一极限环. 现考察如下的动力学方程：

$$
\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= -(\Gamma r + r^3), \qquad \Gamma = a - a_c \\
\frac{d\theta}{dt} &= \omega
\end{aligned}
\tag{10.2.92}
$$

解为

$$
\begin{aligned}
r^2(t) &= \frac{\Gamma r_0^2 e^{-2\Gamma t}}{r_0^2(1-e^{-2\Gamma t})+\Gamma} \qquad r = r_0, \text{ 当 } t=0 \\
\theta(t) &= \omega t, \qquad \theta = 0, \quad \text{当} \quad t = 0
\end{aligned}
\tag{10.2.93}
$$

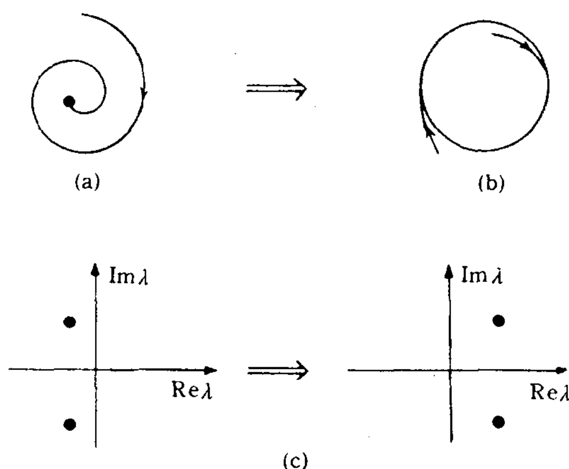


图 10.19 (a) Landau 提出的通向混沌的道路
(b) Ruelle — Takens — Newhouse 通向混沌道路

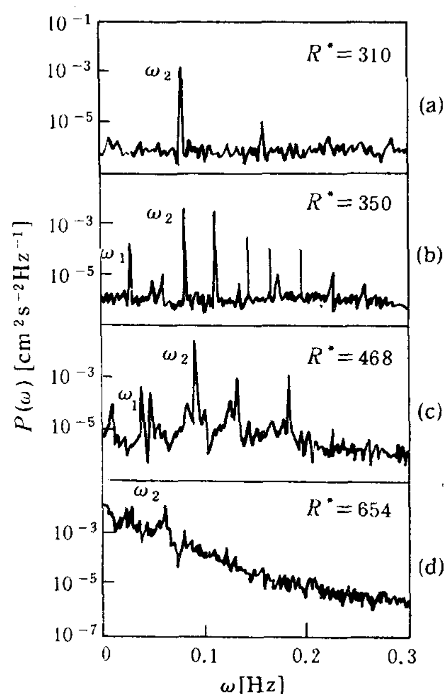


图 10.20 Benard 对流实验的功率谱测量 (控制参量为相对 Rayleigh 数), $R^* = R/R_c$
(a) 具有频率 ω_2 及其谐波的周期运动；(b) 具有两个不可约频率 ω_1, ω_2 的周期运动；
(c) 具有锐线谱的非周期混沌运动；(d) 混沌的连续谱
(参照 Swinney, Gollul [26])

当 $\Gamma > 0$, 轨道由 $r > 0$ 趋向不动点 $r = 0$(见图 10.18 (a)). 当 $\Gamma < 0$, 则轨道趋向极限环 $r_\infty = \sqrt{a_c - a}$(见图 10.18 (b)). 由于 Hopf 分岔，一个频率为 ω 的振动便被激发 (见图 10.18(c)).1944 年 Landau 在此基础上提出，湍流之所以发生乃是一个、两个 $\cdots$ 无穷个 Hopf 分岔的结果 [25]. 如图 10.19 (a) 所示，当参量 R 不断增加时，一个、两个 $\cdots$ 无穷个振动被激发，这就是 Landau 通向混沌的道路. 从功率谱来看，最后便是一个包含无穷频率的连续谱 [25]. 但实际情况并非这样. 图 10.20 给出 Benard 实验功率谱的测量 [26]. 在出现了两个不可约的 ω_1, ω_2 振动 (见图 10.20(b)) 之后便出现了连续谱 (见图 10.20(c), (d)). 这就使得 Ruelle - Taken - Newhause 提出了新的向混沌过渡的方法 (见图 10.19 (b))[27]. 他们证明了在经历两次 Hopf 分岔，产生不可约频率 ω_1, ω_2 的振动后，规则运动将是很不稳定的，几乎不可避免的要形成一奇异吸引子的混沌运动，这就是湍流.

10.2.7 奇异吸引子图象与分形边界

Julia 在 1918 年研究了复变量 z 的有理函数 $f(z)$ 的迭代映象 [28]. 现以下面的二次函数为例：

$$z_{n+1} = f(z_n) = z_n^2 + c \tag{10.2.94}$$

其形状与 (10.2.58) 式相似，但由于 z 是复变量，映象显得很复杂. 现定义那些经多次映象被吸引到 $z^* = \infty$ 附近，即 $z^* = \infty$ 的吸引盆的边界为 Julia 集 J_c:

$$J_c = z \text{ 的边界}, \qquad \lim_{n\to\infty} f_c^n(z) \to \infty \tag{10.2.95}$$

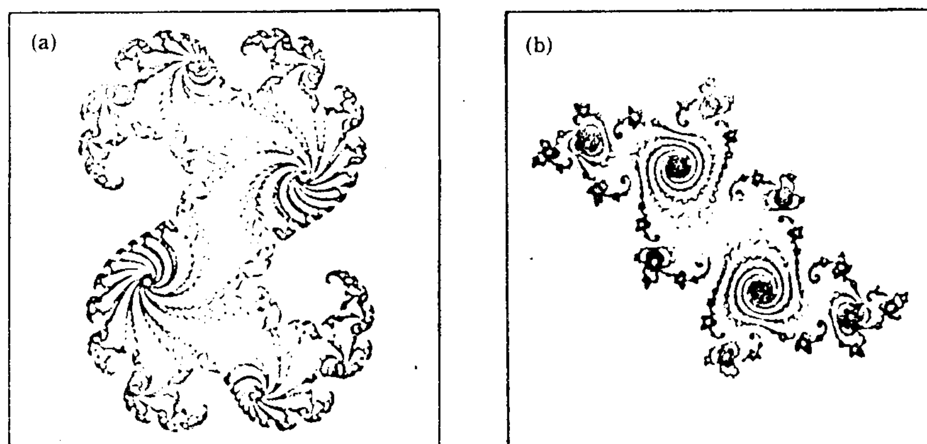


图 10.21 两个典型的 Julia 集 ($f_c(z_n) = z_n^2 + c$)
(参照 Peitew, Richter [28])

图 10.21 (a), (b) 就是这样两个 Julia 集 [28]. 图 (a) 的参数 $c = 0.32 + 0.043i$, 图 (b) 中 $c = -0.194 + 0.6557i$.

Julia 还证明了一条定理：只要 $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^n(0) \not\to \infty$, 则 J_c 是连通的，而 $\lim\limits_{n\to\infty} f_c^n(0)$ 是依赖于参数 c 的. 1980 年 B. B. Mandelbrot 又定义了参数 c 中那些使 J_c 连通的集为 M 集 [29, 30], 即

$$M = \{c|J_c\text{是连通的}\} = \{c|\lim_{n\to\infty} f_c^n(0) \not\to \infty\} \tag{10.2.96}$$

图 10.22 上为在 c 复平面二次函数迭代 (10.2.108) 式的 M 集，下图为按 (10.2.58) 式 $x_{n+1} = x_n^2 + c$, 沿 c 的实轴迭代的分岔结构.

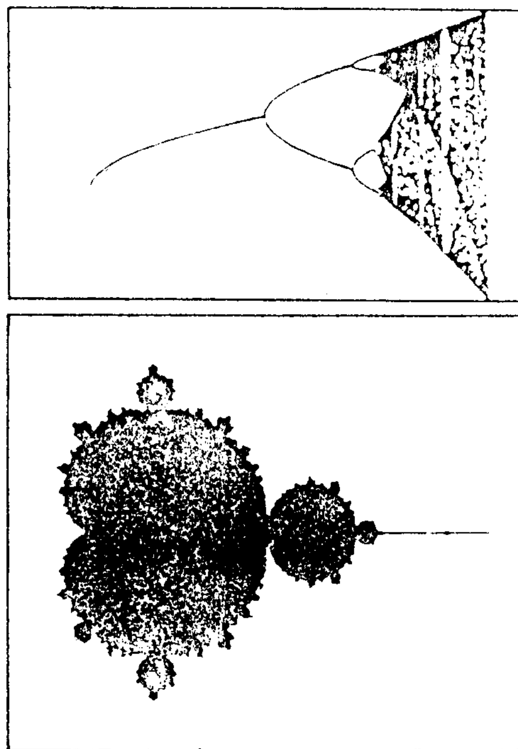


图 10.22 (10.2.108) 式在 c 平面的 M 集与
沿 c 的实轴 (10.2.58) 式迭代的二分岔结构
(参照 [28])

10.2.8 一维迭代的功率谱与外界噪音的影响

(1) 一维迭代的功率谱 $P(k)$ 是反映一维迭代映象 (10.2.28) 特性的一个重要方面. 2^n 周期迭代 $x^n(t) = f^t_{R_n}(0), t = 1, 2, \cdots, 2^n = T_n$ 的 Fourier 谱 $a^n_k(P(k) = |a^n_k|^2)$ 由下式定义:

$$x^n(t) = \sum_{k=0}^{2^n-1} a^n_k \exp\left\{i\frac{2\pi k}{T_n}t\right\} \tag{10.2.97}$$

$x^n(t)$ 为 t 的周期函数，包含了频率 $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{T_n}$, $k = 0, 1, \cdots, 2^n - 1$ 的各个分量. 每分岔一次，例如 $n \to n+1$, 便增添了新的谐波分量 $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{2^{n+1}}$, $k = 1, 3, 5\cdots$.

Fourier 谱 a^n_k 可通过 (10.2.111) 式的反变换得到，即

$$a^n_k = \frac{1}{T_n}\int_0^{T_n} dt \exp\left\{-i\frac{2\pi k}{T_n}t\right\} x^n(t) \tag{10.2.98}$$

现证明 a^{n+1}_{2k} 可近似表示为 a^n_k, 这是因为间隔 $[0, T_{n+1}]$ 可分为两个 T_n, 故有

$$a^{n+1}_k = \int_0^{T_n} \frac{dt}{2T_n}[x^{n+1}(t) + (-1)^k x^{n+1}(t+T_n)] \exp\left\{-i\frac{2\pi k}{2T_n}t\right\}$$

当 k 为偶数时，上式可写为

$$a_{2k}^{n+1}=\int_0^{T_n}\frac{dt}{2T_n}[x^{n+1}(t)+x^{n+1}(t+T_n)]\exp\left\{-\frac{2\pi ikt}{T_n}\right\}$$
$$\simeq\int_0^{T_n}\frac{dt}{T_n}x^{n+1}(t)\exp\left\{-i\frac{2\pi kt}{T_n}\right\}\simeq\int_0^{T_n}\frac{dt}{T_n}x^n(t)\exp\left\{-i\frac{2\pi kt}{T_n}\right\}=a_k^n \qquad (10.2.99)$$

当 k 为奇数时，经过复杂计算最后结果为 [32]

$$|a_{2k+1}^{n+1}|\simeq 0.152|a_{(1/2)(2k+1)}^n| \qquad (10.2.100)$$

(2) 现讨论外界噪音对 Fourier 谱 a_k^n 带来的影响. 一维迭代包含外界噪音 ξ_n 后可写为

$$x_{n+1}=f_r(x_n)+\xi_n \qquad (10.2.101)$$

式中，ξ_n 为服从 Gaussian 分布的无规变量

$$<\xi_n\xi_{n'}>=\sigma^2\delta_{n,\ n'} \qquad (10.2.102)$$

σ^2 为噪音的均方值. 注意到当发生一次分岔，新增加的谐波分量 $|a_{2k+1}^{n+1}|$ 要比分岔前的 $|a_{k+1/2}^n|$ 小若干倍，对于一维二次迭代情形，(10.2.100) 式给出小 0.152 倍，亦即高次谐波分量 a_k^n 随 n 的增大愈来愈小，而白噪音的强度 σ^2 为常数，这就意味着 $|a_k^n|^2$ 随 n 的增大最终要被噪音掩盖掉. 图 10.23 (a), (b) 分别是无外界噪音与外界噪音一维二次迭代的数值计算结果 [31].

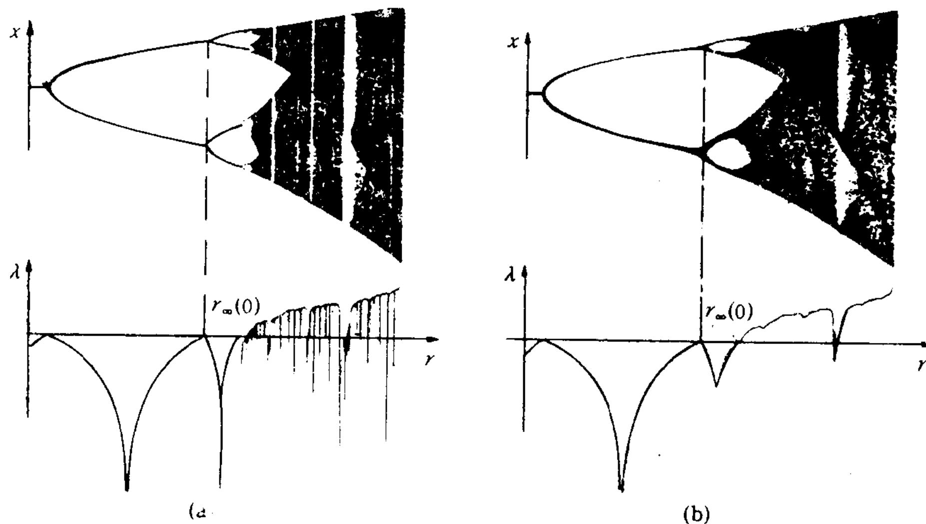


图 10.23 (a) 无噪音时二次迭代及 Liapunov 指数 λ;
(b) 有噪音时二次迭代及 Liapunov 指数 λ
(参照 Crutchfied 等 [32])

10.2.9 保守系统的无规运动

保守系统的运动方程可通过哈密顿量 H 表示为

$$\dot{\vec{q}}=\frac{\partial H}{\partial\vec{p}},\qquad \dot{\vec{p}}=-\frac{\partial H}{\partial\vec{q}}$$

按 Liouville 定理，相点密度 ρ 满足公式

$$
\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i \right) \\
&= \underline{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial}{\partial q_i}(\rho \dot{q}_i) + \frac{\partial}{\partial p_i}(\rho \dot{p}_i) \right)} - \rho \sum \left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} + \frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i} \right) \\
&= -\rho \sum_i \left(\frac{\partial}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0
\end{aligned} \tag{10.2.103}
$$

式中划线部分由流体力学的连续方程而等于零．(10.2.103) 式表明保守体系的相体积 $V = 1/\rho$ 在运动过程中是不变的．保守体系也存在混沌的或奇异的相空间区域，虽然不同于耗散体系的吸引子，也不是相点被吸引到上面去．保守体系混沌区的形成较为复杂，这里只给一简要的描述．

第一个问题便是保守系统的可积问题．由 $H(\vec{q},\ \vec{p})$ 描述的保守系统被称之为可积的，若能找到 Hamilton–Jacobi 方程的一个解 $S = S(q,\ J)$, 满足

$$
H\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E(J) \tag{10.2.104}
$$

广义动量与坐标取为 J 与 $\theta = \dfrac{\partial S}{\partial J}$, 则有

$$
\frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0,\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial J} = \omega(J) \tag{10.2.105}
$$

以 $H = \dfrac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2)$ 为例，又设 $E(J) = J\omega$, 则 Hamilton–Jacobi 方程 (10.2.118) 为

$$
\frac{1}{2} = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + \omega^2 q^2 \right] = J\omega
$$

$$
\theta = \frac{\partial S}{\partial J} = \frac{\partial}{\partial J} \int dq \sqrt{2J\omega - \omega^2 q^2} = \cos^{-1} \left(q \sqrt{\frac{\omega}{2J}} \right) \tag{10.2.106}
$$

亦即

$$
\begin{aligned}
q &= \sqrt{\frac{2J}{\omega}} \cos\theta \\
p &= \frac{\partial S}{\partial q} = -\sqrt{2J\omega - \omega^2 q^2} = -\sqrt{2J\omega} \sin\theta
\end{aligned} \tag{10.2.107}
$$

故质点的轨迹为相空间 $(p,\ q)$ 内一椭圆，按 (10.2.105) 式 $\theta = \displaystyle\int \frac{\partial H}{\partial J} dt = \omega t + \theta_0$, 随着时间的推移，质点在椭圆上不停地运动着．将这个例子推广到 n=2, 即两维情形，便有

$$
H = \frac{1}{2} \sum_{i=1,\ 2} (p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) \tag{10.2.108}
$$

解为

$$
\begin{aligned}
&q_i = \sqrt{\frac{2J_i}{\omega_i}} \cos\theta_i, \qquad p_i = -\sqrt{2J_i\omega_i} \sin\theta_i \\
&\theta_i = \omega_i t + \theta_{i0}, \qquad i = 1,\ 2
\end{aligned} \tag{10.2.109}
$$

一维情形的椭圆运动有一个特点，即椭圆是封闭的曲线，质点由一点出发，经过时间 $T = 2\pi/\omega$ 后，又回到原处．但在两维情况下，质点在四维相空间运动．它有两个周期，

$T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_1}$, $T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_2}$. 经过 T_1 后，质点在 (p_1, q_1) 相平面内的投影回到原处；同样经 T_2 后，质点在 (p_2, q_2) 平面内的投影回到原处. 但只有在 $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ 为有理数 $\dfrac{m}{n}$, $m, n = 1, 2, 3, \cdots$ 条件下，质点由一点出发经 $nT_1 = mT_2$ 后，不论是在 (p_1, q_1) 平面内的投影，还是在 (p_2, q_2) 平面内的投影，均回到原处，并且质点的轨迹形成一封闭的回路；否则的话，$\dfrac{\omega_2}{\omega_1} =$ 无理数，质点由一点出发，不论经过多长时间也不能回到原处，质点运动的轨迹形成一开路.

第二个问题，便是在可积基础上微扰展开. 参照 (10.2.108) 式，设 $\varepsilon H'$ 为微扰项，则有

$$H = \frac{1}{2}\sum_{1,\ 2}(p_i^2 + \omega_i^2 q_i^2) + \varepsilon H'$$
$$= J_1\omega_1 + J_2\omega_2 + \varepsilon H' \tag{10.2.110}$$

如果可以微扰求解的话，则 S 也应是原来基础上再加一微扰项，即

$$S = J_1\theta_1 + J_2\theta_2 + \varepsilon S' \tag{10.2.111}$$

注意到 (10.2.106) 式中 $\theta = \dfrac{\partial S}{\partial J}$, 故有 $\delta\theta = \dfrac{\partial \delta S}{\partial J} = \varepsilon\dfrac{\partial S'}{\partial J}$, 即 $\delta J = \varepsilon\dfrac{\partial S'}{\partial \theta}$ 可取

$$\begin{aligned} &H = (J_1 + \delta J_1)\omega_1 + (J_2 + \delta J_2)\omega_2 \\ &\delta J_1 = \varepsilon\frac{\partial S'}{\partial \theta_1}, \qquad \delta J_2 = \varepsilon\frac{\partial S'}{\partial \theta_2} \end{aligned} \tag{10.2.112}$$

于是由 (10.2.110),(10.2.112) 式得

$$\omega_1\frac{\partial S'}{\partial \theta_1} + \omega_2\frac{\partial S'}{\partial \theta_2} = H' \tag{10.2.113}$$

又设

$$\begin{aligned} S' &= \sum S'_{n_1 n_2}(J_1, J_2)e^{i2\pi(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)} \\ H' &= \sum H'_{n_1 n_2}(J_1, J_2)e^{i2\pi(n_1\theta_1 + n_2\theta_2)} \end{aligned} \tag{10.2.114}$$

将 (10.2.114) 式代入 (10.2.113) 式，便得

$$S'_{n_1, n_2} = \frac{H'_{n_1 n_2}}{2\pi(n_1\omega_1 + n_2\omega_2)} \tag{10.2.115}$$

(10.2.115) 式表明，只要 $n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0$, 即 $\dfrac{\omega_1}{\omega_2} = -\dfrac{n_2}{n_1} =$ 有理数，展开将发散，意即 (10.2.111) 式所示的微扰展开解是不成立的. 只有在 $\omega_1/\omega_2 =$ 无理数的情况下，微扰展开才可能成立. KAM 定理 [33~36] 证明了只要 ω_1/ω_2 足够无理，即 $|\dfrac{\omega_1}{\omega_2} - \dfrac{m}{s}| > \dfrac{k(\varepsilon)}{s^{2.5}}$, $k(\varepsilon \to 0) \to 0$, m, s 互质整数，则加上 $\varepsilon H'$ 微扰后存在着如 (10.2.111) 式所示的微扰解，而且是稳定的，当 $\varepsilon \ll 1$, 解不灵敏地依赖于初值. 质点运动是规则的，也称之为稳定的环面解 (Stable Tori), 因质点的二维运动可通过如图 10.24 的环面来描写.

现考虑 $\omega_1/\omega_2 =$ 有理数的情形. 这个有理数环面，在微扰 $\varepsilon H'$ 作用下，将会被破坏，并分裂为许多小而又小的环面. 如果比数 ω_1/ω_2 为无理数，这些新的小环面，按 KAM 定

理将是稳定的. 但稳定的小环面之间的运动则是无规的，亦即混沌的，这就是 Poincare-Birkhoff 定理的内容 [37].

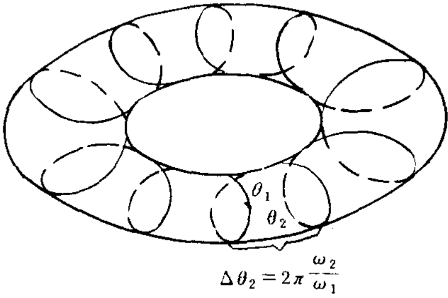


图 10.24 相空间的环面

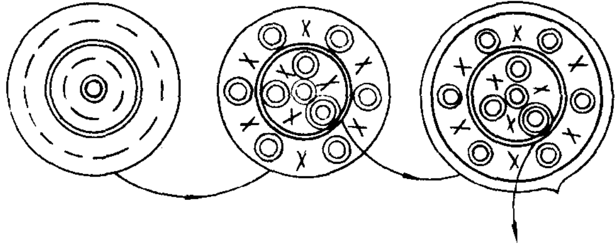


图 10.25 有理数频率环面的蜕变

最后导致质点的无规即混沌运动为有理数环 (ω_1/ω_2 为有理数) 蜕变为小的及更小的有理数环的过程，这一过程是自相似的. 图 10.25 是蜕变环的截面图.

作为保守系统向混沌过渡的典型例子是 Henon- Heiles 映象 [38], 其表示为

$$H=\frac{1}{2}(p_1^2+q_1^2+p_2^2+q_2^2)+\left[q_1^2q_2-\frac{q_2^3}{2}\right] \tag{10.2.116}$$

前面括号即为 $n=2$ 的可积简谐振子；后面方括号为三次方不可积微扰项. 当运动的总能 $E<1/9$ 时，运动是稳定的环面；当 $E>1/9$ 时，除稳定环面外，还有混沌轨迹的 Poincare 映象，如图 10.26[38].

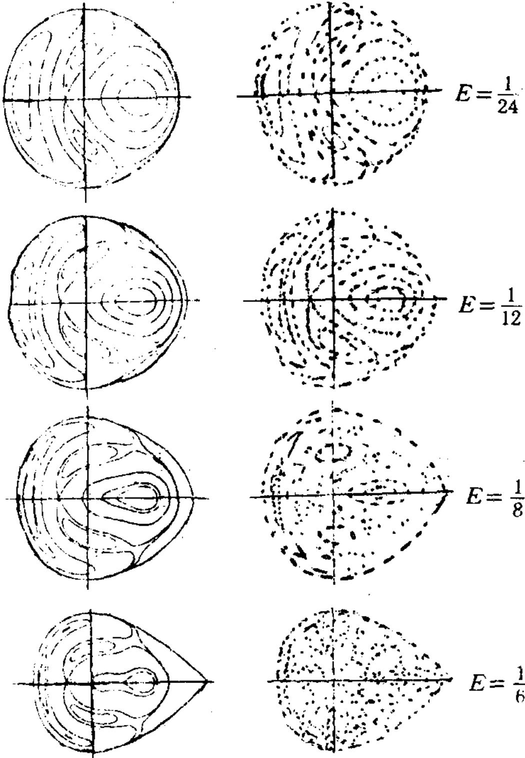


图 10.26 Henon- Heiles 系统的 Poincare 映象
(参照 Berry [38])

10.3 激光单模振荡的 Lorenz 模型与实验验证

10.3.1 激光单模振荡的 Lorenz 模型 [39, 40]

参照 Bloch 方程 (3.2.1) 及 Maxwell 方程 (3.6.15) 式，并注意到 (3.6.15) 式的 u, v 是指 N 个原子的极化，包括了因子 $N\mu$, 将这因子分离出来后，便是 (3.2.1) 式中的 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, 则得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{T_2}u + \delta\omega v \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{T_2}v - \delta\omega u + \frac{2\mu E}{\hbar}\Delta \\
\frac{\partial \Delta}{\partial t} &= -\frac{\Delta - \Delta_0}{T_1} - \frac{2\mu E}{\hbar}v \\
\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{N\mu\pi\omega_0}{cn}v \\
E\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right) &= \frac{N\mu\pi\omega_0}{cn}u
\end{aligned} \tag{10.3.1}$$

对于单模情形可取近似 $\dfrac{\partial E}{\partial z} \simeq \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \simeq \dfrac{\partial \phi}{\partial t} = 0$. 又设单模振荡频率与原子跃迁频率为共振 $\delta\omega = 0$, 故可取 $u = 0$, 并加上腔的损耗 $\nu_c E$, 方程组 (10.3.1) 可化为

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{T_2}v + \frac{2\mu E}{\hbar}\Delta \\
\frac{\partial \Delta}{\partial t} &= \frac{\Delta_0 - \Delta}{T_1} - \frac{2\mu E}{\hbar}v \\
\frac{\partial E}{\partial t} &= N\mu\frac{\pi\omega_0}{n^2}v - \nu_c E
\end{aligned} \tag{10.3.2}$$

先令上式左边为 0 求定态值，并用 “s” 下标表示. 由上式中一、三方程得

$$v_s = \frac{2\mu E_s}{\hbar}T_2\Delta_s = \frac{\nu_c E_s}{N\mu\pi\omega_0}n^2 \tag{10.3.3}$$

$$\Delta_s = \frac{\hbar\nu_c n^2}{2\pi\mu^2\omega_0 N T_2} \tag{10.3.4}$$

由第二方程，得

$$\frac{\Delta_0 - \Delta_s}{T_1} = \frac{2\mu E_s v_s}{\hbar} = \left(\frac{2\mu E_s}{\hbar}\right)^2 T_2\Delta_s$$

故有
$$\left(\frac{2\mu E_s}{\hbar}\right)^2 = \frac{1}{T_1 T_2}\left(\frac{\Delta_0}{\Delta_s} - 1\right) \tag{10.3.5}$$

然后令

$$\begin{aligned}
&\lambda = \frac{\Delta_0}{\Delta_s} - 1, \qquad r = \lambda + 1 = \frac{\Delta_0}{\Delta_s} \\
&\sigma = \nu_c T_2, \qquad b = \frac{T_2}{T_1}, \qquad \tau = \frac{t}{T_2} \\
&X = \sqrt{b\lambda}\frac{E}{E_s}, \qquad Y = \sqrt{b\lambda}\frac{v}{v_s}, \qquad Z = \frac{\Delta_0 - \Delta}{\Delta_s}
\end{aligned} \tag{10.3.6}$$

则方程 (10.3.2) 可简化为

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -\sigma(X-Y)\\ \dot{Y} &= -Y - XZ + rX\\ \dot{Z} &= XY - bZ\end{aligned} \tag{10.3.7}$$

此即 Lorenz 方程 (10.2.10).

由 Lorenz 方程出发较容易分析其不动点与稳定性. 由 (10.3.7) 左端为 0 得出 X 的定态解为

$$\begin{aligned}&x_1 = 0, \qquad r \le 1;\\ &x_2 = \pm\sqrt{b(r-1)}, \qquad r > 1\end{aligned} \tag{10.3.8}$$

若将 X, Y, Z 的定态解写为 $\vec{X}(x,y,z)$, 则有

$$\begin{aligned}&\vec{X}_1(x,y,z) = (0,0,0), \qquad r \le 1\\ &\vec{X}_2(x,y,z) = (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1), \qquad r > 1\end{aligned} \tag{10.3.9}$$

在不动点 $\vec{X}_1$ 处的特征根方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda-\sigma & \sigma & 0\\ r & -\lambda-1 & \\ 0 & & -\lambda-b \end{vmatrix} = 0 \tag{10.3.10}$$

$$\lambda_{1,\,2} = -\frac{\sigma+1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma+1)^2 + 4(r-1)\sigma}, \qquad \lambda_3 = -b$$

这三个特征根均为负, 故 $\vec{X}_1$ 为稳定的不动点. 另一方面在 $\vec{X}_2$ 处的特征根方程为

$$\begin{vmatrix} -\lambda-\sigma & \sigma & 0\\ 1 & -\lambda-1 & -c\\ c & c & -\lambda-b \end{vmatrix} = 0, \qquad c = \pm\sqrt{b(r-1)} \tag{10.3.11}$$

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (\sigma+b+1)\lambda^2 + b(\sigma+r)\lambda + 2b\sigma(r-1) = 0$$

图 10.27 给出 $P(\lambda)$ 随 λ 变化的定性关系. 当 $r=1$, 泵浦达到阈值, 三个特征根分别为 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-b$, $\lambda_3=-(\sigma+1)$. 有一个模式开始振荡, 处于介稳状态; 另外两个模式为阻尼振荡. 由图 10.27 还看出, $1<r<r_1$, 三个特征根均为负稳定的. 当 $r=r_1$ 时, 三个实根中有两个重根. 当 $r>r_1$ 时, 有一对共轭复根, 但实部仍为负的阻尼的.

但当 $r=r_c$, $r_c=\sigma\dfrac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}$ 时, 实部为 0,$\lambda=\pm i\sqrt{b(\sigma+r_c)}=\pm i\sqrt{b\sigma\dfrac{2\sigma+2}{\sigma-b-1}}$. 故在 $r_1<r\le r_c$ 之间, 解为一对阻尼的极限环. 这恰恰表现出前面讨论过的 Hopf 分岔. 但当 $r>r_c$ 时, 这一对 Hopf 分岔后的极限环失稳, 质点运动轨迹绕着一个极限环运动, 运动几周之后, 又跳到另一个极限环运动, 而且绕极限环运动的周数及其跳动频率几乎是完全无规的, 很灵敏地依赖于初值, 这就是 Lorenz 说的蝴蝶效应. 图 10.28 是典型的数值计算结果 [40], 参数 $\sigma=10$, $b=8/3$ $\left(r_c=\sigma\dfrac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1}=24.74\right)$, $r=28>r_c$.

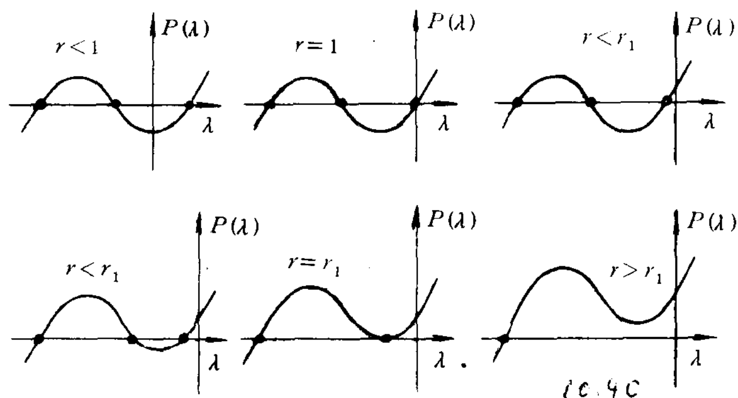


图 10.27　多项式 $P(\lambda)$ 的定性行为

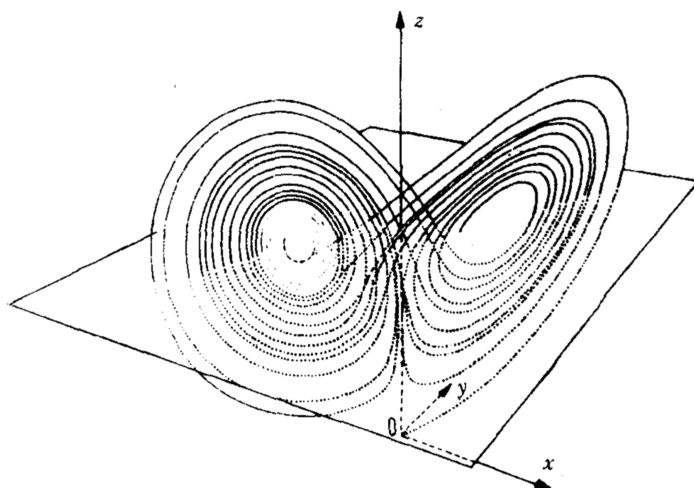


图 10.28　Lorenz 吸引子
(参照 Lanford [40])

10.3.2 Lorenz 模型的激光实验验证

从上一节可见, 有两个阈值 $r=1$ 与 $r=r_c$, 前一阈值为激光振荡阈值, 当 $r=\dfrac{\Delta_0}{\Delta_s}>1$, 激光开始振荡. 只要 $r<r_c$ 振荡便是临界的或阻尼的, $\vec{X}$ 被吸引到不动点 $\vec{X}_2$; 只有当 $r\geq r_c$,$\vec{X}$ 才进入不稳的极限环区, 属无规的混沌运动. Lorenz 模型是混沌运动的范例, 该方程是流体中的 Benard 方程简化过来的. 要在流体实验中很好满足这些简化, 并观察到理论预期的种种混沌现象, 还不容易. 故人们回过来求助于激光振荡实验观察混沌现象, 验证理论. 首先要考虑的是第二阈值 $r=r_c$, 即

$$\sigma>b+1 \tag{10.3.12}$$

$$r=\frac{\Delta_0}{\Delta_s}\geq r_c=\sigma\frac{\sigma+b+3}{\sigma-b-1} \tag{10.3.13}$$

按 (10.3.6) 定义, (10.3.12) 也可写为 $\nu_c>\nu_1+\nu_2$ ($\nu_1=\dfrac{1}{T_1}$, $\nu_2=\dfrac{1}{T_2}$). 这个条件也称之 “坏腔” 条件, 相反当激光腔 ν_c 比 ν_1, ν_2 小, 属 “良腔”. 在满足 (10.3.12) 的前提下, 改变 σ 使得 r_c 为最小, 得

$$\begin{aligned}\sigma_{\min} &= b+1+\sqrt{4(b+1)(b+2)} \\ r_{\min} &= 5+3b+\sqrt{8(b+1)(b+2)} > 9\end{aligned} \tag{10.3.14}$$

(10.3.14) 式说明，就算 $b=\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\ll 1$, 泵浦的超阈度 $\dfrac{\Delta_0}{\Delta_s}$ 也必须在 9 倍以上才有可能观察到混沌现象. 这个要求无疑是很苛刻的，在一般的激光器中很难满足. 故 Wiss 与 Klische[41] 建议用 N_2O 激光泵浦的 NH_3 远红外激光器. NH_3 分子的每一转动能级 $(J,\ K)$ 均因 N

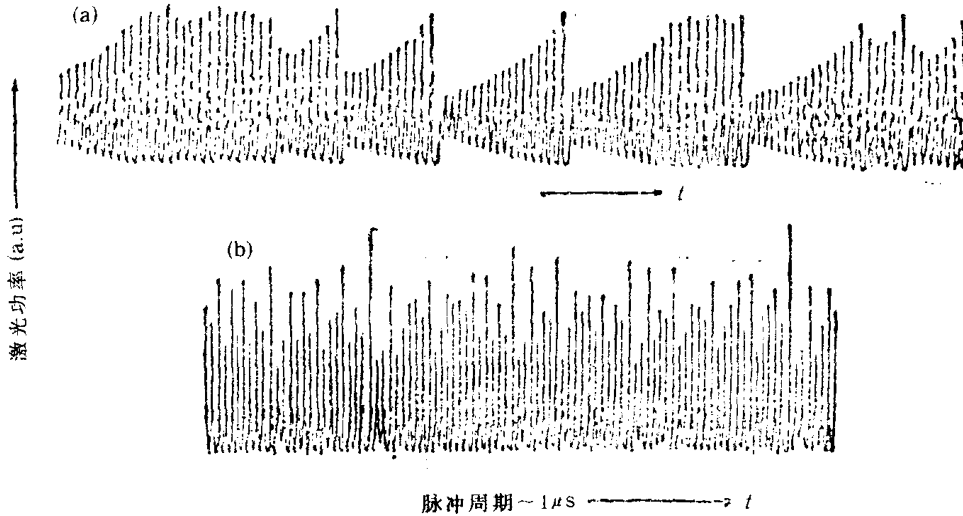


图 10.29 将腔频调谐到谱线中心频率的激光混沌行为

(参照 C.O.Weiss 等 [43])

原子穿过 H_3 原子平面而反演分裂为 a, s 两个能级. 允许跃迁为 a⟷ s, $\Delta K=0$. 波长为 10.78μm, 这是泵浦抽运能级波长，产生激光跃迁的激光跃迁波长为 81.5μm. 跃迁谱线的加宽为近乎均匀的压力加宽，只有几个兆赫. 这样小的加宽与高增益就使得能实现“坏腔”及“高超阈值”两个条件，即 (10.3.14) 式.

在将激光频率准确调谐到谱线中心频率情况下，的确观察到激光脉冲序列随时间的演化行为与 Lorenz 模型的数值模拟完全一致 [29]. 这就是图 10.29(a) 所表示的激光脉冲绕一个极限环放大随机地跳到另一个极限环放大. 如此反复，由一个到另一个. 当参量不一样，便是图 10.29(b), 虽也包括放大与跳跃，但已是另一种脉动. 关于单模均匀加宽激光振荡实验， Harrison 与 Biswas 有过详细的评述 [44].

10.3.3 模式分裂与非均匀加宽

为了将失谐与非均匀加宽的影响考虑进去，我们先讨论由于失谐而产生的模式分裂. 单模振荡是指腔长 L 及纵模指标 m 均给定，因而腔的本征模式频率 $\omega_m=\dfrac{2\pi m}{L}c=k_m c$ 也就给定了，但激光振荡频率 ω 的解可能是一个 (ω_m 与原子谱线中心频率为共振), 也可能是多个 (ω_m 与原子谱线中心频率有失谐). 设工作物质的折射率为 $n(\omega)$, 长度为 l, 则腔的共振条件要求

$$kln(\omega)+k(L-l)=k_m L \tag{10.3.15}$$

即
$$\frac{l}{L}(n(\omega)-1)\omega=\omega_m-\omega \tag{10.3.16}$$

又注意到 $n(\omega)-1\simeq 2\pi\chi$, 并参照图 2.4 作图 10.30. 图 10.30 中 $\omega_m-\omega$ 与色散曲线只有 1

个交点，即 $\omega_m-\omega=0$ ；ω_{m+1} 与中心频率有 $\dfrac{2\pi c}{L}$ 失谐，$\omega_{m+1}-\omega$ 与色散曲线有 3 个交点，故满足共振条件的激光振荡频率有 3 个，每一个振荡频率均与中心频率有失谐 [45].

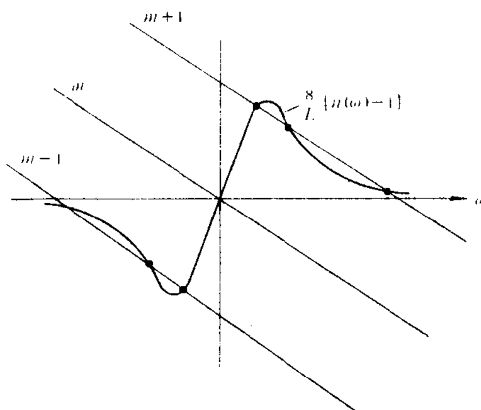


图 10.30　谱线均匀加宽情形模式分裂

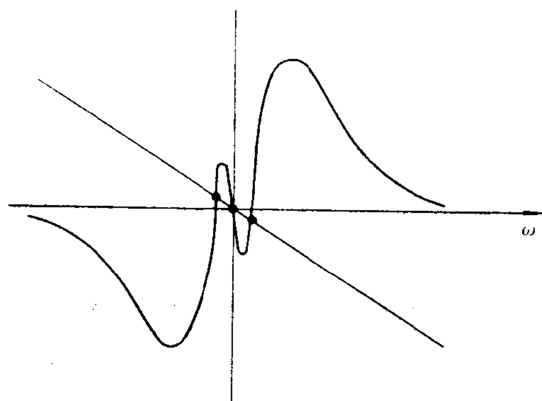


图 10.31　非均匀加宽且中心烧孔原子谱线模式分裂

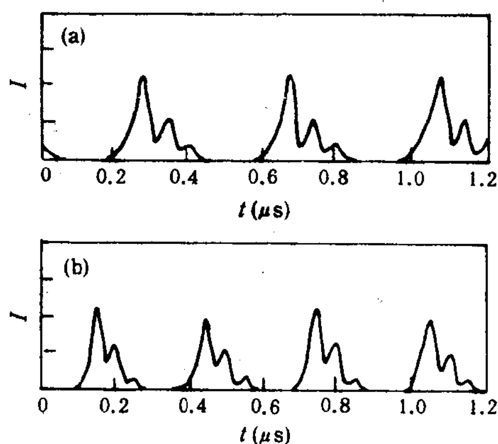


图 10.32　单模非均匀加宽激光 (SMIBL) 脉动输出
(a) 放电电流 40mA;(b) 放电电流 50mA
(参照 Capperson [46])

上面是谱线为均匀加宽情况下由于腔的共振频率与原子谱线中心频率的失谐而出现的模式分裂. 如果原子谱线是非均匀加宽的，而且中心频率处出现烧孔，色散曲线也相应地变得很复杂了. 这时模式分裂如图 10.31 所示，有 3 个交点 [45]. 这表明即使 ω_m 调谐到与原子谱线中心频率为共振，除了 $\omega=\omega_m$ 激光振荡频率外，还有两个旁频，旁频增益要比中心频 $(\omega-\omega_m=0)$ 的增益高，因中心已烧孔. 旁频与中心频率振荡并存，就会产生拍频，在粒子数反转 Δ 及极化 v 上均会表现出来. 这种中心频率与旁频振荡间的相互作用，也极易导致不稳. 至少定性上可以预期，在原子谱线非均匀加宽情况下实现向混沌过渡要比均匀加宽情况下容易得多. 虽然解析上更复杂，但数值模拟计算与实验观测均证实了这一点. Casperson[46] 最早做了这方面的实验. 他是用低气压放电激励的 He-Xe 激光，波长 3.51μ, 小信号增益 $g_0\simeq 1\text{cm}^{-1}$,Doppler 加宽 $\delta\nu_D\simeq 100$MHz. 由于非均匀加宽的影响，使得激光振荡不稳的阈值大为降低. 如图 10.32 所示，当放电电流为 40mA, 50mA 时，激光为自脉动输出，称之为自脉动不稳. 但当放电电流为 70mA 时，

便是具有很宽的光谱的混沌输出了.

关于单模激光振荡还要提到 Gioggia 与 Abraham 的实验 [47]. 实验也是用的坏腔、非均匀加宽、单模 He-Xe 激光，波长 3.51μm, 通过改变失谐量，已观察到双频率及倍周期分岔通向混沌 (见图 10.33). 这些要从理论上进行分析还是很困难的. 下面只就均匀加宽情形失谐的影响进行讨论.

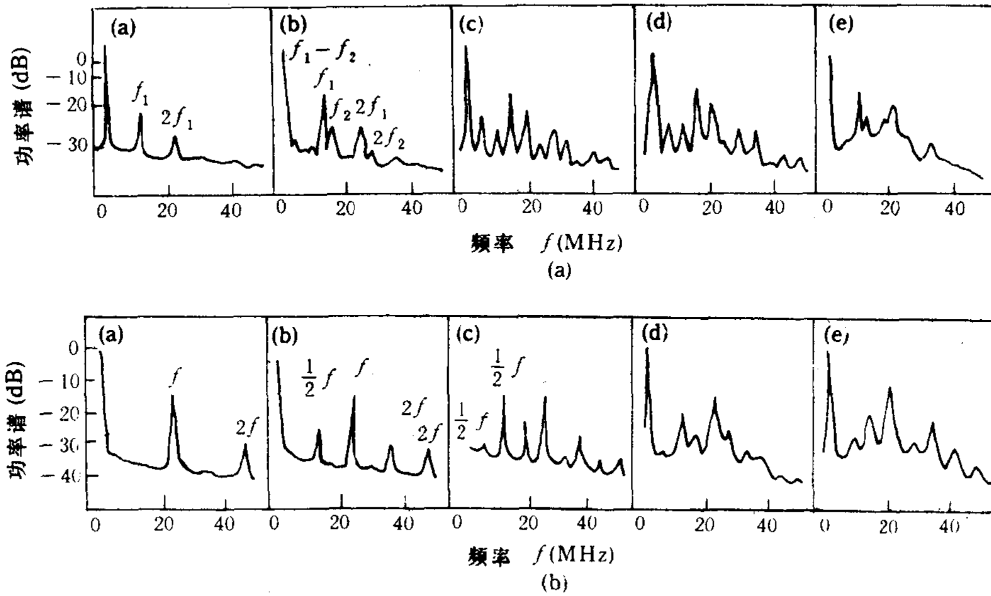


图 10.33 3.51μ He-Xe 激光通过 (a) 双频率 (b) 倍周期，向混沌过渡
(参照 Gioggia, Abrahan [47])

10.3.4 失谐对激光振荡第二阈值的影响 [48]

通过激光单模振荡实验检验 Lorenz 模型，虽已得到实验与理论相符的结果，但实验条件较苛刻，主要因为要满足第二阈值 $r > r_c$, 对超阈值要求太高 $\dfrac{\Delta_0}{\Delta_s} > 9$, 一般激光器均不满足此要求. 但这一结论是在激光振荡频率 ω 与原子跃迁频率 ω_0 为共振情况下 $\delta = \omega_0 - \omega = 0$ 得到的. 如果有失谐， $\delta = \omega_0 - \omega \neq 0$, 影响又会怎样呢？文献 [48] 中详细研究了这个问题，结果是在 $b = \dfrac{T_2}{T_1} = 1$ 情况下，第二阈值为

$$R_c = \frac{\sigma(\sigma+4) - \sigma^2\delta^2}{\sigma - 2} \tag{10.3.17}$$

很明显，随着失谐 δ 的增加， R_c 下降到与第一阈值 $1+\delta^2$ 相等时，稳定振荡亦随之消失. 由 $R_c \geq 1+\delta^2$ 及 (10.3.17) 式得

$$R_c = \frac{\sigma(\sigma+4) - \sigma^2\delta^2}{\sigma - 2} \geq 1 + \delta^2 \tag{10.3.18}$$

现讨论 (10.3.18) 式的物理意义.

(1) 坏腔 $\sigma > 2$. 由 (10.3.18) 式易得

$$\delta \leq \sqrt{\frac{\sigma^2+3\sigma+2}{\sigma^2+\sigma-2}} = \sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}} = \delta_1 \tag{10.3.19}$$

当 $\delta < \delta_1$ 时，存在稳定振荡区. 但当 $\delta = \delta_1$ 时，稳定振荡区消失.

(2) 良腔 $1<\sigma<2$. 同样由 (10.3.18) 式导出存在稳定振荡条件为 $\delta\geq\delta_1$.

(3) 理想腔 $\sigma<1$. 由 (10.3.19) 式看出，当 $\sigma\to1$ 时，$\delta_1\to\infty$, 故要求 $\delta\geq\delta_1$, 越过第二阈值已不可能. 当 $\sigma<1$ 时，δ_1 为虚数，即不存在这样的 R_c 能使得 (10.3.18) 式得以满足，也不存在 r 越过 R_c 进入混沌区问题. 意即在理想腔情况下，振荡总是稳定的. 图 10.34 为数值求解有失谐情况下单模激光振荡的动力学方程的结果 ($W_0=\sqrt{b\lambda}u_0/u_s$ 为原子极化的实部).(a),(b) 二图参数分别为 $\sigma=4$, $b=1$, $r=10.64$, $\delta=0.8$; $\sigma=4$, $b=1$, $r=10.64$, $\delta=0.9$. 由这两组参数计算得的第二阈值 r_c 分别为 10.88, 9.52, 而因 $r-R_c=-0.24$, 1.29, 故图 10.34 (a) 为稳定输出，图 (b) 已经是混沌输出了.

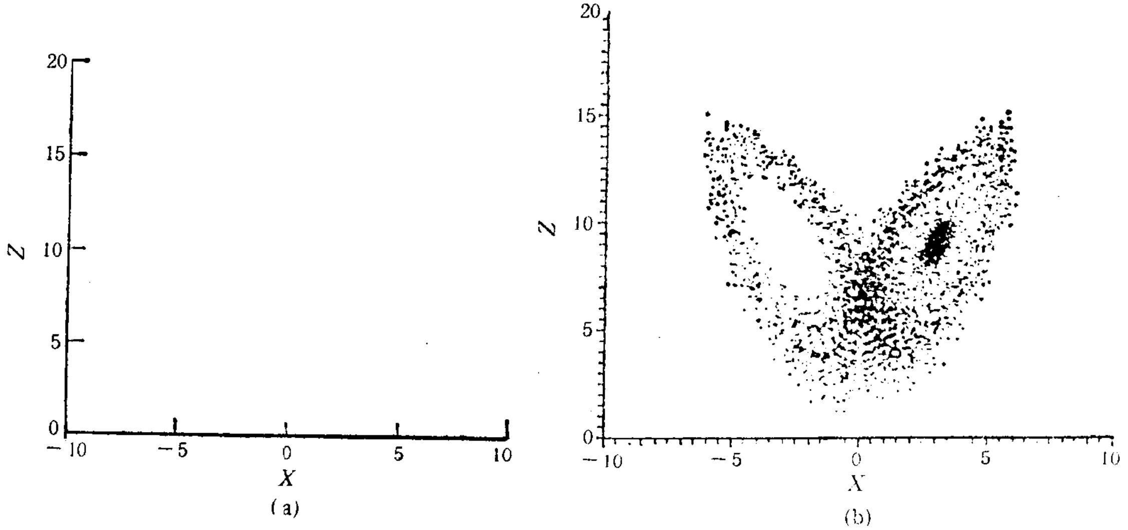


图 10.34 (a) 单模激光振荡相图 $Z-X$(初值 $X_0=Y_0=W_0=3.01$, $Z_0=9.01$);
(b) 单模激光振荡相图 $Z-X$(初值 $X_0=Y_0=W_0=3.01$, $Z_0=9.01$)
(参照谭维翰 [48])

10.4 光学双稳态中的混沌现象

10.4.1 吸收型光学双稳态

光学双稳态是指输入一个光强，输出却可能有两个光强的光学系统. 如图 10.35 所示，在工作物质中原子与光场的相互作用可通过 (10.3.1) 式来描写. 又设光场频率与原子中心频率为共振，于是用 $\delta\omega=0$, 参照图 10.30, 在中心频率处，原子色散为 0, 故称为吸收型. 显然 $\phi=u=0$ 是方程 (10.3.1) 的解，又略去场的损耗项 ν_cE, 于是有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{1}{T_2}v+\frac{2\mu E}{\hbar}\Delta\\
&\frac{\partial\Delta}{\partial t}=\frac{\Delta_0-\Delta}{T_1}-\frac{2\mu E}{\hbar}v\\
&\frac{\partial}{\partial t}E+\frac{c}{n}\frac{\partial E}{\partial z}=\frac{\pi\omega_0N\mu}{n^2}v=\frac{g}{2}v
\end{aligned}\tag{10.4.1}$$

现求 (10.4.1) 式的定态解，即求 $\dfrac{\partial E}{\partial t}=\dfrac{\partial\Delta}{\partial t}=\dfrac{\partial v}{\partial t}=0$, 于是有 [49]

$$\Delta = \frac{v}{T_2 \frac{2\mu E}{\hbar}} = \sqrt{\frac{\gamma_2}{\gamma_1}} \frac{v}{F}, \qquad F = \frac{2\mu E}{\hbar\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}$$

$$v = \frac{\gamma_1 \Delta_0}{\frac{2\mu E}{\hbar} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{2\mu E/\hbar}} = \sqrt{\frac{\gamma_1}{\gamma_2}} \Delta_0 \frac{F}{1+F^2} \tag{10.4.2}$$

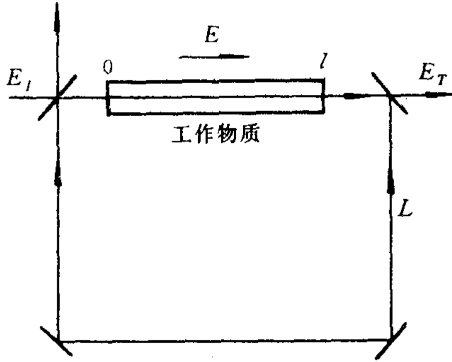


图 10.35 环行腔光路图

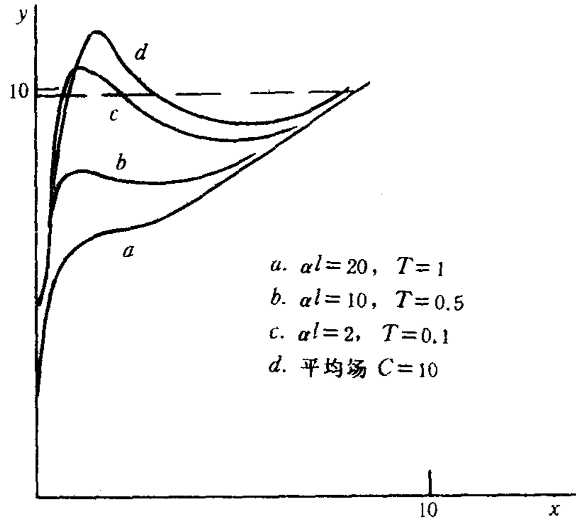


图 10.36 输入 y 与输出 x 的变化曲线

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\alpha \frac{F}{1+F^2}, \qquad \alpha = -\frac{n\Delta_0 g}{c} \frac{\mu}{\hbar\gamma_2} \tag{10.4.3}$$

这里考虑吸收介质 $\alpha > 0$, $\Delta_0 < 0$. 现参照图 10.35 写出环行腔的边界条件

$$E(l) = E_T/\sqrt{T}$$
$$E(0) = \sqrt{T}E_I + RE(l) \tag{10.4.4}$$

式中, E_I, E_T 分别为入射与透射光, R, T 为反射率与透射率. 由 (10.4.4) 式的第二式得

$$\frac{2\mu E(0)}{\hbar\sqrt{\gamma_1\gamma_2}} = T\frac{2\mu E_I}{\hbar\sqrt{\gamma_1\gamma_2 T}} + R\frac{2\mu E(l)}{\hbar\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}$$

即

$$F(0) = Ty + Rx \tag{10.4.5}$$

积分 (10.4.3) 式得

$$F(l) - F(0) = -\alpha \int_0^l \frac{F}{1+F^2} dz \simeq -\alpha l \frac{F(l)}{1+F^2(l)} \tag{10.4.6}$$

为了得到一简洁表示, 在上式中做积分时取了平均场近似. 由 (10.4.5),(10.4.6) 式消去 $F(0)$, 便得输入 $y = \frac{2\mu E_I}{\hbar\sqrt{\gamma_1\gamma_2 T}}$ 与输出 $x = \frac{2\mu E(l)}{\hbar\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}$ 的如下关系:

$$y = x + \frac{2cx}{1+x^2}, \qquad 2c = \frac{\alpha l}{T} \tag{10.4.7}$$

(10.4.3) 式可分离变量准确求解，图 10.36 (a)~ (c) 即按 (10.4.3) 式的准确解及边界条件 (10.4.5) 式计算的入射光 x 及透射光 y 的变化曲线 [49]. 图 10.36(d) 为取平均场近似后的 (10.4.7) 式的 x 与 y 的变化曲线， $c = \dfrac{\alpha l}{2T} = 10$. 可见当 T 与 αl 均很小时，其极限便是平均场近似 (10.4.6) 式. 由图 10.36 (c), (d) 还能看出，当给定输入 y, 就有 3 个 x 与之对应. 除了中间那个不稳的外，环行腔会给出两个可能的输出，究竟是高的还是低的输出，这要看它的发展历史了. 如果 y 由 0 逐渐变大，则应取低输出；相反则应取高输出.

为了分析输出 x 的稳定性，现对 (10.4.1) 式进行变分，得

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\delta F = -\frac{\mu n g}{\hbar c\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\delta v \\
&\frac{\partial}{\partial t}\delta v = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}(F\delta\Delta + \Delta\delta F) - \gamma_2\delta v \\
&\frac{\partial}{\partial t}\delta\Delta = -\sqrt{\gamma_1\gamma_2}(F\delta v + v\delta F) - \gamma_1\delta\Delta
\end{aligned}
\tag{10.4.8}
$$

设

$$
\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \lambda, \quad \frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow ik_n, \quad k_n = \frac{2\pi n}{L+l} \tag{10.4.9}
$$

式中， $L+l$ 为环形腔的周长. 将 (10.4.9) 式代入 (10.4.8) 式便得

$$
\delta v = \frac{\begin{vmatrix} \sqrt{\gamma_1\gamma_2}\Delta\delta F & -\sqrt{\gamma_1\gamma_2}F \\ -\sqrt{\gamma_1\gamma_2}v\delta F & \lambda+\gamma_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \lambda+\gamma_2 & -\sqrt{\gamma_1\gamma_2}F \\ \sqrt{\gamma_1\gamma_2}F & \lambda+\gamma_1 \end{vmatrix}} = \frac{\lambda+\gamma_1-\gamma_1^{3/2}\gamma_2^{-1/2}F^2}{(\lambda+\gamma_1)(\lambda+\gamma_2)+\gamma_1\gamma_2F^2}\frac{\Delta_0\delta F}{1+F^2} \tag{10.4.10}
$$

将 (10.4.10) 式代入 (10.4.8) 式的第一式，并考虑到环形腔在 $z = L$ 处输出的边界条件 $\delta F|_{L^-} = R\delta F|_{L^+}$, 便得

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{n}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\delta F &= -\frac{\mu g}{\hbar c\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\delta v - T\delta(z-l)\delta F \\
&= -\left[\frac{\alpha\gamma_2(\lambda+\gamma_1-\gamma_1^{3/2}\gamma_2^{-1/2}F^2)}{(\lambda+\gamma_1)(\lambda+\gamma_2)+\gamma_1\gamma_2F^2}\frac{1}{1+F^2} + T\delta(z-l)\right]\delta F
\end{aligned}
\tag{10.4.11}
$$

若将输出损耗均布在整个环形腔内，则将 $T\delta(z-L)$ 写为 T/l, 又将 (10.4.10) 式应用于 (10.4.11) 式，于是得出

$$
ik_n + \frac{n\lambda}{c} + \frac{T}{l} + \frac{\alpha\gamma_2(\lambda+\gamma_1-\gamma_1^{3/2}\gamma_2^{-1/2}F^2)}{(\lambda+\gamma_1)(\lambda+\gamma_2)+\gamma_1\gamma_2F^2}\frac{1}{1+F^2} = 0 \tag{10.4.12}
$$

仍采用记号 $x = F$, $\alpha_n = k_n c/n$, $k = \dfrac{cT}{nl}$, $C = \dfrac{\alpha c}{2n}$, 则得

$$
(\lambda+k+i\alpha_n)[(\lambda+\gamma_1)(\lambda+\gamma_2)+\gamma_1\gamma_2x^2] + \frac{2C\gamma_2(\lambda+\gamma_1-\gamma_1^{3/2}\gamma_2^{-1/2}x^2)}{1+x^2} = 0 \tag{10.4.13}
$$

对 (10.4.13) 的不稳定性进行分析，得出不稳条件为 $C > 2(1+\sqrt{2})$[49].

由上面的讨论可看出，含吸收型介质的环行腔系统，其输出可能呈现出双稳态现象，但还没有呈现出分岔与混沌；由 $\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial \Delta}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial t}=0$ 的定态解，并非总是稳定的，也可能是不稳定的，主要决定于参数 C 的取值是否 $\geq 2(1+\sqrt{2})$.

10.4.2 含色散吸收介质的环形腔系统

仍从 (10.3.1) 式出发. 介质为吸收介质，但含有色散，为简单计可取 $\Delta_0=-1$, 又将变量换为 $\tau=t-\frac{nz}{c}$ 与 z,n 为介质的折射率，故有

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=-\gamma_2 u-\delta\omega v \tag{10.4.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \tau}&=-\gamma_2 v+\delta\omega u+\frac{2\mu\varepsilon}{\hbar}\Delta\\
\frac{\partial \Delta}{\partial \tau}&=-\gamma_1(\Delta+1)-\frac{2\mu\varepsilon}{\hbar}v\\
\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}&=\frac{N\pi\mu\omega_0}{nc}v,\qquad \varepsilon\frac{\partial \varphi}{\partial z}=\frac{N\pi\mu\omega_0}{nc}u
\end{aligned} \tag{10.4.15}$$

设弛豫 γ_2 足够大，以致 $\frac{\partial u}{\partial \tau}$, $\frac{\partial v}{\partial \tau}$ 可略去不计，于是有

$$u\simeq-\frac{\delta\omega}{\gamma_2}v,\qquad v\simeq\frac{\delta\omega}{\gamma_2}u+\frac{2\mu\varepsilon}{\gamma_2\hbar}\Delta \tag{10.4.16}$$

代入 (10.4.15) 第二式、第三式，得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta}{\partial \tau}&=-\gamma_1(\Delta+1)-\frac{4\gamma_2\mu^2/\hbar^2}{\delta\omega^2+\gamma_2^2}|E|^2\Delta\\
\frac{\partial E}{\partial z}&=\frac{\theta}{\delta\omega^2+\gamma_2^2}(\gamma_2+i\delta\omega)E\Delta
\end{aligned} \tag{10.4.17}$$

$$E=\varepsilon e^{-i\varphi},\qquad \theta=\frac{2\pi N\mu^2\omega_0}{\hbar nc} \tag{10.4.18}$$

积分 (10.4.17) 式，得

$$E(\tau+nz/c,z)=E(\tau,0)\exp\left[\frac{\theta}{\delta\omega^2+\gamma_2^2}(\gamma_2+i\delta\omega)\overline{W}(\tau,z)\right] \tag{10.4.19}$$

$$\frac{\partial \overline{W}(\tau,z)}{\partial \tau}=-\gamma_1[\overline{W}(\tau,z)+z]-\frac{1}{\pi N\hbar k}|E(\tau,0)|^2\times\left\{\exp\left[\frac{2r_2\theta}{\delta\omega^2+\gamma_2^2}\overline{W}(\tau,z)\right]-1\right\} \tag{10.4.20}$$

$$\overline{W}(\tau,z)=\int_0^z dz'\Delta(\tau+nz'/c,z') \tag{10.4.21}$$

腔的边界条件为

$$E(t,0)=\sqrt{T}E_I(t)+R\exp\left(ik(nl+L)\right)E(t-L/c,l) \tag{10.4.22}$$

输出为

$$E_T(t)=\sqrt{T}E(t,l) \tag{10.4.23}$$

参照 Ikeda[50] 换成无量纲变数

$$
\begin{aligned}
\phi(t) &= \frac{\overline{W}(t-\frac{nl+L}{c},L)}{2L} \\
\epsilon(t,z) &= \frac{\mu E(t,z)/\hbar}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2(1+\delta\omega^2/\gamma_2^2)}} \\
\epsilon_T(t) &= \frac{\mu}{\hbar}E_T(t-L/c)/\sqrt{\gamma_1\gamma_2(1+\delta\omega^2/\gamma_2^2)} \\
\epsilon_I(t) &= \frac{\mu}{\hbar}E_I(t)/\sqrt{\gamma_1\gamma_2(1+\delta\omega^2/\gamma_2^2)}
\end{aligned}
\tag{10.4.24}
$$

则边界条件 (10.4.22) 及 (10.4.19),(10.4.20) 式可写为

$$
\begin{aligned}
&\epsilon(t,0)=\sqrt{T}\epsilon_I(t)+R\epsilon(t-t_0,0)\exp(\alpha L\phi(t))\exp\left\{i[\alpha L\bar{\Delta}(\phi(t)+1/2)-\delta_0]\right\} \\
&\gamma^{-1}\frac{d\phi}{dt}=-[\phi(t)+1/2]-2|\epsilon(t-t_0,0)|^2\left\{\exp[2\alpha L\phi(t)]-1\right\}/(\alpha L)
\end{aligned}
\tag{10.4.25}
$$

式中

$$
\bar{\Delta}=\frac{\delta\omega}{\gamma_2},\qquad t_R=\frac{nl+L}{c} \tag{10.4.26}
$$

$$
\alpha=2\theta\frac{\gamma_2}{\delta\omega^2+\gamma_2^2},\qquad \delta_0=\frac{\alpha L\delta\omega}{2\gamma_2} \tag{10.4.27}
$$

α 为吸收系数.

若纵弛豫时间 $\gamma_1^{-1}\ll$ 绕环行腔一周的时间 $(nl+L)/c$, 则 (10.4.25) 式中的 $\dfrac{d\phi}{dx}\simeq 0$, 于是延时的微分方程可变为如下的迭代映象：

$$
\begin{aligned}
&\epsilon_m=\sqrt{T}\epsilon_I+R\epsilon_{m-1}\exp(\alpha L\phi_m)\exp[i(\alpha L\bar{\Delta}(\phi_m+1/2)-\delta_0] \\
&\phi_m+\frac{1}{2}=\frac{2}{\alpha L}|\epsilon_{m-1}|^2[1-\exp(\alpha L\phi_m)]
\end{aligned}
\tag{10.4.28}
$$

式中

$$
\epsilon_m=\epsilon(t_0+mt_R,0) \tag{10.4.29}
$$

Ikeda 用 (10.4.28) 式进行迭代，参数取为 $\alpha\bar{\Delta}L=6$, $\alpha L=4$, $\delta_0=0$, $R=0.95$. 当 $|E_I|$ 在某一范围取值时，发现透射场按倍周期分岔道路趋于混沌 [50].

现考虑远离共振吸收的二能级原子系统. 由于光吸收对反转粒子数的改变不大，ϕ 仍接近于初值 $-1/2$.(10.4.25) 式的吸收项因子 $e^{\alpha L\phi(t)}\simeq e^{-\alpha L/2}$, 但相位因子仍要准确计算. 令 $\psi(t)=\alpha L\bar{\Delta}(\phi(t)+1/2)$, 则 (10.4.25) 式可写为

$$
\gamma_1^{-1}\frac{d\psi}{dt}=-\psi(t)+|\varepsilon(t-t_R)|^2 \tag{10.4.30}
$$

式中

$$
\varepsilon(t-t_R)=\sqrt{2\bar{\Delta}}(1-e^{-\alpha L})^{1/2}\epsilon(t-t_R,0) \tag{10.4.31}
$$

同样 (10.4.25) 式第一式可写为

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(t)=A+B\varepsilon(t-t_R)e^{i(\psi(t)-\delta_0)} \\
&A=\sqrt{2T\bar{\Delta}(1-e^{-\alpha/L})}\epsilon_I\ ,\qquad B=Re^{-\alpha L/2}
\end{aligned}
\tag{10.4.32}
$$

(10.4.30),(10.4.32) 式也称为色散型双稳态系统方程. 若绕环行腔一周的时间 t_R 远大于原子的纵弛豫时 γ_1^{-1}, 即 $\gamma_1 t_R\gg 1$, 则方程 (10.4.30) 左端可略去，于是有 $\psi(t)\simeq|e(t-t_R)|^2$,

而 (10.4.32) 式可写为

$$e(t) = A + Be(t - t_R)\exp\{i[|e(t - t_R)|^2 - \delta_0]\} \tag{10.4.33}$$

写成迭代形式便是

$$\begin{aligned} e_m &= A + Be_{m-1}\exp\{i[|e_{m-1}|^2 - \delta_0]\} \\ e_m &= e(t_0 + mt_R) \end{aligned} \tag{10.4.34}$$

上式的不动点 $\bar{e}$ 需要用数值计算方法求得. 设 A 为实数, 则 $\bar{e}$ 的绝对值 $|\bar{e}|$ 由下面方程确定:

$$A = |\bar{e}|[1 + B^2 - 2B\cos(|\bar{e}|^2 - \delta_0)]^{1/2} \tag{10.4.35}$$

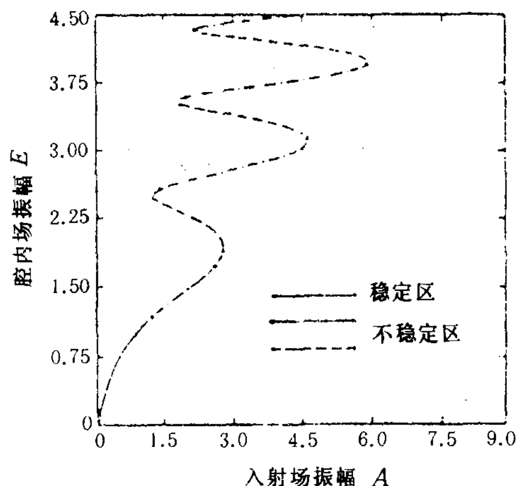


图 10.37 $|\bar{e}|$ 随 A 变化曲线

(参照 Carmichall 等 [51])

图 10.37 给出 $B = 0.5$, $\delta_0 = 0$, $|\bar{e}|$ 随 A 的变化曲线 [51]. 由 $A = 0 \sim 1.24775$ 解是稳定的; $A > 1.24775$ 将失稳, 并出现二分岔. 例如, $A = 1.5$,(10.4.34) 式迭代后的 2 分岔为 $|e_m| =$ 1.807953, 0.6226517, 1.807953, 0.6226517, $\cdots$. 当 $A \simeq 1.511525$ 将出现 4 分岔、$\cdots$. 为看出进入混沌后的奇异吸引子性质, 可将 5000 次迭代值 e_m 的实部 Re e_m 对虚部 Im e_m 作图 10.38[52], 参数取为 $B = 0.4$, $A = 4.39, \phi_0 = 0$, 将图 10.38 (a) 方框部分进行放大得图 10.38 (b). 已看出奇异吸引子自相似结构的特点.

实验上 Nakatsuba 等 [53] 采用具有非线性折射率 n_2 的单模光纤作为环形腔的色散媒质, 参数 B 取为 $0.4 \sim 0.5$,A 可通过提高输入光的功率而增大. 当输入功率在 $50 \sim 160$W, 便观察到倍周期分岔输出. 当输入功率达到 300W 时, 便观察到混沌输出, 实验结果与理论模型符合. 另外 Gibbs 等在“杂化”光学双稳系统观察到混沌现象 [54],Harrison 等在含铵分子环行腔中注入 CO_2 脉冲激光也观察到混沌 [55].

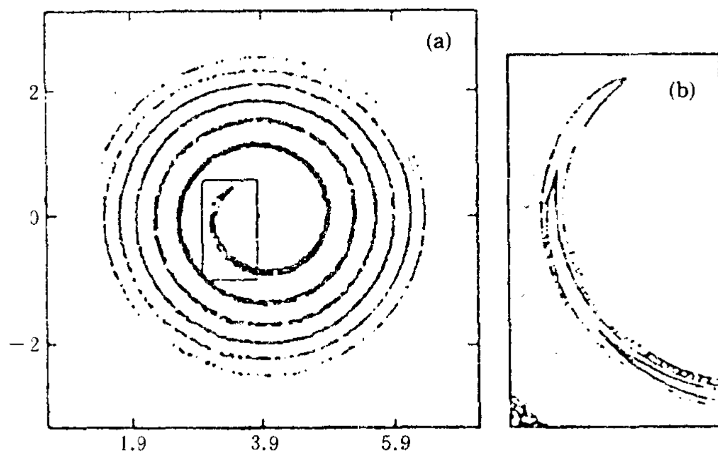


图 10.38 在 e 复平面内对 e_n 进行 5000 次迭代图

(b) 是 (a) 中矩形部分的扩大

(参照 Ikeda 等 [52])

10.4.3 增益介质的分岔与混沌 [56, 57]

不引进色散的话，纯吸收介质未表现出分岔与混沌．但增益介质却是有分岔与混沌的．参照 (10.4.21) 式，对于增益介质 $\overline{W}(t) > 0$, 考虑共振情形 $\delta\omega = 0$, 对于 (10.4.19) 式引进辐射损耗 Γ'; 对于 (10.4.20) 第二式因子 $\{e^{\alpha\overline{W}} - 1\} \simeq \alpha\overline{W}$, 而且对于增益介质，应将 (10.3.1) 式中的 Δ_0 取为 $\Delta_0 = 1$, 将导致饱和增益，于是有

$$\begin{aligned} &E(t + t_R) = E(t)e^{(\frac{\alpha}{2}\overline{W} - \Gamma')} \\ &\frac{d\overline{W}(t)}{dt} = -\gamma_1(\overline{W}(t) - 1) - \frac{4\mu^2}{\gamma_2\hbar^2}|E(t,0)|^2\overline{W}(t) \end{aligned} \tag{10.4.36}$$

式中右端第一项括号内的 1 即表示饱和增益．现采用规一化

$$\gamma_1 t \to t, \qquad \left(\frac{2\mu E(t,0)}{\hbar\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}\right)^2 = I(t) \tag{10.4.37}$$

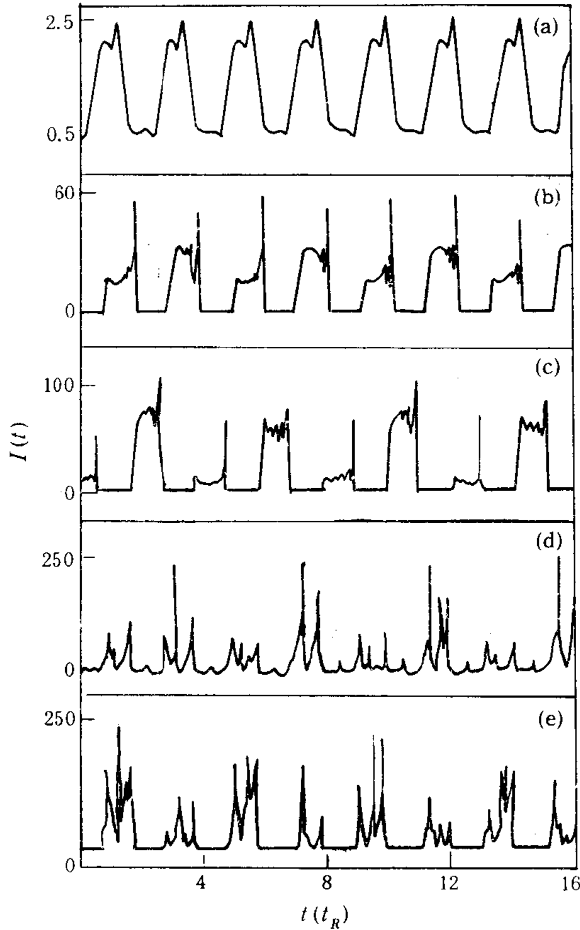


图 10.39 光场随 α 增加经历连续 2^n 分岔进入混沌态

(a) $\alpha = 5.3$, 二分岔解，周期 $T \simeq 2.2t_R$; (b) $\alpha = 13$, 四分岔解，周期 $T \simeq 4.2t_R$,$I(t)$ 波形下平台并不等高，约为 0.85, 0.62 交替出现；(c)$\alpha = 14.6$, 八分岔解，周期 $T \simeq 8.4t_R$, $I(t)$ 的下平台高约为 0.68, 1.6, 0.75, 1.3 交替出现；(d), (e) $\alpha = 16.5$, 混沌解，$I(t)$ 初值略有差别 (分别为 0.01, 0.012), 但波形差别很大

(取自谭维翰、陆伟平 [56])

并令 $2\Gamma' = \Gamma$, 于是有

$$I(t+t_R) = I(t)e^{(\alpha\overline{W}(t)-\Gamma)}$$
$$\frac{d\overline{W}(t)}{dt} = 1 - \overline{W}(t) - I(t)\overline{W}(t) \tag{10.4.38}$$

取稳态解 $\frac{d\overline{W}}{dt} \simeq 0$, $\overline{W}(t) = \frac{1}{1+I(t)}$, 则有

$$I(t+t_R) = I(t)\exp\left(\frac{\alpha}{1+I(t)} - \Gamma\right) \tag{10.4.39}$$

迭代式为

$$I_{n+1} = I_n \exp\left(\frac{\alpha}{1+I_n} - \Gamma\right) \tag{10.4.40}$$

根据 $|(\delta I_{n+1}/\delta I_n)_{I_{n+1}=I_n}| > 1$, 得出不稳定性条件

$$|1 - \Gamma(1-\Gamma/\alpha)| > 1 \tag{10.4.41}$$

图 10.39 为取定 $\Gamma = 4$, $t_R = 10$ 对方程 (10.4.38) 进行数值计算的结果. 当 α 超过 8, 解由稳区过渡到不稳区. 随 α 进一步增加, 经历连续的 2^n 分岔后在 $\alpha = 14.8$ 附近进入混沌.

10.5 含非线性介质 Fabry-Perot 腔的分岔与混沌 [58]

10.5.1 含非线性介质 Fabry-Perot 腔

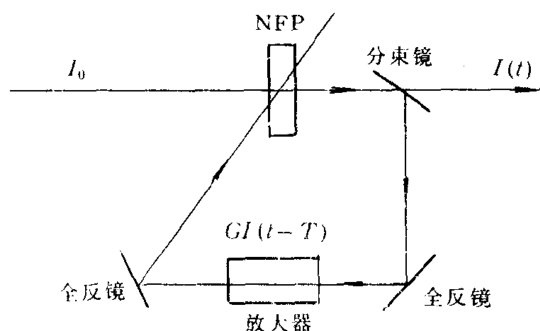


图 10.40 观察 NFP 腔混沌行为的实验装置示意图

(取自谭维翰、刘仁红 [58])

上面已经讨论了含二能级原子非线性介质的环行腔的不稳定性、分岔、混沌行为，得出环行腔的透射输出经历 2^n 周期分岔趋向混沌. 这些已经在实验及计算机模拟得到证实. 文献 [59] 对含非线性介质 Fabry - Perot(简称 NFP 腔) 的双稳态性质进行了研究，但没有考虑改变介质的响应时间对 NFP 腔分岔与混沌的影响. 显然 NFP 腔要比环行腔复杂，经仔细研究，就会发现 NFP 腔向混沌过渡有一些区别于环行腔的新特点. 环行腔一般经历 2^n 周期分岔趋向混沌；而 NFP 则主要通过阵发混沌方式向混沌过渡.

如图 10.40 所示，入射光 I_0 经 NFP 腔后的透射光强 $I(t)$ 为

$$I(t) = \frac{I_0}{1+F\sin^2(\phi(t))} \tag{10.5.1}$$

$I(t)$ 经过分束镜分出一部分，经放大、延迟后斜入到NFP 腔，延迟时间为 T. 设 $GI(t-T) \gg I_0$. 又设非线性介质对光强的响应时间为 T_c 则参照 (10.4.30) 式可得 [50,54,59,60]

$$\begin{aligned} T_c\frac{d\phi(t)}{dt} + \phi(t) &= \alpha'(GI(t-T)+I_0) \\ &\simeq \alpha' GI(t-T) \end{aligned} \tag{10.5.2}$$

上式已将非线性介质产生的相位 $\phi(t)$ 与光强 $I(t-T)$ 联系起来，若 $T \gg T_c$, 则 $T_c\dfrac{d\phi}{dt}$ 可略去，上式可写为 $\phi(t) \simeq \alpha' GI(t-T)$, 代入 (10.5.1) 式，得

$$I(t) = \frac{I_0}{1 + F\sin^2(\alpha' GI(t-T))} \tag{10.5.3}$$

采用记号

$$\begin{aligned} i_{n+1} &= \frac{I(t)}{I_0/F}, \qquad i_n = \frac{I(t-T)}{I_0/F} \\ \beta &= \frac{1}{F}, \qquad \alpha = \alpha' G\frac{I_0}{F} \end{aligned} \tag{10.5.4}$$

则 (10.5.3) 式为

$$i_{n+1} = \frac{1}{\beta + \sin^2 \alpha i_n} \tag{10.5.5}$$

该式给出了透射光强 i_{n+1} 的迭代式，通过迭代，我们计算出图 10.41 所示的透过曲线.

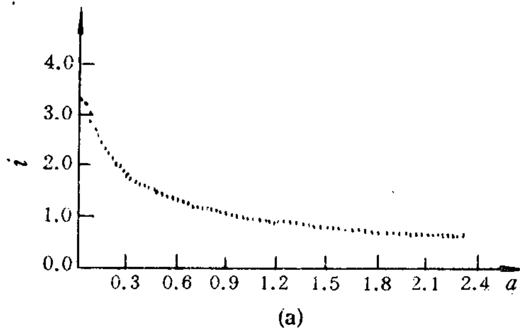
由图 10.41 (a) 看出，当 $\alpha < 0.229(\alpha i = 0.517)$ 及 $0.909(\alpha i = 1.001) < \alpha < 2.082(\alpha i = 1.884)$ 时，输出是稳定的；当 $0.229 < \alpha < 0.909$ 时，发生分岔，当 $\alpha > 2.082$ 时，便发生混沌. 这样一个由分岔至混沌的方式与环行腔中的经历 2^n 周期分岔至混沌很不一样. 当改变参数 α 使之逐渐增大，输出将经过由稳态 → 分岔 → 稳态 → 混沌. 从图 10.41 还能看出，β 增大时，分岔区域缩小以致消失. 分岔区消失时的 β 临界值为 0.2858, 这可由方程 (10.5.5) 得出. 在分岔点 B_1, B_2 附近 $\sin(2\alpha i) = \sin 2x > 0$, 由迭代方程 (10.5.5) 得

$$\left|\frac{\delta i_{n+1}}{\delta i_n}\right| = \frac{\alpha \sin 2x}{(\beta + \sin^2 x)^2} = \frac{x\sin 2x}{\beta + \sin^2 x} = 1$$

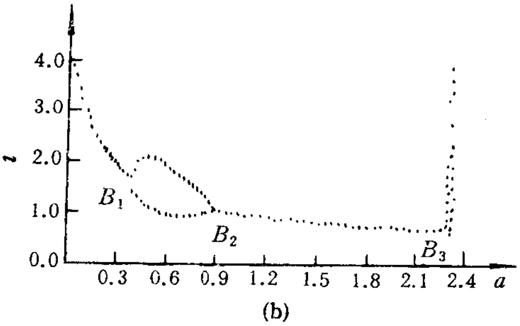
$$x\sin 2x - \sin^2 x = \beta \tag{10.5.6}$$

β 给定后，解方程 (10.5.6) 得出分岔点 $x = \alpha i$ 的值；反过来，β 也可看成 x 的函数. 在临界点处，$\dfrac{d\beta}{dx} = 0$, 于是由 (10.5.6) 式得

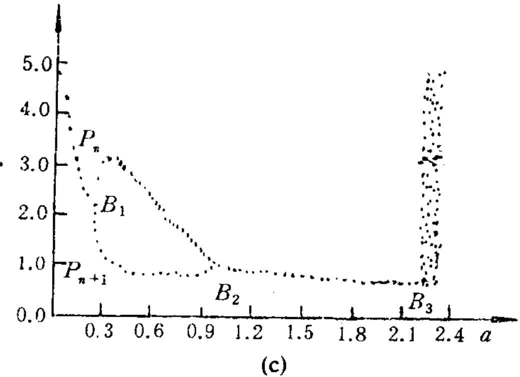
$$\begin{aligned} &2x\cos 2x = 0, \qquad x = \frac{\pi}{4} \\ &\beta = \frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{2} - \sin^2\frac{\pi}{4} = 0.2858 \end{aligned} \tag{10.5.7}$$



(a)



(b)



(c)

图 10.41 透射光强 i_{n+1} 随 α 变化的透过曲线
(a) $\beta = 0.2$; (b) $\beta = 0.25$; (c) $\beta = 0.3$
(取自 [58])

在分岔点 $B_1(B_2)$ 附近的 P_n, P_{n+1} 点，经过计算可证明

$$\frac{\delta i_{n+1}}{\delta i_n}=\frac{-\alpha\sin(2\alpha i_n)}{(\beta+\sin^2(\alpha i_n))^2}=-1,\qquad \delta i_{n+1}=-\delta i_n=\epsilon$$

于是

$$i_{n+1}=i+\epsilon,\qquad i_n=i-\epsilon \tag{10.5.8}$$

而

$$i_{n+1}=\frac{1}{\beta+\sin^2(\alpha i_n)}=\frac{1}{\beta+\sin^2\left(\dfrac{\alpha}{\beta+\sin^2\alpha i_{n+1}}\right)^2} \tag{10.5.9}$$

由 (10.5.8),(10.5.9) 式得

$$\frac{\delta i_{n+1}}{\delta\alpha}=\frac{i\cos(2\alpha i)}{\sin^2(2\alpha i)+2\alpha^2 i^2}\frac{1}{\alpha\epsilon} \tag{10.5.10}$$

故当 $\epsilon\to 0$ 时，$\dfrac{\delta i_{n+1}}{\delta\alpha}\to\infty$,$P_n$，$P_{n+1}$ 沿垂直于 α 轴的切线方向趋近 $B_1(B_2)$.

10.5.2 当 $T_c\dfrac{d\phi}{dt}$ 不略去时的相位 ϕ 与透过强度 I 的微分差分方程解

当 (10.5.2) 式的 $T_c\dfrac{d\phi(t)}{dt}$ 不能略去时，将此方程用 T 规一化，即 $\dfrac{t}{T}\to t$, 并令 $\gamma=\dfrac{T}{T_c}$, 则 (10.5.2) 式为

$$\frac{d\phi(t)}{dt}+\gamma\phi(t)=\gamma\alpha' GI(t-1) \tag{10.5.11}$$

方程的解为

$$\phi(t)=e^{-\gamma t}\int_0^t e^{\gamma t'}\gamma\alpha' GI(t'-1)dt' \tag{10.5.12}$$

将 (10.5.12) 式代入 (10.5.1) 式，并经变量变换，得

$$I(t)=\frac{1}{\beta+\sin^2[\exp(-\gamma t)\displaystyle\int_0^t\exp(\gamma t')\gamma\alpha I(t'-1)dt']} \tag{10.5.13}$$

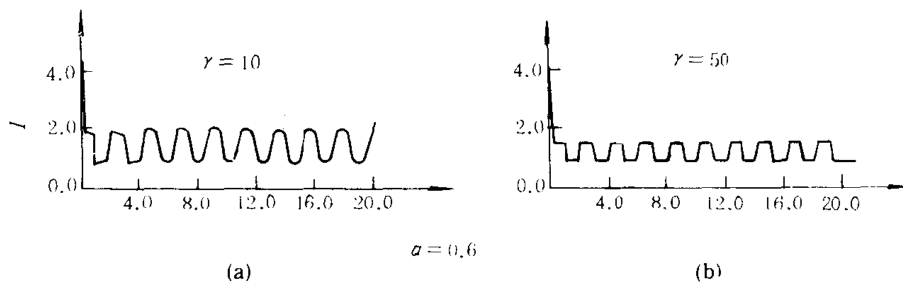


图 10.42 透过光强 $I(t)$ 在不同 γ 时随时间变化的关系曲线 (α=0.6)

(取自 [58])

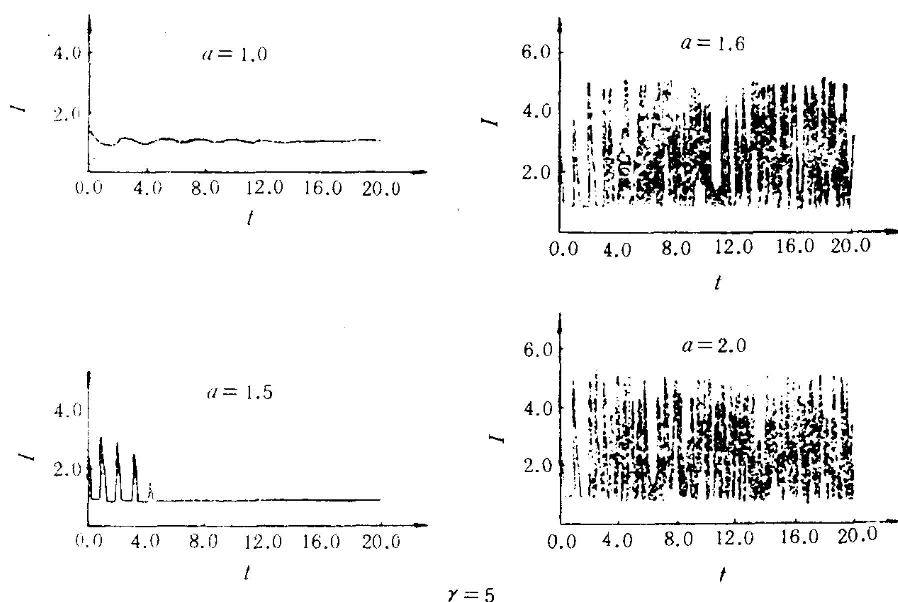


图 10.43 透过光强 $I(t)$ 对不同 α 时随时间变化的关系曲线 ($\gamma=5$)

(取自 [58])

对该式进行数值计算，研究输出光强与时间的关系，结果如图 10.42,10.43 所示．从图 10.42 可以看出，在 $\alpha=0.6$, 透射输出光强表现为双稳性质，并随 γ 值的增大，即响应时间 T_c 的减小，激光输出波形由正弦波过渡到方波．这与上节 $\alpha=0.6$ 时，输出为二分岔是一致的．当 $\gamma=10$, 50 时，正弦波周期分别为 1.05, 1.02, 即向 $T=1$ 趋近．从图 10.43 可见，随着 α 值的增大，输出光强由二分岔进入稳态，并由稳态直接进入混沌，与图 10.41 由二分岔进入稳态的临界点 B_2 的位置 $\alpha=0.91$ 相比，几乎没有很大的改变．图 10.43 中 $\alpha=1$, 输出是稳定的，但由稳态进入混沌状态的临界点已由 $B_3=2.08$ 前移到 $\alpha=1.5\sim1.6$; 当 $\alpha=1.5$ 为稳定输出，但 $\alpha=1.6$ 便是混沌输出．

10.6 NFP 腔 $B_3\sim B_5$ 点邻近混沌性质分析 [61]

上节研究了非线性 F.P. 腔的分岔与混沌现象，且指明在 B_3 点的左邻是稳定的，在 B_3 点的右邻是不稳定的混沌区，由稳区至混沌未经历 2^n 周期分岔的过渡．在这一节我们将进一步证明在 B_3 点的右邻是不稳定的，而且不可能存在倍周期分岔； B_3 点右邻的混沌是属于切分岔的阵发混沌；最后讨论 $B_3\sim B_5$ 为亚稳区， B_5 点为亚稳混沌区，即只在一较小范围内存在的混沌区．

10.6.1 不具有倍周期分岔的抛物线近似

现从前节的非线性 F.P. 腔迭代方程

$$i_{n+1}=\frac{1}{\beta+\sin^2\alpha i_n} \tag{10.6.1}$$

或

$$x_{n+1}=\alpha i_{n+1}=\frac{\alpha}{\beta+\sin^2 x_n} \tag{10.6.2}$$

出发，在分岔点 (B_1, B_2, B_3) 附近满足

$$\left|\frac{\delta i_{n+1}}{\delta i_n}\right| = \left|\frac{\delta x_{n+1}}{\delta x_n}\right| = \frac{x\sin 2x}{\beta+\sin^2 x} = 1 \tag{10.6.3}$$

当 $\beta = 0.2$ 时， B_1, B_2 点对应的 $\alpha_0(x_0)$ 值分别为 0.229(0.517), 0.909(1.001).B_1 左邻为稳态，右邻为二分岔； B_2 左邻为二分岔，右邻为稳态． B_3 点的 $\alpha_0 = 2.08195087$, $x_0 = 1.8841413$.B_3 点左邻是稳定的，其右邻是不稳的．若有两分岔，则按前面 (10.2 节 10.2.3) 的方法，应有抛物线近似．实际计算证明了在 B_3 的右邻不存在抛物线近似 [61].

10.6.2 B_3 右邻的迭代输出

按 Liapunov 指数 λ 的定义

$$\lambda = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\ln f'(i_j) \tag{10.6.4}$$

式中， $f'(i_j)$ 为迭代式 $i_{j+1} = f(i_j)$ 关于 i_j 的导数，按 (10.6.1) 式的 $f(i_j)$, 得

$$f'(i_j) = \frac{-\alpha\sin(2\alpha i_j)}{[\beta+\sin^2(\alpha i_j)]^2}$$

Liapunov 指数理论表明，如果存在稳定的 n 周期分岔，Liapunov 指数 λ 应是负的，$\lambda < 0$ ；如果 $\lambda > 0$, 就意味着不存在 n 周期分岔，预示着混沌的到来．现用此方法检验 B_3 点右邻的状况．取 $\alpha = 2.08196$, $i_0 = 1$, 迭代 $N = 10002432$ 次，由 (10.6.4) 式计算 λ, 作 λ 与 $\sqrt{N}$ 的变化曲线如图 10.44 所示． λ 最后趋近于 0.0278. 这表明虽然我们取的 α 非常靠近 B_3 点，但给出的 Lyapunov 指数已为正，表明系统已进入混沌状态．

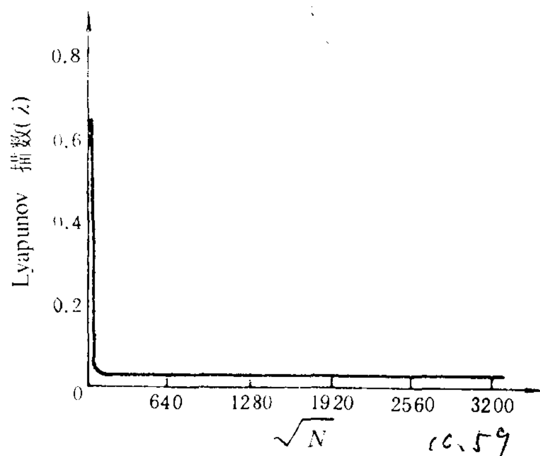


图 10.44 Lyapunov 指数 λ 随迭代次数 N 的变化曲线
(取自 Renhong Liu 等 [61])

图 10.45 给出迭代 $N = 10002432$ 次取最后 4096 个输出 i_{N+1} 随 N 变化的曲线及快速 Fourier 谱 F_K

$$F_K = \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-i\frac{2\pi}{N}jK}, \qquad N = 4096 \tag{10.6.5}$$

图 10.45(a) 中的迭代输出曲线表现出几个峰，其高度与结构及它的微细结构均表现出

复杂的无规性. 图 10.45 (b) 的 Fourier 谱, 表现的也不规则, 且很宽.

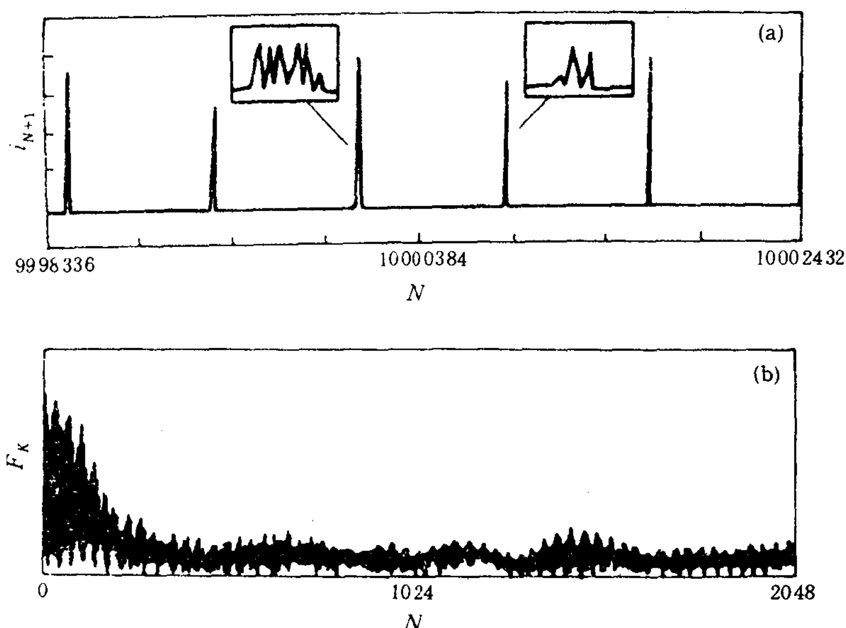


图 10.45 (a) 迭代 $N = 10002432$ 次, 最后 4096 个输出 i_{N+1} 变化曲线; (b)Fourier 谱曲线 F_K (取自 [61])

10.6.3 B_3 右邻的切分岔混沌性质

为了更好地了解 B_3 右邻的混沌性质, 对各种不同的 α 值作曲线 $y = \dfrac{\alpha}{\beta + \sin^2 x}$, 如图 10.46. 这些曲线与直线 $y = x$ 的交点便是 B_1, B_2, B_3, B_4 等分岔点. 在 B_1, B_2 点 $\dfrac{dy}{dx} = -1$; 在 B_3, $B_4(\alpha = 0.6251)$ 点 $\dfrac{dy}{dx} = 1$, 亦即曲线与直线 $y = x$ 正交于 B_1, B_2 点, 相切于 B_3, B_4 点. 故对 $B_3(\alpha = 2.08195087)$ 点, 当 α 稍大于 2.08195087, 曲线与直线分离, 形成很窄的间隙 (见图 10.46 左上角), 进入阵发混沌 [4]. 对于 B_4 点, 情况恰好相反, 当 α 增大时, 便进入稳区 (见图 10.46 右上角).

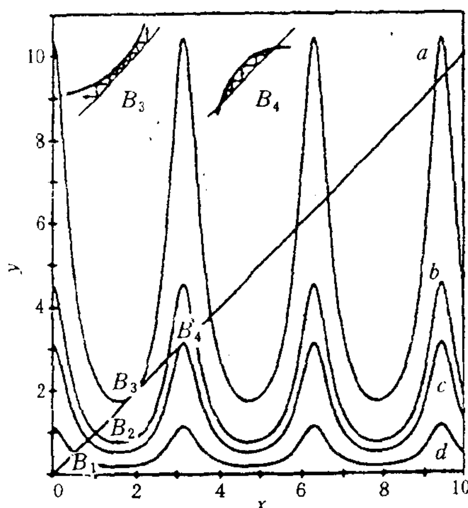


图 10.46 α 取不同值时 $y = \dfrac{\alpha}{\beta + \sin^2 x}$ 的曲线
(a) $\alpha = 2.08195$;(b) $\alpha = 0.909$;
(c) $\alpha = 0.6251$;(d) $\alpha = 0.517$
(取自 [61])

图 10.47 (a) 给出迭代输出 x_{n+1} 随 α 的变化曲线; 图 (b) 给出相应的 λ 随 α 的变化关系. 很明显, 在稳态区和二分岔区, λ 为负值; 当 λ 为正时, 系统便进入混沌区.

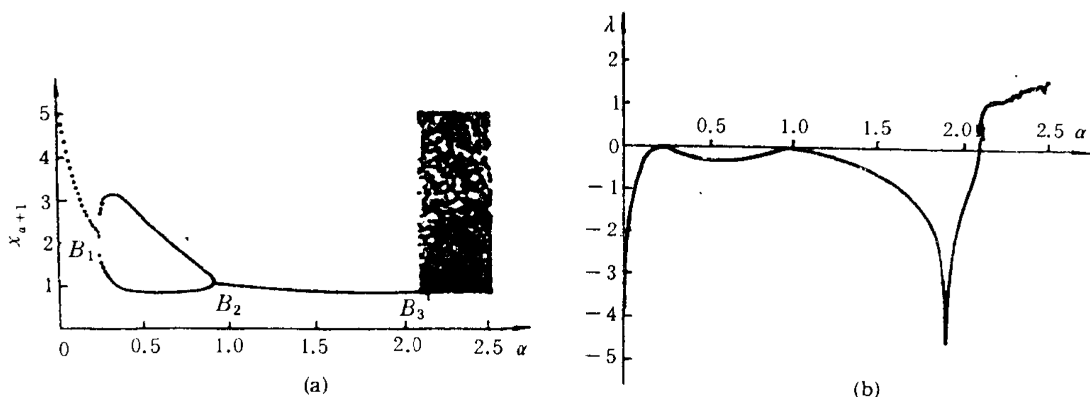


图 10.47 (a) 迭代输出 x_{n+1} 随 α 变化曲线；(b)Lyapunov 指数 λ 随 α 的变化曲线

(取自 [61])

10.6.4 $B_4 \sim B_5$ 亚稳区，B_5 后的亚稳混沌区

$B_4(x = 3.1092, \dfrac{dy}{dx} = 1) \sim B_5(x = 3.173, \dfrac{dy}{dx} = -1)$ 为亚稳区，B_5 点后又进入二分岔，并经过倍周期分岔发展为混沌，但也带有亚稳性质．这里的亚稳是指若迭代初值偏离稳态值稍大时，迭代结果便跳到图 10.47 (a) 所示 $B_1 \sim B_2$ 的二分岔区．由图 10.46 可见，B_4, B_5 所对应的 $x_4 = 3.1092$, $x_5 = 3.173(\alpha = 0.6377)$ 值均在二分岔区 $B_1 \sim B_2$ 之上．例如 x 为 $B_4 \sim B_5$ 中的一点，若初值取为 $x_0 = x + \delta$, 当 δ 稍大时，则迭代结果 $x_1 = \dfrac{\alpha}{\beta + \sin^2 x_0}$, $x_{n+1} = \dfrac{\alpha}{\beta + \sin^2 x_n}$ 便回到 $B_1 \sim B_2$ 二分岔区．只有当 δ 很小，才进入 $B_4 \sim B_5$ 的稳态区，迭代结果收敛到 $x = \dfrac{\alpha}{\beta + \sin^2 x}$, 故称之为亚稳．同样，$B_5$ 点右邻的倍周期分岔与混沌，也只有在迭代初值 $x_0 = x + \delta$ 的 δ 较小时才会表现出来；当 δ 大时，便跳到二分岔 $B_1 \sim B_2$ 区，并不表现出倍周期分岔与混沌．

图 10.48 给出 $x = 2.9 \sim 3.5$, 对应的 $\alpha = x(\beta + \sin^2 x)$ 为 $0.746 \sim 1.131$, 迭代初值 $x_0 = x - \delta$, 取 $\beta = 0.2, \delta = 0.001$ 的迭代结果．可以看出开始 a 点 $(\alpha = 0.746)$ 为二分岔点，当 α 变化到 $\alpha = 0.625(B_4$ 点) 时跳到亚稳区，按亚稳态变化到 $\alpha = 0.6377(B_5$ 点), 再由倍周期分岔进入混沌．当 α 变化到 $0.6551(x = 3.207)$, 即图中 b 点处时，又跳回到二分岔区，再进入单稳．若 δ 取较大 (0.1), 迭代结果就不出现稳倍周期分岔与混沌区，而是由二分岔进入单稳．

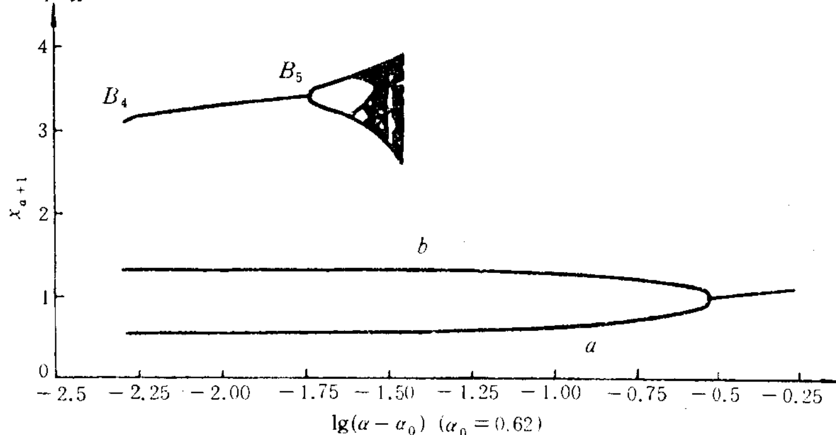


图 10.48 迭代输出 x_{n+1} 随 α 变化的曲线

(图中 $B_4 \sim B_5 \sim$ 混沌的纵向坐标放大了五倍)

(取自 [61])

10.7 光学传输横向效应

对时间、空间、时空现象的分析与研究乃非线性动力学的中心问题．在非线性光学领域中，近年对非线性光学的分岔、混沌现象已有较多研究，且在实验上已观察到远红外激光中的 Lorenz 混沌 [41, 43]，还观察到双稳态环形激光腔的混沌现象 [53~55]．但这些均属于时间方面的．因为我们的模型中，一般地均采用平面波近似，光场在垂直于传播方向的平面内是均匀分布的．这就使得描述光与物质相互作用的方程大为简化．因而有关空间横向模式的形成，对称性的自发破缺等现象也从讨论中消失了．直到最近才逐渐有文章 [62~68] 论及光学模式的横向弛豫以及时空混沌现象．这比单一时间混沌现象要复杂得多．首先需要推广 Maxwell - Bloch 方程，使之包括有限光束截面引起的衍射损耗，在传播过程中波面曲率的变化以及模式的跳变等．

10.7.1 模式对称的自发破缺

参照 (10.4.17) 式，并定义无量纲变量

$$\epsilon = \frac{2\mu E}{\hbar}\frac{1}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}, \qquad \delta = \frac{\delta\omega}{\gamma_2} \tag{10.7.1}$$

则放大介质的 Maxwell - Bloch 方程可写为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Delta}{\partial\tau} = -\gamma_1(\Delta-\Delta_0) - \gamma_1|\epsilon|^2\Delta/(1+\delta^2)\\
&\frac{\partial\epsilon}{\partial z} = \frac{\alpha}{1+\delta^2}(1+i\delta)\epsilon\Delta, \qquad \alpha = \frac{2\pi N\mu^2 k}{\hbar\gamma_2}
\end{aligned} \tag{10.7.2}$$

注意到沿 z 方向传播的波可表示为慢变振幅 E 与平面波 $e^{ikz-i\omega t}$ 之积，即 $E(x,y,z,t)e^{ikz-i\omega t}$，代入波动方程中，并略去 $\dfrac{\partial^2 E}{\partial z^2}$，$\dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$，则得

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)Ee^{ikz-i\omega t} \simeq \left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial}{\partial z} + 2i\omega\frac{\partial}{\partial t} - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)E\right\}e^{ikz-i\omega t}$$

故考虑到横向效应后，(10.3.1) 式的左边应写为

$$\left[-\frac{i}{2k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} + i\frac{\omega - kc}{c}\right]E$$

同样 (10.7.2) 式推广到包括横向效应后应为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\Delta}{\partial\tau} = -\gamma_1(\Delta-\Delta_0) - \gamma_1|\epsilon|^2\Delta/(1+\delta^2)\\
&\left[-\frac{i}{2k}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\right]\epsilon = \frac{\alpha}{1+\delta^2}(1+i\delta)\epsilon\Delta - \frac{\nu_c}{c}\epsilon + i\frac{kc-\omega}{c}\epsilon
\end{aligned} \tag{10.7.3}$$

(10.7.3) 式即推广了的 Maxwell - Bloch 方程．新增的项，就是由衍射而引起的扩散项．除了虚数 i 外，(10.7.3) 式就是相变理论中的 Ginzburg - Landau 方程 [62].(10.7.3) 式中

$-\frac{\nu_c}{c}\epsilon$ 为腔的损耗，$i\frac{kc-\omega}{c}$ 为失谐. 如何求解推广的 Maxwell - Bloch 方程 (10.7.3) 是重要的. 最简单的是先求 Δ 的定态解 $\frac{\partial\Delta}{\partial\tau}\simeq 0$:

$$\Delta=\frac{\Delta_0}{1+|\epsilon|^2/(1+\delta^2)} \tag{10.7.4}$$

将 (10.7.4) 式代入 (10.7.3) 式的第二式消去 Δ, 并将 ϵ 用空腔的本征模式 $A_{pm}(x,y,z)$ 展开为 [63]

$$\epsilon=\sum f_{pm}^{(i)}(z,\tau)A_{pm}^{(i)}(x,y,z) \tag{10.7.5}$$

$A_{pm}^{(i)}$ 满足

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+2ik\frac{\partial}{\partial z}\right)A_{pm}^{(i)}(x,y,z)=0\\&\int\int A_{pm}^{(i)}(x,y,z)A_{p'm'}^{(i')}(x,y,z)\frac{dxdy}{\sigma}=\delta_{pp'}\delta_{mm'}\delta_{ii'}\end{aligned} \tag{10.7.6}$$

又考虑到激光频率 ω 的牵引关系

$$\omega-\omega_c=(\omega_0-\omega_c)\frac{\nu_c}{\gamma_2+\nu_c},\qquad \omega_c=kc \tag{10.7.7}$$

故有

$$\omega_c-\omega=\frac{-\nu_c}{\gamma_2}(\omega_0-\omega)=-\frac{\nu_c}{\gamma_2}\delta\omega=-\nu_c\delta \tag{10.7.8}$$

(10.7.3) 式的第二式可写为

$$\frac{\partial f_{pm}^{(i)}}{\partial z}=-\frac{(1+i\delta)}{c}\left[\nu_c f_{pm}^{(i)}-\alpha c\sum_{p'm'i'}f_{p'm'}^{(i')}\int\frac{A_{pm}^{(i)}A_{p'm'}^{(i')}\Delta_0}{1+\delta^2+|\epsilon|^2}\frac{dxdy}{\sigma}\right] \tag{10.7.9}$$

对于圆柱形对称腔, 可取 $\sigma=\frac{\lambda\Lambda}{\pi}$, Λ 为腔长, 又取规一化圆柱坐标, $\rho=(\frac{\pi}{\lambda\Lambda})^{1/2}r$, $\eta=\frac{z}{\Lambda}$,φ. 文献 [63] 给出 $A_{pm}^{(i)}(\rho,\ \varphi,\ \eta)$ 如下解析解：

$$A_{pm}^{(i)}(\rho,\ \varphi,\ \eta)=B_m^{(i)}(\varphi)C_{pm}(\rho,\ \eta)\exp(i\theta_{pm}(\rho,\ \eta))$$

$$B_m^{(i)}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & m=0, i=1,\ 2\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin m\varphi, & m>0,\quad i=1\\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos m\varphi, & m>0,\quad i=2\end{cases} \tag{10.7.10}$$

$$C_{pm}(\rho,\ \eta)=\frac{2}{v(\eta)}\left[\frac{2\rho^2}{v^2(\eta)}\right]^{m/2}\left[\frac{p!}{(p+m)!}\right]^{1/2}L_p^m\left(\frac{2\rho^2}{v^2(\eta)}\right)\exp\left[\frac{-\rho^2}{v^2(\eta)}\right] \tag{10.7.11}$$

$$\theta_{pm}(\rho,\ \eta)=\frac{\rho^2}{u(\eta)}-(2p+m+1)\tan^{-1}\frac{\eta}{\eta_1},\qquad p=0,\ 1,\ 2,\cdots;\quad m=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

$$\begin{aligned}&v(\eta)=\sqrt{\eta_1}(1+(\eta/\eta_1)^2)^{1/2},\qquad u(\eta)=\frac{1}{\eta}(\eta_1^2+\eta^2)\\&\eta_1=\frac{1}{2}\left[\frac{(\rho_0-f)(\rho_0+f^2-f)}{\rho_0+f-1}\right]^{1/2},\qquad f=\frac{L}{\Lambda},\qquad \rho_0=\frac{R}{\Lambda}\end{aligned} \tag{10.7.12}$$

参见图 10.49,$\sqrt{\eta_1}$ 为 (1) 区最小模斑半径，R 为镜面曲率半径. 而 (2) 区的最小模斑半径为 $\sqrt{\eta_2}$, 并有

$$\eta_2 = \frac{1}{\rho_0^2\eta_1}\left[\eta_1^2(1-f-\rho_0)^2 + \frac{1}{4}(\rho_0 + f^2 - f)^2\right] \tag{10.7.13}$$

环行腔的共振频率 ω_{npm} 为

$$\omega_{npm} = \frac{2\pi c}{\Lambda}n + \frac{2c}{\Lambda}(2p+m+1)\left[\tan^{-1}\left(\frac{1-f}{2\eta_2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{f}{2\eta_1}\right)\right] \tag{10.7.14}$$

当 $\rho_0 = f = 1/2$, 即共焦腔情形，$\eta_1 = \eta_2 = 1/4$, 有

$$\omega_{npm} = \frac{2\pi c}{\Lambda}[2(n+p)+m+1] \tag{10.7.15}$$

图 10.49 环行腔结构 (参照 Lugiato 等 [63])

对于多模情形，求解方程 (10.7.5),(10.7.9) 显然仍是很困难的. 但这两个方程毕竟提供了进行数值计算的依据. 而且依据 (10.7.9) 式还容易得出单模振荡的阈值. 设激活媒质增益沿光轴尺度为 ψ 的区域分布，当远离光轴时增益按 Gauss 波形下降，故可令

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha c}{\nu_c}\Delta_0 = 2C\exp(-2\rho^2/\psi^2) \\ &\psi = \frac{2r_p}{\sqrt{\eta_1}} \end{aligned} \tag{10.7.16}$$

由 (10.7.9),(10.7.10),(10.7.16) 式得单纵模振荡的稳态解为

$$1 = 2C\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{A_i^2(\rho,\varphi-\varphi_0)\exp(-2\rho^2/\psi^2)}{1+A_i^2(\rho,\varphi-\varphi_0)|f_i|^2} \tag{10.7.17}$$

式中，A_i 为 $A_{pm}^{(i)}$ 的简写. 令 (10.7.17) 式中的 $|f_i| \to 0$, 便得出激发 $A_{pm}^{(i)}$ 的阈值 $(2C)_{\text{thr}}$.

由 (10.7.15) 式看出，当纵模指标 n 给定后，腔频 ω_{npm} 就有赖于横模指标 $2p+m$. 现分为几种情形加以讨论.

(1) $2p+m=1$ 情形. 有两重简并的非对称解

$$\begin{aligned} A_{01}^1 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2\rho^2)^{1/2}e^{-\rho^2}\cos\varphi \\ A_{01}^2 &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2\rho^2)^{1/2}e^{-\rho^2}\sin\varphi \end{aligned} \tag{10.7.18}$$

将 A_{01}^1 或 A_{01}^2 代入 (10.7.17) 式中的 A_i, 并令 $|f_i| \to 0$, 便得定态解与阈值分别为

$$1 = (2C)^A \int_0^{\infty} 4\rho \frac{2\rho e^{-2\rho^2}e^{-2\rho^2/\psi^2}}{1+2\rho^2 e^{-2\rho^2}|f_i|^2} d\rho \tag{10.7.19}$$

$$(2C)_{\text{thr}}^{A} = \left(\frac{\psi^2+1}{\psi^2}\right)^2 \tag{10.7.20}$$

A_{01}^1，A_{01}^2 这一对定态解，可证明是稳定的，也可看成是双稳态.

(2) $2p+m=2$ 情形. 解是三重简并的，其中一个为对称解 (用 " s " 标志):

$$A_{10} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-2\rho^2)e^{-\rho^2} \tag{10.7.21}$$

另两个为非对称解 (用 " A " 来标志):

$$A_{021} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}2\rho^2 e^{-\rho^2}\cos 2\varphi, \quad A_{022} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}2\rho^2 e^{-\rho^2}\sin 2\varphi \tag{10.7.22}$$

对称解及非对称解的阈值分别为

$$(2C)_{\text{thr}}^{s} = \frac{(1+\psi^2)^3}{\psi^2(1+\psi^4)}, \qquad (2C)_{\text{thr}}^{A} = \frac{(1+\psi^2)^3}{\psi^6} \tag{10.7.23}$$

对称解阈值 $(2C)_{\text{thr}}^{s}$ 明显比非对称解阈值 $(2C)_{\text{thr}}^{A}$ 低，因

$$\frac{(2C)_{\text{th}}^{s}}{(2C)_{\text{th}}^{A}} = \frac{\psi^4}{1+\psi^4}$$

当 ψ 增大后，这个比值趋近于 1. 而且当满足条件

$$1 = (2C)^1 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{A_{02}^2(\rho,\varphi)e^{-2\rho^2/\psi^2}}{1+A_{10}^2(\rho,\varphi)|f_{10}|^2} \tag{10.7.24}$$

对称解 A_{10} 已不稳定，将要出现非对称解 A_{021} 与 A_{022}，最后发展为多模. (10.7.24) 式的物理意义是由于对称模 A_{10} 的存在，使得非对称模 A_{02} 获得的增益足以克服 A_{02} 起振时的损耗. 这一由旋转对称的模 A_{10} 出发最后发展为非旋转对称的多模 (包括 A_{10}，A_{021}，A_{022}) 称之为模式对称性自发破缺. 当取定 $2C > (2C)^1$ 时，对称模振荡幅度 f_{10} 可按定态方程

$$1 = 2C \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{A_{10}^2(\rho,\varphi)\exp(-2\rho^2/\psi^2)}{1+A_{10}^2(\rho,\varphi)|f_{10}|^2} \tag{10.7.25}$$

确定. 上式中已略去小量 $|f_{021}|^2 = |f_{022}|^2$ 的影响. 当 f_{10} 给定后，便可解多模定态方程 (10.7.9)$\dfrac{\partial f_{pm}^{(i)}}{\partial z} = 0$，以确定 f_{021}, f_{022}，并按 (10.7.10) 式数值计算多模定态解的场图 $|F(\rho,\varphi)|^2$,$F(\rho,\varphi) = f_{10}A_{10}(\rho,\varphi) + f_{021}A_{021}(\rho,\varphi) + f_{022}A_{022}(\rho,\varphi)$.

10.7.2 光场中的相位奇异点 [65, 66]

由上面的讨论，我们已认识到当泵浦参量 $2C$ 较大时，最先激发的单模简并分量 A_{10} 是不稳的，会演化为包含其他两个简并分量的多模. 对 $2p+m=2$ 情形，一般的可写为

$$E(\rho,\varphi) = A_{10}(\rho,\varphi)g_1 + B_{021}(\rho,\varphi)g_2 + B_{022}(\rho,\varphi)g_3$$

式中， $g_1 \sim g_3$ 为复数，不失去一般性，取 g_1 为实数，则上式可写为

$$E(\rho,\varphi) = A_{10}(\rho,\varphi)g_1 + B_{021}(\rho,\varphi)|g_2|e^{i\theta_2} + B_{022}(\rho,\varphi)|g_3|e^{i\theta_3}$$

$$A_{10} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-2\rho^2)e^{-\rho^2}$$
$$B_{021} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}2\rho^2 e^{-\rho^2}e^{i2\varphi} \tag{10.7.26}$$
$$B_{022} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}2\rho^2 e^{-\rho^2}e^{-i2\varphi}$$

注意到对 (10.7.26) 式施以坐标转动变换 $\varphi \to \varphi + \varphi_0$, 则得

$$E(\rho,\varphi) = A_{10}g_1 + B_{021}|g_2|e^{i(\theta_2+2\varphi_0)} + B_{022}|g_3|e^{i(\theta_3-2\varphi_0)} \tag{10.7.27}$$

但新的辐角 $\theta_2' = \theta_2 + 2\varphi_0$, $\theta_3' = \theta_3 - 2\varphi_0$ 和 $\theta_2' + \theta_3' = \theta_2 + \theta_3$ 保持不变. 下面将研究 $\theta_2 + \theta_3 = \pi$ 情形场的结构. 首先参照 (10.7.24) 式, 单模 A_{10} 的阈值与不稳条件分别为

$$1 - 2C\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{A_{10}^2(\rho,\varphi)e^{-2\rho^2/\psi^2}}{1 + A_{10}^2(\rho,\varphi)|f_{10}|^2} = 0 \tag{10.7.28}$$

$$1 - 2C\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{|B_{021}(\rho,\varphi)|^2 e^{-2\rho^2/\psi^2}}{1 + A_{10}^2(\rho,\varphi)|f_{10}|^2} < 0 \tag{10.7.29}$$

将 (10.7.26) 式代入 (10.7.28),(10.7.29) 式, 二式相减便得 A_{10} 模的不稳条件为

$$\int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{(-4\rho^4 + 8\rho^2 - 1)e^{-2\rho^2 - 2\rho^2/\psi^2}}{1 + (1-2\rho^2)^2 e^{-2\rho^2}x_1^2} \geq 0, x_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|f_{10}| \tag{10.7.30}$$

同样可计算出 B_{021}, B_{022} 模不稳条件为

$$\begin{gathered}\int_0^{\infty} \rho d\rho \frac{(4\rho^4 - 8\rho^2 + 1)e^{-2\rho^2 - 2\rho^2/\psi^2}}{1 + 2\rho^4 e^{-2\rho^2}x_{2,3}^2} \geq 0 \\ x_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|f_{021}|, \qquad x_3 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}|f_{022}|\end{gathered} \tag{10.7.31}$$

图 10.50[65] 曲线 1 为模 A_{10} 的阈值曲线 (按 (10.7.28) 计算 $|f_{10}|^2$ 很小, 可略去), 曲线 2 和 4 为按 (10.7.30),(10.7.31) 式计算的不稳曲线. S 为模 A_{10} 稳定存在的对称模区. $4H$ 与 O–$4H$ 为三个定态解同时存在但不稳的区域, D–$4H$ 区 A_{10} 模不稳, 但 B_{021}, B_{022} 是稳定的. 设初始在 S 区, 当 C 增加后便越过曲线 2 进入有 4 个黑点的 $4H$ 区. 图 10.51 (a) 为光强 $\propto A_{10}^2$ 的空间分布, 具有旋转对称. 图 10.51 (b) 也是光强分布, 因为是 A_{10} 与 B_{021}, B_{022} 的混合, 不再具有旋转对称, 这就是上面提到的对称性的破坏. 又设初始在 D–$4H$ 的圈形区, 中心有一强度为 0 的暗点, 当增大 C 越过曲线 4 就进入 O–$4H$ 卵形区 (见图 10.51 (c),(d)). 圈形区为纯粹的 B_{021} 或 B_{022}, 也是旋转对称的. 但在 O–$4H$ 卵形区中, 由于混合了小量的 A_{10}, 已失去旋转对称了.

现在让我们回到具有 4 个暗点的 4 - H 区. 在这些暗点, 场强 $E(\rho,\varphi) = 0$. 参照 (10.7.26) 式, 并注意到 $\theta_2 = \theta$, $\theta_3 = \pi - \theta$, 便得出暗点的坐标为

$$2\rho_{\pm}^2 = \left[1 \pm \frac{|g_2| - |g_3|}{\sqrt{2}g_1}\right]^{-1}, \qquad 2\varphi + \theta = k\pi, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3 \tag{10.7.32}$$

联系暗点的等位相线由下式确定:

$$\tan\Phi = \frac{ImE(\rho,\varphi)}{ReE(\rho,\varphi)} = \frac{\sqrt{2}\rho^2(|g_2| + |g_3|)\sin(2\varphi+\theta)}{(1-2\rho^2) + \sqrt{2}\rho^2(|g_2| - |g_3|)\cos(2\varphi+\theta)} \simeq 常数 \tag{10.7.33}$$

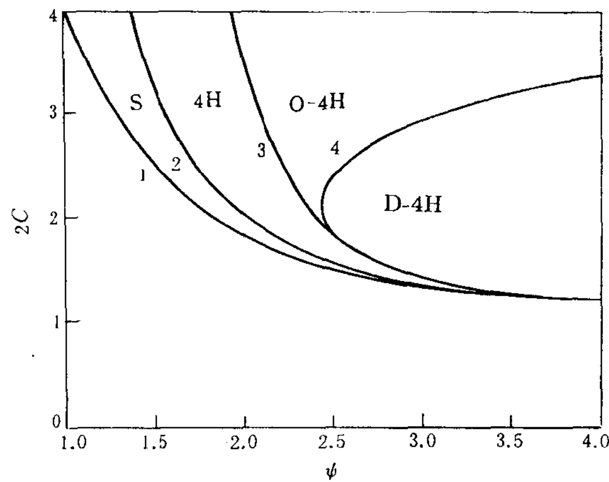


图 10.50 $2p+m=2$ 情形的相图，控制参量为 C, ψ. 字母 S, 4H, O 与 D (各字母标明产生的稳定花样) 分别标志"对称"、"4 个黑洞"、"卵形"、"圈形"区，对应于图 10.51 中 (a),(b),(c),(d)
(参照 Bramlilla 等 [65])

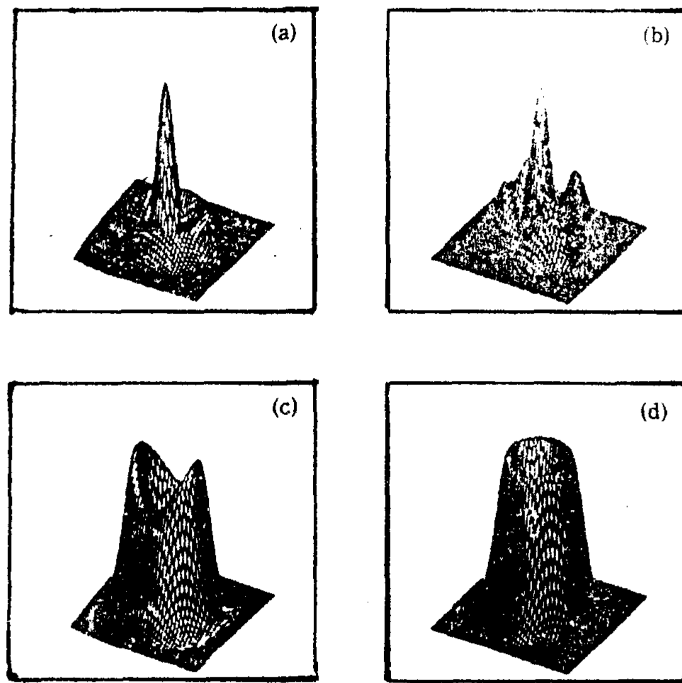


图 10.51 $2p+m=2$ 情形各稳定花样的横向强度分布
(a) 柱形对称的 Gauss - Laguerre 模，$p=1$, $m=0$;
(b)4 黑洞形；(c) 卵形；(d) 圈形
(参照 [65])

图 10.52 给出 $|g_2|=|g_3|$ 时的暗点及等相位曲线. 圈绕着这些暗点的闭路积分，相位将改变 $\pm 2m\pi$,m 为整数. 流体力学速度场中的涡流点也有这种性质，因而称这些暗点为光场的相位奇异点. 十分有意义的是，用氩离子激光泵浦的钠二聚物 (Na_2) 蒸气 (三能级系统) 作为增益介质已经观察到与图 10.51 (a)~(d) 相对应的光强分布如图 10.53 (a)~(d) 所示. 图 10.54 还显示出当 ψ 固定，逐渐增加泵浦功率 I_p, 光场图由 S 至 4H 、至卵态 O

−4H 发展过程 [65]，还能看到 $\psi = 2.1 \sim 2.4$，存在双稳态 (∷) 与 (··)，光场分布就在这两个状态间跳动着，圈态 D − 4H，即 ⊙，只能在 I_p 很小，而 $\psi \simeq 3.7$ 时才能观察到.

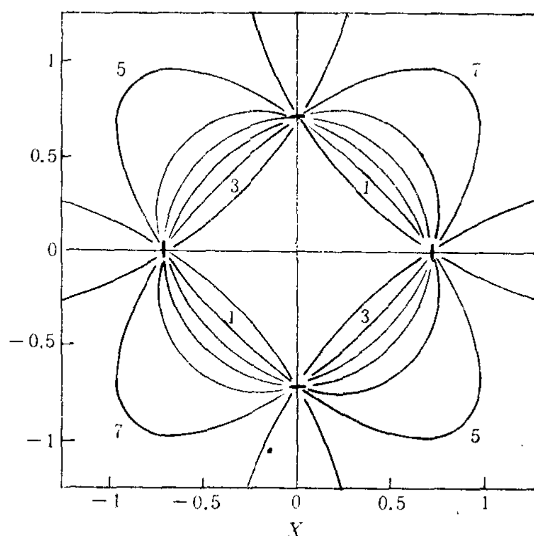


图 10.52 当 $|g_2| = |g_3|$ 时的暗点与等相位曲线
($1—\pi/4$, $3—3\pi/4$, $5—5\pi/4$, $7—7\pi/4$)
(参照 [65])

如果流体作涡流运动，则速度 $\vec{v}$ 沿闭路 γ 的线积分，亦即涡度

$$C_\gamma = \oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{l} \neq 0 \tag{10.7.34}$$

设点 $z_0 = x_0 + iy_0$ 为场的相位奇点，则在奇点附近的场强

$$E(x, y) = q(z - z_0)^m = q\rho^m e^{im\varphi} \tag{10.7.35}$$

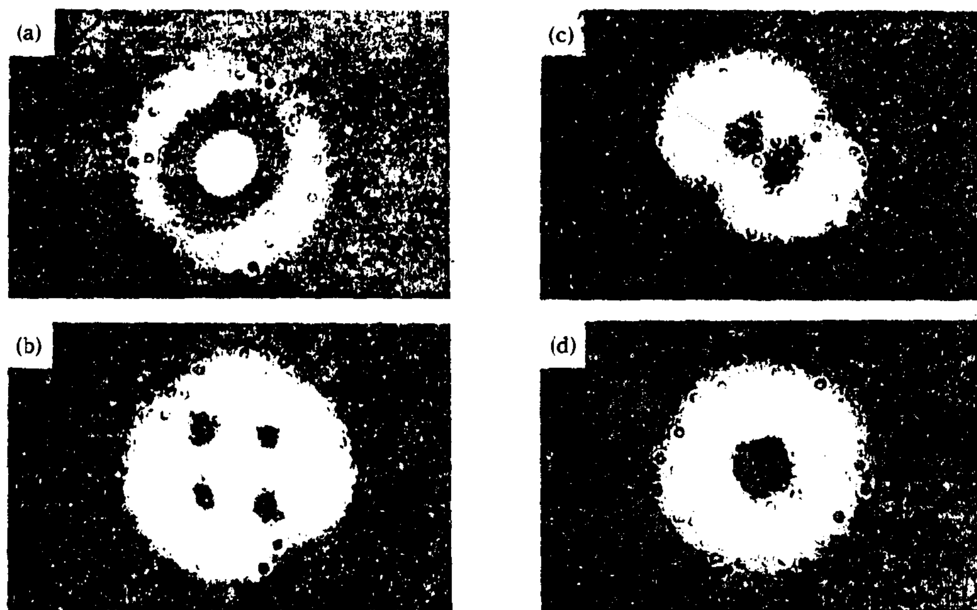


图 10.53 $2p + l = 2$ 情形的输出场图花样
(a) $P/P_{th} = 1.5$, $\psi = 1.0$; (b) $P/P_{th} = 4.0$, $\psi = 1.0$;
(c) $P/P_{th} = 2.3$, $\psi = 2.1$, 卵形； (d) $P/P_{th} = 2.0$, $\psi = 3.0$, 圈形
(参照 [65])

绕奇点一周，φ 将增加 2π,$e^{im\varphi}$ 将增加因子 $e^{i2m\pi}$. (10.7.35) 式中的 q 为实数，$z = x + iy$. 场强 $E(x, y)$ 的单值性质决定了 m 只能是正、负整数. 又由 (10.7.35) 式，场强的位相 Φ 为

$$\Phi = \mathrm{Im}(\ln E(x, y)) = m\varphi = m \tan^{-1} \frac{y - y_0}{x - x_0} \tag{10.7.36}$$

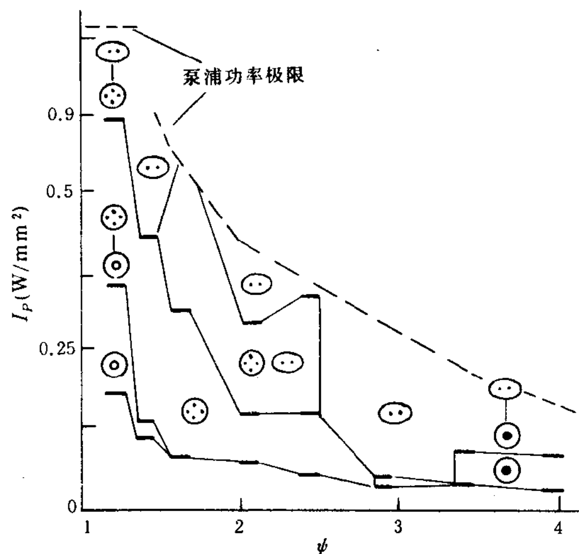


图 10.54 由实验确定的，由控制参数泵浦峰值强度 I_p 和泵浦光束宽度 ψ 决定的 $2p+l=2$ 情形稳定花样图（参照 [65]）

现定义速度矢量 $\vec{v}$ 为垂直于等位相面 Φ 的矢量，则涡度 C_γ 为

$$\begin{aligned} C_\gamma = & \oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{l} = \oint_\gamma \nabla\Phi\cdot d\vec{l} \\ = & m\oint_\gamma \nabla\left(\tan^{-1}\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)\cdot d\vec{l} = 2m\pi \end{aligned} \tag{10.7.37}$$

这就证明了沿暗点的闭路积分场强的相位将改变 $2m\pi$，亦即速度场的涡度.

10.7.3 光学中的混沌遨游与时空混沌现象的实验观察 [67~68]

考虑到模式竞争，横模对称破缺以及光场位相奇异点的形成后，光学的分岔与混沌现象变得愈来愈复杂了，通向混沌的道路也愈不明确了. 这节将给出从实验上探求一种通向混沌的道路，这就是单模混沌遨游与多模同时存在的时空混沌. 单模遨游是指激光在少数几个模式来回地遨游着. 例如在 t_0 时为 TEM_{00} 模，在 t_1 时又跳到 TEM_{01} 模，$\cdots, t_q$ 时跳到 TEM_{0q} 模. 但当 $t=T+t_0(T=t_0+t_1+\cdots+t_q+\bar{t}$, $\bar{t}$ 为所有模式均停止振荡时间)，又回到 TEM_{00} 模. 在文献 [67] 中，系统的控制参量为 Fresnel 数 F. 当 F 数较小 ($F=2\sim5$)，单模遨游基本上是周期的；当 F 增大到超过 8，周期性渐破坏，便进入混沌遨游了；F 再增大，便是多模同时激发的时间混沌了.

实验装置主要是包含增益介质 BSO(Bismuth Silicon Oxide) 与小孔 A 的环形腔，如图 10.55 所示. A 的孔径为 $\phi300\mu$，可沿光轴移动以控制 F 数. 图 10.56 给出摄象机摄得的横模光强分布 (左) 及空间自相关函数 (右). 这后一结果是通过 200 次测量的统计平均得到的. 当 $F\simeq5$，每一时刻只有一个模式振荡，整个波面是相干的，这就是图 10.56 (a) 的情形. 但当 $F\simeq70$，有许多模式同时振荡，便产生了类 Specke 场图 (c)，而相干长度 $\xi\simeq0.1D$，分幅尺度 D 与图 10.56 (a) 光斑大小相近. 图 10.57 为 $F=5$ 时，周期地交替变换的各种单模. 亦即横模 TEM_{0q} 的遨游.

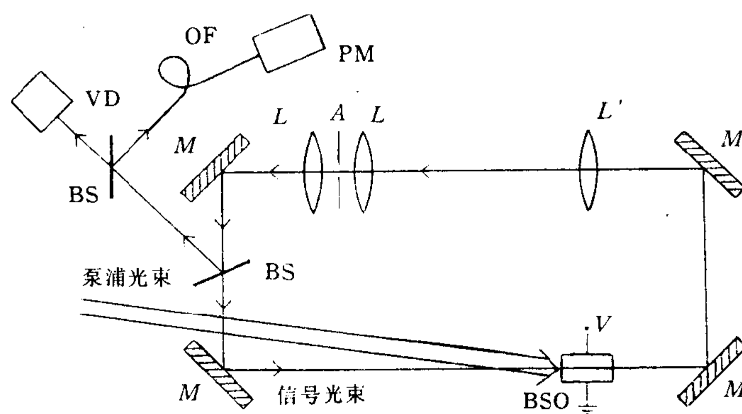


图 10.55　观察混沌遨游的实验装置简图

(参照 Areechi 等 [67])

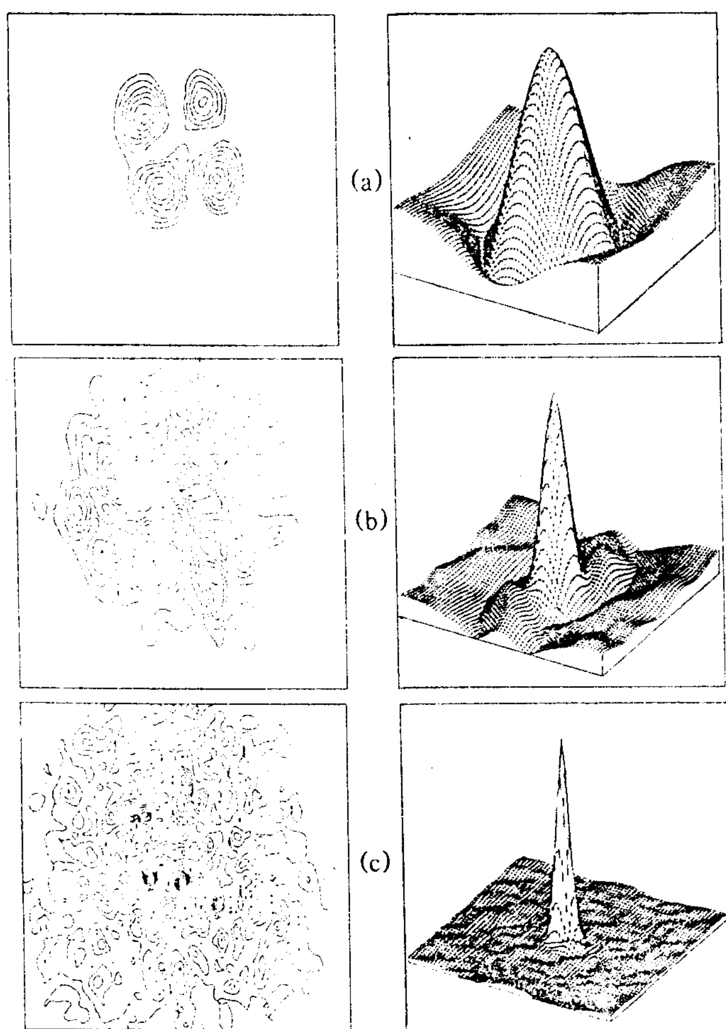


图 10.56　波前的强度分布 (左) 及自相关函数 (右). (a)$F=5$, 单模相干长度 ξ 与分幅尺度 D 之比 $\xi/D\simeq 1$; (b) $F=20$, ξ /D=0.25; (c) F=70, $\xi/D\simeq 0.1$

(参照 [67])

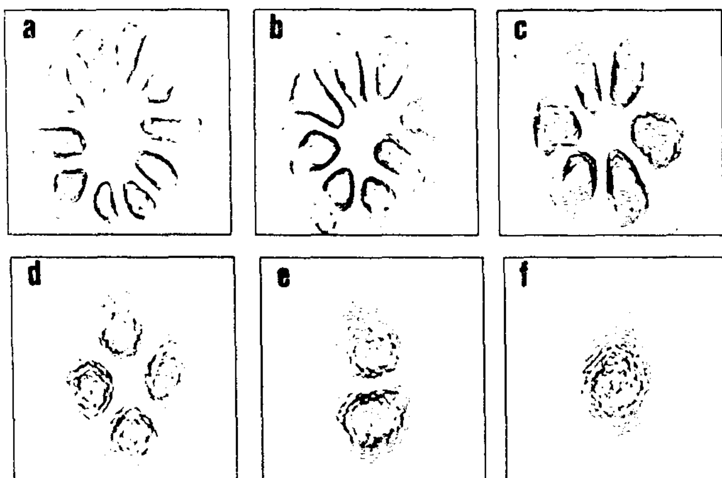


图 10.57　光强花样出现的顺序 (参照 [67])

参 考 文 献

第一章

[1] T. Taniti and K. Nishihara, Nonlinear Waves, Pitman Advanced Publishing Program, Boston, London,1977.

[2] 本书编写组，固体激光导论，上海人民出版社， 1974, P.429.

[3] K. Nogaki and T. Taniuti, J. Phys. Soc. Japan, 34 (1973), 796.

[4] A. C. Newell, Solitons in Mathematics and Physics by Society for Industry and Applied Math., Philadelphia Pennsylvania, 1985.

[5] J.Scott Russell, Report on Waves Rept., Fourteenth Meeting of the British Association for the Advancement of Science, John Murray, London, 1984, P.311.

[6] D.J.Korteweg and G.de Vries, Phil. Mag., 39 (1895), 422.

[7] E.Fermi, J.Pasta and S.Ulam, Los Alamos Report LA, 1955, 1940.

[8] N.J.Zabusky and M.D.Kruskal, Phys. Rev. Lett., 15 (1965), 240.

[9] C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal and R.M.Muira, Phys. Rev. Lett., 19 (1967), 1095.

[10] A.C.Scott, F.Y.F.Chu and D.W.McLaughlin, Proc. IEEE, 61 (1973), 1443.

[11] M.J.Ablowitz et al., Studies in Appl. Math., 53 (1974), 249.

[12] D.J.Kaup, Studies in Appl. Math., 54 (1975), 165.

[13] 谭维翰，中国激光， 13 (1986), 129.

[14] 谷超豪，孤子理论与应用，应用数学丛书，浙江科学技术大学出版社， 1990.

[15] 谭维翰、顾敏，中国激光， 11 (1984), 522.

[16] J.Satsuma and N. Yajima, Supplement of the Progress of Theoretical Physics, 55 (1974), 284.

[17] 谭微思，中国激光， 14 (1987), 625; W.Tan, Chinese Phys. Lasers, 14 (1988), 715.

[18] I.S.Gradshteyn and I.M.Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, 1980, P.136, 630, 631.

[19] H.U. 阿希泽尔，椭圆函数纲要，商务印书馆， 1956, P.234.

[20] 王竹溪、郭敦仁，特殊函数概论，科学出版社， 1965, P.632.

第二章

[1] R.W.Boyd, Nonlinear Optics, Academic Press Inc., New York, London, 1992.

[2] Y.R.Shen, The Principles of Nonlinear Optics, New York, 1984.

[3] N.Bloembergen, Nonlinear Optics, Benjamin, New York, 1965.

[4] R.C.Miller, Appl. Phys. Lett., 5 (1964), 17.

[5] T. Taniuti and K. Nishihara, Nonlinear Waves, Pitman Pub. Program, 1983, P.144.

[6] A. Armstrong, N.Blombergen, J. Ducuing and P.S. Pershan, Phys. Rev., 127 (1962), 1818.

[7] H.U. 阿希泽尔，椭圆函数纲要，商务印书馆， 1956, P.59.

[8] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, New York, 1980, P.919.

[9] R.B. Miles and S. E. Harris, IEEE J. Quantum Electronics, QE-9(1973),470.

[10] M. Born, E. Wolf, 光学原理，科学出版社， 1981, P.587.

[11] J. M Manley and H. E. Rowe, Proc. IRE, 47 (1959), 215.

[12] L.I. Schiff, Quantum Mechanics, Third Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.

[13] M.V,Berry, Proc. Roy, Soc. Lond A., 392 (1984), 45; J.Mod. Opt., 34 (1987a), 40; Nature, 376 (1987b), 277.

[14] W.R.S.Graton, G.L.Grasdalen, W.H.Paskinson and E. M. Reeues, J.Phys., B 1 (1968), 114.

[15] U.Fano, Phys. Rev., 124 (1961), 1866.

第三章

[1] L.I.Schiff, Quantum Mechanics, Third Edition, McGraw–Hill Book Company, New York, 1968.P.404.

[2] I.I.Rabi, Phys. Rev., 51 (1937), 652.

[3] F.Bloch, Phys. Rev., 70 (1964), 460.

[4] H.C.Torrey, Phys. Rev., 76 (1949), 1059.

[5] L.Allen and J.H.Eberly, Optical Resonance and Two-Level Atoms, John Wiley & Sons, New York, 1974.

[6] H.M.Gibbs, Phys. Rev., A8 (1973), 446.

[7] C.L.Tang and H.Statz, Appl. Phys. Lett., 10 (1968),145.

[8] R.G.Bewer and R.L.Shoemaker, Phys. Rev. Lett., 27 (1971), 631; Phys. Rev., A6 (1972), 2001.

[9] G.B.Hocher and C.L.Tang, Phys. Rev. Lett., 21 (1969), 591.

[10] M.D.Crisp, Phys. Rev., A8 (1973), 2128.

[11] E.L.Hahn, Phys. Rev., 77 (1950), 297.

[12] S.L.McCall and E.L.Hahn, Phys. Rev., 183 (1969), 457; Phys. Rev. Lett., 18 (1967), 908.

[13] D.Grischkowsky, Phys. Rev. Lett., 24 (1970), 866; Phys. Rev., A6 (1972), 1566; Phys. Rev,A (1973), 2096.

[14] R.E.Slusher and H.M.Gibbs, Phys. Rev., A5 (1972), 1673.

[15] 顾敏、谭维翰，光学学报， 5 (1985), 409.

[16] 顾敏、谭维翰，光学学报， 5 (1985), 565.

[17] 顾敏、谭维翰、唐贵琛，科学通报， 30 (1985), 501.

[18] H.A.Haus, Rev. Mod, Phys., 51 (1979), 335.

[19] 谭维翰、顾敏，中国激光， 11 (1984), 522.

[20] R.Y.Chiao and Y.S.Wu, Phys. Rev. Lett., 57 (1986), 933; A.Tomita and R.Y.Chiao, Phys. Rev. Lett., 57 (1986), 937.

[21] A.U. 阿希叶泽尔，B．Б 别列斯捷茨基，量子电动力学，科学出版社， 1964, P.13.

[22] A.Bethe and E.E.Salpeter, Quantum Mechanics of One and Two Electron Atoms, Plenum, New York, 1977.

第四章

[1] R.W. Boyd, Nonlinear Optics Acadamic Press, Inc. Bostor, 1992, P.216.

[2] Tan Weihan, Lu Weiping and Robert G.Harrison, Phys. Rev., A 46 (1992), 7128.

[3] S.H.Atler and C.H.Townes, Phys. Rev., 100 (1955), 703.

[4] S. Yatsiv, Phys. Rev., 113 (1959), 1538; L.R.Wilcox and W.E.Lamb, Phys. Rev., 119 (1960), 1915; M.S.Feid and A.Javan, Phys. Rev., 117 (1969), 540.

[5] C.Cohen-Tannoudji and S.Reynaud, J.Phys, B10 (1977), 345, 365, 2311.

[6] J.C.Slater, Quantum Theory of Matter, McGraw-Hill Book Company Inc., 1951, P.383.

[7] Y.R.Shen, The Principles of Nonlinear Optics, John Wiley & Sons, New York, 1984, P.94.

[8] Tan Weihan, Lu Weiping and Robert G.Harrison, Phys. Rev., A 46 (1992), R3613; Phys. Rev., A 49 (1994), 3134.

[9] S.E.Harris, Phys. Rev. Lett., 62 (1989), 1033.

[10] M.O.Scully, S.Y.Zhu and A.Garriedides, Phys. Rev. Lett., 62 (1989), 2813.

[11] E.F.Fill, M.O.Scully and S.Y.Zhu, Optics Commu., 77 (1990), 36.

[12] S.Basile and P.Lambropoulos, Optics Commu., 77 (1990), 163.

[13] O.Kocharovskaya, Ruo–Ding Li and P. Mandel, Optics Commu., 77 (1990), 215.

[14] O.Kocharovskaya and P.Mandel, Opt. Commu., 86 (1991), 179.

[15] O.Kocharovskaya and P.Mandel, Phys. Rev.,A42 (1990), 523.

[16] G.Bhanu Prasad and G.S.Agarwal, Opt. Commu., 86 (1991), 40.

[17] S.E.Harris, J.E.Field and A.Imanoglu, Phys. Rev. Lett., 64 (1990), 110.

[18] L.M.Narducci, H.M.Doss, P.Ru, M.O.Scully, S.Y.Zhu and C.Keitel, Opt. Commu., 81 (1991), 379.

[19] L.M.Narducei, M.O.Scully, C.H.Kietel and S.Y.Zhu, Opt. Commu., 86 (1991), 324.

[20] A.Imanoglu, J.E.Field and S.E.Harris, Phys. Rev. Lett., 66 (1991), 1154.
[21] U.Fano, Phys. Rev., 124 (1961), 1866.

第五章

[1] M.Sargent Ⅲ, M.O.Scully and W.E.Lamb, Laser Physics, Addiso-Wesley Publishing Company, London, 1974.
[2] H.Haken, Light and Matter Ic, Encyclopedia of Physics Vd XXV/2c, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
[3] W.E.Lamb, Jr. Phys. Rev., 134(1964), A1429.
[4] 谭维翰, 物理, 10 (1980), 193.
[5] A.L.Schawlow and C.H.Townes, Phys. Rev., 112 (1958), 1940.
[6] M.Lax, Phys. Rev., 145 (1966), 110.
[7] M.Lax and W.H.Louisell, Phys. Rev., 185 (1969), 568.
[8] W.H.Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation, John Wiley & Sons. Inc, 1973.
[9] 谭维翰, 物理学报, 31 (1982), 1569.
[10] H.A.Haus and Y.Yamamoto, Phys. Rev., A 29 (1984), 1261.
[11] Y.Yamamoto and S.Machida, Phys. Rev., A 34 (1986), 4025.
[12] Y.Yamamoto, N.Imoto and S.Machida, Phys. Rev., A 33 (1986), 3243.
[13] Y. M. Golubev and I. V. Sokolov, Zh. Eksp. Teor. Fiz., 87 (1984),408.
[14] Tan Weihan, Physics Letters, A190 (1994), 13.
[15] Tan Weihan, Opt. Commu., 115 (1995), 303.

第六章

[1] D.T.Haar, Proceedings of the International School of Physics, "Enrico Fermi" Course 42, Ed. by R.J.Glauher, Academic Press Inc., New York, 1969, P.1.
[2] R.Loudon, The Quantum Theory of Light, Clarendon Press, Oxford, 1983, P.7–8.
[3] 谭维翰、栾绍金, 量子电子学, 2 (1985), 128.
[4] P.A.M,Dirac, Quantum Mechanics, 4th ed., London, 1958, P.9.
[5] A.T.Forrester, R.A.Gudmundsen and P.O.Johnson, Phys. Rev., 99 (1955), 1691.
[6] A.Javan, E.A.Ballik and W.L.Bond, J.O.S.A., 52 (1962), 96.
[7] G.Magyar and L.Mandel, Nature, 1981 (1963), 255.
[8] M.S.Lipsett and L.Mandel, Nature, 199 (1963), 553.
[9] L.Mandel, Quantum Optics, Ed. by R.J.Glauber, Academic Press Inc., New York, 1969, P. 176; R.L.Pfleegor and L.Mandel, Phs. Rev., 159 (1967), 1084.
[10] R.J.Glauber, Phys. Rev., 130 (1963), 2529 ; 131 (1963), 2766; Quantum Optics, Ed. by R.J.Glauber, 1969. P.15.
[11] W.L.Louisell, Quantum Statistical Properties of Radiation, John Wiley & Sons. Inc., 1973, P.347, 178, 154.
[12] 谭维翰、王学文、谢成钢、张冠梅, 物理学报, 31 (1982), 1569.
[13] H. Brown and R.Q. Twiss, R.Q. Nature, (1956), 177; (1957), 27; Proc. R. Soc., A 242, (1958), 300; A243(1958), 291.
[14] F.T.Areechi, et. al., Phys. Lett., 20 (1966), 27.
[15] R.Loudon, Rep. Prog. Phys., 43 (1980), 914.
[16] M. Dangenais and L. Manddel, Phys. Rev., A 18 (1978), 2217.
[17] H. D. Simaan and R. J. Loudon, Phys. A: Math. Gen., 8 (1975), 539.
[18] M. Lax, Phys. Rev., 172. (1968), 350.
[19] J. F. Clauser, Phys. Rev., D 9 (1974), 853.
[20] C.M.Coves, Phys. Rev. Lett., 45 (1980), 75.
[21] C.M.Caves, Phys. Rev., D. 23 (1981), 1693.
[22] D.Stoler, Phys. Rev., D1 (1970), 3217; D4 (1971), 1925.
[23] D.F.Walls, Nature, 306 (1983), 141; Nature, 280 (1979), 451.

[24] H.P.Yuen, Phys. Rev., A13 (1976), 2226.
[25] H.P.Yuen & Shapiro, J.H. IEEE Trans., Inform. Theory, 24 (1978), 657; 26 (1980), 76.
[26] C.M.Caves, K.S.Thorne, R.W.P.Drever, V.D.Sandberg and M.Zimmerman, Rev. Mod. Phys., 52 (1980), 341.
[27] R.Loudon, Jour. of Mod. Optics, 34 (1987), 709.
[28] B.C.Sauders, S.M.Barnett and P.L.Knight, Opt. Common., 58 (1986), 290.
[29] P.Carruihers, Phys. Rev. Lett., 14 (1965), 333.
[30] L.Susskind and J.Glogower, Physics, 1 (1964), 49.
[31] Tan Weisi and Tan Weihan, Opt. Lett., 14 (1989), 468.
[32] H.P.Yuen and J.H.Shapiro, Opt. Lett., 4 (1979), 334.
[33] R.M.Slusher, et al., Phys. Rev. Lett., 55 (1985), 2409.
[34] L.A.Wu, H.J.Kimble, J.L.Hall and H.Wu, Phys. Rev. Lett., 57 (1986), 2520.
[35] 谭维翰、李宇舫、张卫平，物理学报，37 (1988), 396; Tan Weihan, Li Yufang, Zhang Weiping, Opt. Commu., 64 (1987), 195.
[36] R.S.Bourdurant, P.Kumar, J.H.Sharpiro and M. Maeda, Phys. Rev., A 30 (1984), 343.
[37] P.Kumar and J.H.Sharpiro, Phys. Rev., A 30 (1984), 1568.
[38] M.Wolinsky and H.J.Carmichael, Opt. Commu., 55 (1985), 138.
[39] L.Mandel, Phys. Rev. Lett., 49 (1982), 136.
[40] 谭维翰、张卫平、谭微思，物理学报， 39 (1990), 1555.
[41] G.Milburn and D.F.Walls, Opt. Commu., 39 (1981), 401.
[42] B.Yurke, Phys. Rev., A 29 (1984), 408.
[43] A.Yariv and D.M.Pepper, Opt. Lett., 1 (1977), 16.
[44] W.W.Chow, M.O.Scully and E.W.Van Strylant, Optics. Commu., 15 (1976), 6.
[45] M.J.Collett and C.W.Gardiner, Phys. Rev., A 30 (1984), 1386; 31 (1984), 3761.
[46] Y.Yamamoto, S.Machia and O.Nilsson, Phys. Rev., A 34 (1986), 4025.
[47] S.Machida, Y.Yamamoto and Y.Itayo., Phys. Rev. Lett., 58 (1987), 1000.
[48] S.Machida and Y.Yamamoto, Phys. Rev. Lett., 60 (1988), 792.
[49] I.S.Gradshteyn and I.M.Ryzhik, Table of Intergrals, Series and Products, Academic Press, New York, 1980.
[50] L. I. Schiff, Quantum Mechanics, Third Edition, McGraw–Hill Book Company, New York, 1955.
[51] A.O.Caldeira, A.J.Leggett, Phys. Rev., A 31 (1985), 1059.
[52] D.F.Wall, G.J.Milburn, Phys. Rev., A 31 (1985), 2405.
[53] Tan Weihan and Xu Wencang, The Dissipation in Lasers and in Coherent State, 第四届压缩态与测不准关系国际会议报告， FICSSUR–TAIYUAN CHINA, June 5–8, 1995.

第七章

[1] F.Schuda, C.R.Stroud, Jr. and M.Hercher, J.Phys., B7 (1974), L198.
[2] H.Walther, in Proceedings of the Second Laser Spectrocopy Conference, Megeve, France, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
[3] F.Y.Wu, R.E.Grove and S.Ezekiel, Phys. Rev. Lett., 35(1975), 1426.
[4] W.Hartig, W.Rasmussen, R.Schieder and H.Walther, Z.Physik, A278(1976), 205.
[5] R.E.Grove, F.Y.Wu and S.Ezekiel, Phys.Rev., A15(1977), 227.
[6] V.Weisskopf, Ann. Phys. (Leipzig), 9(1931), 23.
[7] H.M.Gibbs and T.N.C.Venkatesan, Opt. Commu., 17(1976), 87.
[8] P.Eisenberger, P.M.Platzman and H.Winik, Phys. Rev. Lett., 36(1976), 623.
[9] M.C.Newstein, Phys. Rev., 167(1968), 89.
[10] B.R.Mollow, Phys. Rev., 188(1969), 1969.
[11] S.G.Rautian and I.I.Sobelman, Zh. Eksp. Teor. Fiz, 41(1961), 456.
[12] V.A.Morozov, Optics and Spectroscopy, 26(1969),62.
[13] M.L.Ter-Mikaelyan and A.O.Melikyan, Sov. Phys. JETP, 31(1970), 153.

[14] B.R.Mollow, Phys. Rev., A5(1972), 2217.

[15] F.Y.Wu, S.Ezekiel, M.Ducloy and B.R.Mollow, Phys. Rev. Lett., 38 (1977), 1077.

[16] M.Ducloy, in Proceedings of the Symposium on Resonant Light Scattering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, April, 1976(unpublished).

[17] S.Ezekiel and F.Y.Wu, Multiphoton Process, Ed. by J.H. Eberly, P.Lambropoulos, John Wiley & Sons. Inc.,1977, P.145.

[18] S.Bloom and H.Margenau, Phys. Rev., 90(1953), 791.

[19] R.Kubo, J.Phys. Soc.Japan, 12(1957), 570.

[20] B.R.Mollow, J.Phys. Soc. Japan, A5(1972), 570.

[21] Tan Weihan and Zhang Weiping, Chinese Phys. Lett., 2(1985), 309.

[22] W.E.Lamb, Phys. Rev., 134(1964), 1429.

[23] R. W.Boyd et al., Phys. Rev., A24(1981), 411.

[24] A.L.Schavlow, Advances in Quantum Electronics, Ed. by J.Singer, Columbia Univ. Press., New York, 1961, 63.

[25] M.Lax, Phys.Rev., 129(1963), 2342.

[26] 谭维翰、张卫平，物理学报， 37(1988), 674; Tan Weihan and Zhang Weiping, Opt. Commu., 65(1988), 61.

[27] S. K. Basu, T.Pramila and D.Kanjilal, Opt. Commu., 45(1983), 43.

[28] C.Mavroyannis, Opt.Commu., 26(1978), 453.

[29] D. A.Holm and Murray Sargent Ⅲ, Optics Lett., 10(1985), 405.

[30] G.Compagno, F.Persico, Phys. Rev., A25(1982), 3139.

[31] L.Landau and E.Lifshitz, The Classical Theory of Fields, Addison -Wesley Publishing Co., 1951, Eq.(9-20).

[32] H.Eberly, C.V.Kunasz and K.Wodkiewiz, J.Phys. B.Atom Molec. Phys., 13(1980), 217.

[33] 谭微思、谭维翰，中国激光， 18(1991), 839.

[34] C.W.Gandiner, Handbook of Stochastic Method for Physics, Chemistry and the Natural Sciences, Springer–Verlag, Berlin, 1983, P.16.

[35] Tan Weisi, Tan Weihan, Zhao Dongsheng and Liu Renhong, J. O. S. A. B, 10 (1993), 1610; 物理学报, 41 (1992), 413.

[36] X. Y. Huang, R. Tanas and J. H. Eberly, Phys. Rev., A 26 (1982), 892.

[37] J. H. Eberly, C. V. Kunasz and K. Wodkiewiz, J. Phys. B. Atom Molec. Phys., 13 (1980), 217.

[38] K. Rzazewski and M. Florianczyk, J. Phys., B 17 (1980), L 509.

[39] J.J.Sancher–Mondragon, N.B.Narozhny and J.H.Eberly, Phys. Lett., 51(1983), 550; G.S.Agarwal, Phys. Rev. Lett., 53(1984), 1732.

[40] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, London, New York, 1980, P. 763.

[41] 刘仁红、谭维翰，物理学报， 41(1992), 26.

[42] 张卫平、谭维翰， 38(1989), 1041; 38(1989), 1602.

[43] Zhang Weiping and Tan Weihan, Opt. Commu., 69(1988), 129; 69(1988), 135.

[44] B.R.Mollow and M.M.Miller, Annals of Phys., 52(1969), 464.

[45] C.W.Gardiner, Phys. Rev. Lett., 56(1986), 1917.

[46] E.M.Purcell, Phys. Rev., 69(1946), 681.

[47] D.Kleppner, Phys. Rev. Lett., 47(1981), 233.

[48] P.Goy, J.M.Raimend, M.Gross and S.Haroche, Phys.Rev.Lett., 50(1983), 1903.

[49] R.G.Hulet, E.S.Hilfer and D.Kleppner, Phys.Rev. Lett., 55(1985), 2137.

[50] R.G.Hulet and D.Kleppner, Phys. Rev.Lett., 51(1983), 1430.

[51] P.W.Milonni and P.L.Knight, Opt. Commu., 9(1973), 119.

[52] E.T.Jaynes and F.W.Commings, Proc. IEEE, 51(1963), 89.

[53] H.M.Gibbs, Coherence and Quantum Optics , Ed. by L.Mandel and E. Wolf, Plenum, N.Y., 1973, P.83.

[54] S.Sachdev, Phys. Rev., A 29(1980), 2627.
[55] F.W.Cummings, Phys. Rev., 140A(1965), 1051.
[56] J.H.Eberly, N.B.Narozhny, J.J.Sanchez-Mondrogon, Phys. Rev. Lett., 44 (1980), 1323.
[57] J.H.Eberly, C.V.Kunasz and Wodkiewiz, J.Phys.B Atom Molec. Phys., 13 (1980), 217.
[58] J.J.Sanchez-Mondragon, N.B.Narozhny and J.H.Eberly, Phys. Rev. Lett., 51(1983), 550.
[59] G.S.Agarwal, Phys. Rev. Lett., 53(1984), 1732.
[60] H. J. Carmichael, R. J. Brecha, M.G.Raizen and H. J. Kimble, Phys. Rev., A 40(1989), 5516.
[61] M.G.Raizen, R.J.Thompson, R.J.Brecha, H.J.Kimble and H.J.Carmichael , Phys. Rev. Lett., 63(1989), 240.
[62] Yifu Zhu, Daniel J.Gauthier, S.E.Morin, Quilin Wu, H. J. Carmichael and T.W.Mossberg, Phys. Rev. Lett., 64(1990), 2499.
[63] 谭维翰、刘仁红，物理学报， 40(1991), 555.
[64] W.E.Lamb, Proc. Intern. School of Physics “Enrico Fermi”, Course XXXI, 1964, P.87.
[65] C.W.Allen, Astrophysical Quantities, The Athlone Press, 1973, P.34.
[66] R.W.Boyd, Nonlinear Optics, Academic Press. Inc., New York 1992 , P.277.
[67] G.S.Agarwal, Phys. Rev.Lett., 53(1984), 1732.
[68] I.R.Senitzky, Phys. Rev., A6(1972), 1171.
[69] I.R.Senictzky, Phys. Rev. Lett., 40(1978), 1334.
[70] G.S.Agarwal, A.C.Brown, L.M.Narducci and G.Varti, Phys. Rev., A15 (1977), 1613.
[71] G.S.Agarwal, R.Saxena, L.M.Narducci, D.H.Feng and R.Gilmore, Phys. Rev., A21 (1980), 275.
[72] G.S.Agarwal, L.M.Narducci and Apostolidis, Opt. Commu., 36(1981) , 285.
[73] Tan Weihan and Gu Min, Phys. Rev., A 34(1986), 4070.
[74] A.R.Edmond, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton, 1960, P.37.
[75] 本书编写组，固体激光导论，上海人民出版社， 1975, P.318, 194.
[76] R.H.Dicke, Phys. Rev., 93(1954), 99.

第八章

[1] A.Ashkin, Phys. Rev. Lett., 24 (1970), 156; 25 (1970), 1321.
[2] T.W.Hänsch and A.L.Schawlow, Optics, Commu., 13 (1975), 68.
[3] D.Wineland and H.Dehmelt, Bull. Am. Phys. Soc., 20 (1975), 637.
[4] V.I.Balykin, V.S.Letokhov, Yu.B.Ovchinnikov and A.I.Sidorov, Phys. Rev. Lett., 60(1988),2137.
[5] R.J.Cook and R.K.Hill, Opt. Commu., 43 (1982), 250.
[6] V.G.Minogin, Opt. Commu., 34 (1980), 265.
[7] V.G.Minogin and O.T.Serimaa, Opt. Commu., 30 (1979), 373.
[8] V.S.Letokhov, V.G.Minogin and P.D.Pavik, Opt. Commu., 19 (1976), 72.
[9] H.Motz, The Physics of Laser Fusion, Academic Press, London, 1979, 104.
[10] L.I.Schiff, Quantum Mechanics, Third Edition, McGraw–Hill Book Company, New York, 1955.
[11] А.Л.Казацев, А.О.Ч. Уъесников, В.Л.Яковлев, Ж.З.Т.Ф., 90 (1986), 1610.
[12] 栾绍金、谭维翰，激光， 9 (1982), 1.
[13] P.D.Lett, W.D.Phillips, et al., J.O.S.A, B 6 (1989), 2084.
[14] E.Buchwald, Ann. Phys., 66(1921), 1.
[15] S.Chu, L.Hollberg, J.Bjorkholm, A.Cable and A.Ashkin, Phys. Rev. Lett., 55 (1985),48.
[16] P.Lett, R.Watts, C.Westbrook, W.Phillips, P.Gould and H.Metcaff, Phys. Rev.Lett., 61 (1988), 169.
[17] J.Dalilard and C.Chohen–Tannoudji, J. Opt. Soc. Am., B 6 (1989), 2023; J.O.S.A., B 2 (1985), 1707.
[18] W.Phillips, J.Prodan and H.Metcalf, J. Opt. Soc. Am., B 2 (1985), 1751.
[19] D.Sesko, C.Fan and C.Wieman, J. Opt. Soc. Am., B 5 (1988), 1225.
[20] R.J.Cook, Phys. Rev. A, 20 (1979), 224; Optics. Commu., 43 (1982), 258.
[21] J.D.Jackson, Classical Electromechanics, John Wiley and Sons, New York, 1962, P.278.
[22] J.V.Hajnal and G.I.Opat, Opt. Commu., 71 (1989), 119.

[23] V.I.Balykin, V.S.Letokov, Yu.B.Ovchinnikov and A.I.Sidorov, Phys.Rev.Lett., 60(1988),2173.
[24] R.Deutschmanm, W.Entmer and H.Wallis, Phys.Rev., A 47 (1993), 2169.
[25] Tan Weisi ,Tan Weihan, Zhao Dongsheng and Liu Renhong , J.O.S.A.B,10 (1993), 1610.
[26] Tan Weihan and Li Qingning, Exactly Solvable Model of Two Level Atoms Reflected by an Evanescent Laser Wave, 第四届压缩态与测不准关系国际会议报告, FICSSUR–TAIYUAN CHINA, June 5–8, 1995.

第九章

[1] A.Hasegawa, Optical Soliton in Fibers, Second Edition, Springer - Verlag, 1990.
[2] Y.Kodama, A.Hasegawa, IEEE J.Quant. Elect., QE - 23 (1987), 510.
[3] L.F.Mollenauer, R.H.Stolen, J.P.Gordon, Phys. Rev. Lett., 45 (1980), 1095.
[4] R.H.Stolen, L.F.Mollenauer, W.J.Tomlinson, Opt. Lett., 8 (1983), 186.
[5] L.F.Mollenauer, R.H.Stolen, Opt. Lett., 10 (1985), 239.
[6] R.H.Stolen, E.P.Ippen, Appl. Phys. Lett., 22 (1973), 276.
[7] A.Hasegawa, Appl. Opt., 23 (1984), 3302.
[8] E.Desurvire, J.R.Simpson, P.C.Becker, Opt. Lett., 12 (1987), 888.
[9] L.F.Mollenauer, K.Smith, Opt. Lett., 13 (1988), 675.
[10] M.Nakazawa, Y.Kimura, K.Suzuki, Appl. Phys. Lett., 54 (1989), 295.
[11] L.F.Mollenauer, R.H.Stolen, J.P.Gordon, W.J.Tomlinson, Opt. Lett., 8 (1983), 289.
[12] H.A.Haus, M.N.Islam, IEEE J.Quant. Elect., QE – 21 (1985), 1172.
[13] E.M.Dianov, A.M.Prokhorov, V.N.Serkin, Opt Lett., 11 (1986), 168.
[14] A.Hasegawa, F.D.Tappert, Appl. Phys. Lett., 23 (1973), 171.
[15] D.Krökel, N.J.Halas, G.Giuliani, D.Grischkowsky, Phys. Rev. Lett., 60 (1988), 29.
[16] A. M. Weiner, J. P. Heritage, R. J. Hawkins, R. N. Thurston, E. M. Kirschner, D. E. Leard, W. J. Tomlinson., Phys. Rev. Lett., 60 (1988), 2445.
[17] K.Tai, A.Hasegawa, A.Tomita, Phys. Rev. Lett., 59 (1986), 135.
[18] R.R.Alfano and S.L.Shapiro, Phys. Rev. Lett., 24 (1970), 584; 24 (1970), 592.
[19] F.Shimizu, Phys. Rev. Lett., 19 (1967), 1097.
[20] T.K.Gustafson, J.P.Taran, H.A.Haus, J.F.Lifsitz and P.L.Kelley, Phys. Rev., 177 (1969), 306.
[21] G.Yang and Y.R.Shen, Optics Lett., 9 (1984), 500.
[22] 连合、谭维翰，中国激光， 13 (1991), 192.
[23] R.L.Fork, C.V.Shank, C.Hirlimann and R.Yen., Opt. Lett., 8 (1983), 1.
[24] W.G.Hellwarth, in "Advances in Quantum Electronics", Ed. by J.Singer, Columbia Univ. Press., New York, 1961.
[25] L.E.Hargrove, R.L.Fork and M.A.Pollack, Appl. Phys. Lett., 5 (1964), 4.
[26] T.Deutsch, Appl. Phys. Lett., 7 (1965), 80.
[27] A.J.DeMaria, D.A.Stetser and H.Heyman, Appl. Phys. Lett., 8 (1966), 174.
[28] O.G.Peterson, S.A.Tuccio and B.B.Snavely, Appl. Phys. Lett., 17 (1970), 245.
[29] F.Krauz, M.E.Fermann et al., IEEE J. of Quantum Elect., 10(1992).
[30] P.G.Kryukov and V.S.Letokov, IEEE J. Quantum Elect., QE-8 (1972), 766.
[31] W.H.Glenn, IEEE J. Quantum Elect., QE - 11 (1975), 8.
[32] C.H.C.New, Opt. Commu., 6 (1972), 188.
[33] E.P.Ippen, C.V.Shank and A.Dienes, Appl. Phys. Lett., 21 (1972), 348.
[34] R.L.Fork, B.J.Green and C.V.Shank, Appl. Phys. Lett., 38 (1981), 671.
[35] D.Strickland and G.Mourou, Opt. Commu., 56 (1985), 219.
[36] P.Maine and G.Mourou, Opt. Letters, 13 (1988), 467.
[37] L.F.Mollenauer and R.H.Stolen, Opt. Lett., 9 (1984), 13.
[38] K.J.Blow and D.Wood, J. Opt. Soc. Am., B 5 (1988), 629.
[39] K.J.Blow and B.P.Nelson, Opt. Lett., 13 (1988), 1026.
[40] P.N.Kean, X.Zhu, D.W.Crust, R.S.Grant, N.Langford and W.Sibbett, Opt. Lett., 14 (1989), 39.
[41] P.M.W.French, J.A.R.Williams and J.R.Tayler, Opt. Lett., 14 (1989), 668.

[42] F.Krausz, Ch. Spielmann, T.Brabec, E.Winter and A.J.Schmidt, Opt. Lett., 15 (1990), 737.
[43] E.P.Ippen, H.A.Hans and L.Y.Liu, J. Opt. Soc. Am., B 6 (1987), 1736.
[44] H.A.Haus, J.G.Fujimoto and E.P.Ippen, J. Opt. Soc. Am., B 8 (1991), 2068.
[45] O.E.Martonez, J.P.Gordon and R.L.Fork, J. Opt. Soc. Am., A 1 (1984), 1003.
[46] O.E.Martinez. IEEE. J. Quantum Electr., QE - 23 (1987), 59.
[47] M.Pessot, P.Maine and G.Mourou, Opt. Commu., 62 (1987), 419.
[48] R.S.Marjoribanks, Opt. Lett., 18 (1993), 361.
[49] K. Tai, A. Tomita, J. L. Jewell, A. Hasegawa, Appl. Phys. Lett., 49 (1986), 236.
[50] Robert W. Boyd, Nonlinear Optics, Academic Press Inc., 1992, P. 432.

第十章

[1] C. W. Gardiner, Handbook of Stochastic Methods, Springer - Verlag , New York, 1983.
[2] A. Einstein, Ann. Phys. (Leipzig), 17 (1905), 549.
[3] P. Langevin, Comptes Rendues, 146 (1908), 530.
[4] N. Wiener, Acta Math., 55 (1930), 117.
[5] I. F. Gihman, A. V. Skorohod, Theory of Stochastic Processes, Vols I, II, III, Springer.
[6] G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein, Phys. Rev., 36 (1930), 823.
[7] L. Arnold, Stochastic Differential Equations, Wiley - Interscience, New York, 1974.
[8] H. Poincare, Les Mithodes Nouvelles de la Mechanique Celeste, Gauthier - Villars, Paris, 1892.
[9] E. N. Lorenz, J. Atmos, Sci., 20(1963), 130.
[10] H. G. Schuster, Determinative Chaos, An Introduction, Physik - Varlag, Weinheim, 1984.
[11] S. Grossman and H. Fujisaka, Phys. Rev. A., 26 (1982), 1779.
[12] D. D'Humie'res, M. R. Beasly, B. A. Humberman and A. Libchaber, Phys. Rev. A, 26 (1982), 3483.
[13] A. Libchaber and J. Maurer, in Nonlinear Phenomena at Phase Tansition and Instabilities, Ed. by T.Riste, NATO Adv. Study Inst. Plenum Press, New York, 1982.
[14] M. J. Feigenbaum, Stat. Phys., 19(1978), 25.
[15] M. Feigenbaum, Universal Behaviour in Nonlinear System, Los Alamos. Science, 1980.
[16] 谭维翰、刘仁红，物理学报，39 (1990), 1051.
[17] P. Manneville and Y. Pomeau, Phys. Lett. A,75 (1979), 1.
[18] P. Manneville and Y. Pomeau, Physica, 1D (1980), 219.
[19] J. E. Hirsch, B. A. Hubermann and D. J. Scalapino, Phys. Rev., A 25 (1981), 519.
[20] M. Henon, Commu. Math. Phys., 50 (1976), 69.
[21] P. W. Miloni, Mei – Li Shih, J. R. Ackerhalt, Chaos in Laser- Matter Interactions, World Scientific Publishing Co. Pte Ltd, Singapore.
[22] O. E. Lanford, in Hydrodynamical Instability and the Transition to Chaos. Ed. by H. L. Swinney and J.P.Golub, Springer, New York, 1981.
[23] P. Grassberger, J. Stat. Phys., 19 (1981), 25.
[24] P. Grassber and I. Procaccia, Phys. Rev. Lett., 50 (1983), 346.
[25] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics and Chaos, Oxford. 1959.
[26] H. L. Swinney and J. P. Gollub, Phys. Today, 31 (1978), 41.
[27] S. Newhause, D. Ruelle and F. Takens, Commu. Math. Phys., 64 (1978), 35; D. Ruelle and F. Takens, Commu. Math. Phys., 20 (1971), 167.
[28] G. Julia, J. Math. Pure et Appl., 4 (1918), 47; H. O. Peiten and P. H. Richter, Harmonic in Chaos und Kosmos and Morphologec Komplexer Grenzen; Bilder ans der Theoric Slynamische Systeme, 1984.
[29] B.B.Mandelbrot, Ann. N.Y. Acad. Sci., 357(1980), 249.
[30] J. D. Farmer, Z. Naturforsch 37a. (1982), 1304; J. D. Farmer, in Evolution of Order and Chaos, Ed. by Haken, Springer, Heidelberg, New York. 1982 b.
[31] P. Collet and J. P. Eckman, Iterated Maps of the Interval as Dynamical Systems Birkhäuser, Boston, 1980.
[32] J. P. Crutchfied, J. D. Farmer and B. A. Hubermann, Phys. Rept., 92 (1982), 45.

[33] V. I. Arnold, Math. Methods of Classical Mechanics, Springer, Heidelberg, New York, 1978.
[34] V. I. Arnold, Russ. Math. Surveys, 18 (1963), 5.
[35] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk. USSR, 98 (1954), 525.
[36] J. Moser., Math. Ann., 169 (1967), 163.
[37] G. D. Birkhoff, Mem. Pont. Acad. Sci. Novi Lyncaei, 1 (1935), 85.
[38] M. V. Berry, Topics in Nonlinear Mechanics, Am. Inst. Phys. Conf. Proc, 46, (1978).
[39] I. Haken., Phys. Lett., 53A (1975), 77.
[40] O. E. Lanford, Turbulence Seminar, in Lecture Notes in Math., Ed. by P. Bernard and T. Rativ., 65, (1977), Springer, Heidelberg, New York, P. 114.
[41] C.O.Weiss, W.Klesche, P.S.Ering and M.Cooper, Opt. Commu., 52 (1985), 405; C.O.Weiss and W.Kliche, Opt. Commu., 51 (1984), 47.
[42] P. Mandel, Opt. Commu., 44 (1983), 400.
[43] C. O. Weiss and J. Brock, Phys. Rev. Lett., 57 (1986), 2804.
[44] R. G. Harison and D. J. Biswas, Prog. Quantum Elec., 10 (1985), 147.
[45] L. W. Caperson and A. Yariv, Appl. Phys. Lett., 17 (1970), 259.
[46] L. W. Caperson, IEEE J. Quantum Elec., QE - 14 (1978), 756.
[47] R. S. Gioggia and N. B. Abraham, Phy. Rev. Lett., 51 (1983), 650.
[48] 谭维翰，物理，23 (1994), 473; Tan Weihan et al, Acta Physica Sinica (Overseas Edition), 3 (1994), 884.
[49] R. Bonifacio and L. A. Lugiato, Lett. Nouvo Cim., 21 (1978), 505.
[50] K. Ikeda, Opt. Commu., 30 (1979), 257.
[51] H. J. Carmichael, R. R. Snapp and W. C. Schieve, Phys. Rev., A26 (1982), 3408.
[52] K. Ikeda, H. Daido and O. Akimoto, Phys. Rev. Lett., 45 (1980), 709.
[53] H. Nakatsuka, S. Asaka, H. Itoh, K. Ikeda and M. Matsuoka, Phys. Rev. Lett., 50 (1983), 109.
[54] H. M. Gibbs, F. A. Hopf, D. L. Kaplan and R. L. Shoemaker, Phys. Rev. Lett., 46 (1981), 474.
[55] R. G. Harrison, W. J. Firth, C. A. Emshary and I. A. Al - Saidi, Phys. Rev. Lett., 51 (1983), 562.
[56] 谭维翰、陆伟平，科学通报，(1988), 17.
[57] Lu Weiping and Tan Weihan, Opt. Commu., 61 (1987), 271.
[58] 谭维翰、刘仁红，科学通报，36 (1991), 1054.
[59] J. H. Narburger and F. S. Felber, Phys. Rev., 417 (1978), 335.
[60] J. Y. Gao, J. M. Yuan and L. M. Narducci, Opt. Commu., 44 (1983), 201.
[61] Liu Renhong, Ma Guobin, Tan Weihan, Chinese Jour. of Laser, 4 (1993), 335.
[62] V. Hakim and W. J. Rappel, Phys. Rev., A46 (1992), R7347.
[63] L. A. Lugiato, G. L. Oppo, J. R. Tredicce, L. M. Narducci and M. A. Pernigo, J. Opt. Soc. Am., B7 (1990), 1019.
[64] L. A. Lugiato, F. Prati, L. M. Narducci and G. L. Oppo, Opt. Commu., 69 (1989), 387.
[65] M. Bramlilla, F. Battipede, L. A. Lugiato, V. Penna, F. Prati, C. Tamm and C. O. Weiss, Phys. Rev., A,43 (1991), 5090.
[66] P. Coullet, L. Gil and F. Rocca, Opt. Commu., 73 (1989), 409.
[67] F. T. Arecchi, G. Giacomelli, P. L. Ramazza and S. Residori., Phys. Rev. Lett., 65 (1990), 2531.
[68] K. Ikeda, K. Otsuka and K. Matsumoto, Prog. Theor. Phys. Suppl., 99 (1989), 295; K. Otsuka, Phys. Rev. Lett., 65 (1990), 329.